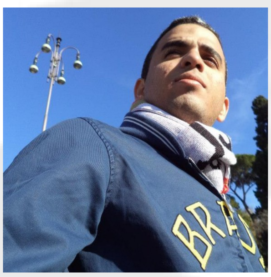
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Programa de Pós-graduação em Matemática - DMat-UFPE

Colóquio Júnior

Números Complexos Generalizados e Geometria não Euclidiana



Luiz C. B. da Silva

Prof. substituto, DMat-UFPE

É impossível negar a importância dos números complexos na matemática. Eles surgiram no século XVI a partir dos esforços de encontrar raízes de equações polinomiais. Por exemplo, não se pode resolver $x^2+1=0$ usando unicamente os números reais, uma vez que o quadrado de qualquer número real é positivo. Com isso, os matemáticos foram levados a postular a existência de um novo número, que não é real e cujo quadrado é -1. A dificuldade em se aceitar a existência de tais números explica, em parte, a terminologia empregada para denotá-los: *números complexos* ou *imaginários*, que são números da forma $z=a+b\mathrm{i}$, com a e b reais e $\mathrm{i}^2=-1$. Nos séculos XVIII e XIX ficou claro que é possível representar números complexos através de pontos num plano, de onde resulta a famosa forma polar, i.e., $z=r\,[\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)]$ [1]. Este último aspecto é muito importante para a geometria, pois através das operações aritméticas nos números complexos podemos representar rotações e translações no plano euclidiano, que definem assim os movimentos rígidos e caracterizam o conceito de congruência [2]: translação através da soma e rotação através da multiplicação por números complexos unitários, i.e., $r=1$. No século XIX essas ideias foram generalizadas, permitindo a introdução do que hoje se conhece como números de Clifford [3]. Os números complexos e também os quatérnios de Hamilton são exemplos de números de Clifford em dimensão 2 e 4, respectivamente. Com o uso de tais números podemos, por exemplo, descrever movimentos rígidos em geometrias euclidianas (em dimensões maiores que 3, inclusive) através de operações aritméticas [2,3].

Aqui estaremos interessados no estudo dos números de Clifford em dimensão 2, que podem ser vistos como generalizações dos números complexos [4]. Mais precisamente, estudaremos os chamados *números hiperbólicos* e *duais*, que são números da forma $z=a+b\mathrm{h}$ e $z=a+b\varepsilon$, onde a e b são reais e as *unidades imaginárias hiperbólica* h e *dual* ε, que *não* são números reais, satisfazem $\mathrm{h}^2=1$ e $\varepsilon^2=0$, respectivamente. Assim, como os números complexos, os números hiperbólicos e duais admitem uma forma polar: para os números hiperbólicos temos $z=r\,[\cosh(t)+\mathrm{h}\sinh(t)]$, enquanto para os duais se tem $z=r[\mathrm{cosg}(t)+\varepsilon\mathrm{sing}(t)]$, onde cosh e sinh são os cosseno e seno hiperbólicos e cosg e sing são os cosseno e seno galileanos (definidos como $\mathrm{cosg}(t)=1$ e $\mathrm{sing}(t)=t$), repectivamente [2,5].

Nesta apresentação apresentaremos as propriedades algébricas dos números hiperbólicos e duais, os conceitos de conjugação e de módulo. Veremos também que, diferentemente dos números complexos, estes números não formam um corpo devido à existência de divisores de zero. Finalmente, discutiremos a relação existente entre os números hiperbólicos com a geometria (não euclidiana) no plano de Lorentz-Minkowski (que fisicamente está associada à relatividade restrita em 1d) e entre os números duais e a geometria (não euclidiana) no plano de Galileo (que fisicamente está associada à relatividade de Galileo em 1d, i.e., cinemática newtoniana).

[1] M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner, "Trigonometria e números complexos", Sociedade Brasileira de Matemática (2005).

[2] I. M. Yaglom, "A simple non-Euclidean geometry and its physical basis". Springer (1979).

[3] K. Gürlebeck, K. Habetha, W. Sprössig, "Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space", Birkhäuser (2008).

[4] A. A. Harkin, J. B. Harkin, "Geometry of generalized complex numbers", Math. Mag. **77** (2004) 118.

[5] L. C. B. da Silva, "Rotation minimizing frames and spherical curves in simply isotropic and semi-isotropic 3-spaces", e-print arXiv:1707.06321v2.

30 de agosto de 2017 (quarta-feira) 13 horas

Sala 209 - Departamento de Matemática - CCEN