SOBRE A DINÂMICA DE SOLUÇÕES DO SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE SCHRODINGER NO TORO UNIDIMENSIONAL *

Isnaldo Isaac Barbosa †

Resumo

A proposta deste trabalho é o estudo do problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações tipo Schrödinger no toro.

Resultados de boa colocação local deste sistema, para o caso contínuo, foram obtidos em [2]. Neste trabalho obtemos resultados de boa colocação em diferentes regiões do plano que dependem do valor da constante $\sigma > 0$. Discutimos como diferentes valores desta constante mudam a dinâmica do sistema.

1 Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo do Problema de Cauchy para um sistema que modela problemas da óptica não-linear. De maneira mais precisa estudaremos o seguinte modelo matemático

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) + p\partial_x^2 u(x,t) - \theta u(x,t) + \bar{u}(x,t)v(x,t) = 0, & x \in [0,L],\ t \geq 0, \\ i\sigma\partial_t v(x,t) + q\partial_x^2 v(x,t) - \alpha v(x,t) + \frac{1}{2}u^2(x,t) = 0, & p,q = \pm 1,\ \sigma > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad (u_0.v_0) \in H^\kappa([0,L]) \times H^s([0,L]). \end{cases} \tag{1.1}$$

Observamos que o modelo estabelece o acoplamento não-linear de duas equações dispersivas de tipo Schrödinger através de termos quadráticos

$$N_1(u,v) = \bar{u}v \quad \text{e} \quad N_2(u) = \frac{1}{2}u^2. \tag{1.2}$$

Fisicamente, de acordo com o trabalho [3], as funções complexas u e v representam pacotes de amplitudes do primeiro e segundo harmônico, respectivamente, de uma onda óptica. Os valores de p e q podem ser 1 ou -1, dependendo dos sinais fornecidos entre as relações de dispersão/difração e a constante positiva σ mede os índices de grandeza de dispersão/difração. O interesse em propriedades não-lineares de materiais ópticos têm atraído a atenção de físicos e matemáticos nos últimos anos. Diversas pesquisas sugerem que explorando a reação não-linear da matéria, a capacidade *bit-rate* de fibras ópticas pode ser aumentada substancialmente e consequentemente uma melhoria na velocidade e economia de transmissão e manipulação de dados. Particularmente, em materiais não centrossimétricos (aqueles que não possuem simetria de inversão ao nível molecular) os efeitos não-lineares de ordem mais baixa originam a susceptibilidade de segunda ordem, o que significa que a resposta não-linear para o campo elétrico é de ordem quadrática ver, por exemplo, os artigos [4] e [5].

---

*Colóquio DMAT UFPE

†Instituto de Matemática, UFAL, AL, Brasil, isnaldo@pos.mat.ufal.br

2 Resultados Principais

Provaremos resultados de boa colocação local para dados $(u_0, v_0) \in H^\kappa([0, L]) \times H^s([0, L])$ com índices $(\kappa, s) \in \mathcal{W}_\sigma$, onde a região plana $\mathcal{W}_\sigma$.

Este trabalho encontra-se em fase de revisão da região do plano $\mathcal{W}_\sigma$ no qual o teorema abaixo é válido.

Teorema 2.1. *Sejam $\sigma > 0$ e $(u_0, v_0) \in H^\kappa \times H^s$ com $(\kappa, s) \in \mathcal{W}_\sigma$, definida em (**??**). O problema de Cauchy (1.1) é localmente bem posto em $H^\kappa \times H^s$ no seguinte sentido: para cada $\rho > 0$, existem $T = T(\rho) > 0$ e $b > 1/2$ tais que para todo dado inicial com $\|u_0\|_{H^\kappa} + \|v_0\|_{H^s} < \rho$, existe uma única solução (u, v) para (1.1) satisfazendo as seguintes condições:*

$$\psi_T(t)u \in X^{\kappa,b} \quad e \quad \psi_T(t)v \in X^{s,b}_\sigma, \tag{2.1}$$

$$u \in C\big([0, T]; H^\kappa\big) \quad e \quad v \in C\big([0, T]; H^s\big). \tag{2.2}$$

Além disso, a aplicação dado-solução é localmente Lipschitziana.

Referências

[1] Angulo, Jaime and Linares, Felipe - Periodic pulses of coupled nonlinear Schrödinger equations in optics., *Indiana University Mathematics Journal*, 2007.

[2] Barbosa, Isnaldo .I. - The Cauchy Problem for nonlinear Quadratic Interactions of the Schrödinger type in one dimensional space, *Journal of Mathematical Physics* 59, 071515 (2018) https://doi.org/10.1063/1.5045337

[3] Menyuk, CR and Schiek, R and Torner, L - Solitary waves due to χ (2): χ (2) cascading, *Optics letters*, 1994.

[4] Karamzin, Yu N and Sukhorukov, AP - Nonlinear interaction of diffracted light beams in a medium with quadratic nonlinearity: mutual focusing of beams and limitation on the efficiency of optical frequency converters. *JETP Lett*, 1974.

[5] DeSalvo, Richard and Vanherzeele, H and Hagan, DJ and Sheik-Bahae, M and Stegeman, G and Van Stryland, EW - Self-focusing and self-defocusing by cascaded second-order effects in KTP. *Optics letters*, 1992