

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2024

Mecânica Clássica

29/02/2024 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

A Lagrangiana do sistema de dois corpos cuja interação só depende da distância r entre ambos pode ser reduzida à de uma única partícula, com massa m , cujo movimento se dá sobre um plano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r),$$

sendo r e ϕ coordenadas polares. O movimento da Terra ao redor do Sol é descrito, com excelente aproximação, por essa Lagrangiana, com m sendo a massa da Terra.

- (a) (30%) Mostre que a grandeza $L = mr^2\dot{\phi}$ se conserva durante o movimento. Interprete fisicamente.
- (b) (20%) A órbita da Terra é uma elipse. Chamam-se periélio e afélio os pontos da órbita mais próximo e mais afastado do Sol, respectivamente, nos quais a Terra se encontra a distâncias R_{per} e R_{afe} do Sol. Sabendo que

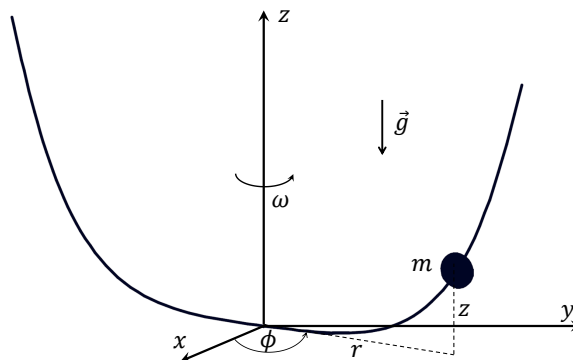
$$R_{\text{afe}} \approx 15 \times 10^7 \text{ km} \quad \text{e} \quad R_{\text{per}} = \eta R_{\text{afe}}, \quad \text{com} \quad \eta = 0,97,$$

calcule a razão $v_{\text{afe}}/v_{\text{per}}$ entre os módulos das velocidades da Terra no periélio e no afélio, v_{per} e v_{afe} , respectivamente.

- (c) (30%) Mostre que a grandeza L definida no item (a) está relacionada à área A da elipse percorrida pela Terra através da fórmula $L = 2mA/T$, onde T é o período da órbita e m a massa da Terra.
- (d) (20%) Sabendo que $A \approx 7 \times 10^{16} \text{ km}^2$ e que há $T \approx 3 \times 10^7$ segundos em um ano, calcule, aproximadamente, o valor da velocidade v_{afe} , definida no item (b).
-

QUESTÃO 2 – EQUAÇÃO DE LAGRANGE

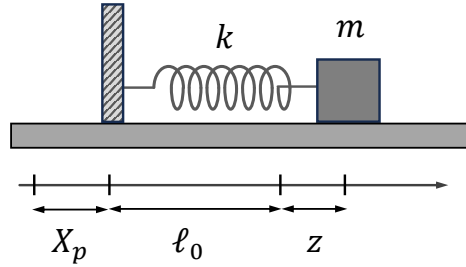
Uma partícula de massa m desliza sem atrito ao longo de um arame rígido cuja forma é $z(r) = cr^4$, onde a constante c tem dimensão de $(\text{comprimento})^{-3}$. O arame gira em torno do eixo de simetria z , com velocidade angular constante ω , sob o efeito do campo gravitacional da terra $\vec{g} = -g \hat{z}$, onde g é a aceleração gravitacional.



- (a) (30%) Determine a Lagrangiana do sistema em coordenadas cilíndricas.
 - (b) (30%) Determine a equação de movimento da partícula em termos da coordenada r .
 - (c) (10%) Suponha que a partícula descreve uma trajetória circular. Determine o raio r_0 desta trajetória e mostre que ela é estável.
 - (d) (30%) Determine a frequência, Ω , de pequenas oscilações em torno do raio r_0 da trajetória circular. Sugestão: faça $r = r_0 + a \sin \Omega t$, onde $a \ll r_0$.
-

QUESTÃO 3 – EQUAÇÕES DE HAMILTON

Uma massa m é conectada a uma parede por uma mola horizontal com constante de mola k e comprimento relaxado ℓ_0 . A parede é forçada a mover-se de acordo com $X_p(t) = A \sin \omega t$. Seja z o deslocamento da mola em relação à sua posição de equilíbrio.



- (a) (40%) Encontre o Hamiltoniano H em termos de z e p_z , seu momento conjugado.
- (b) (30%) Escreva as equações de Hamilton para este problema e obtenha a equação diferencial de segunda ordem apenas para p_z , o momento.
- (c) (30%) Verifique se o Hamiltoniano H é conservado. H representa a energia do sistema? Justifique suas respostas.
-

QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Considere a seguinte definição da variável P em termos das variáveis q e p canonicamente conjugadas:

$$P(q, p) = \frac{1}{2m\omega} (p^2 + m^2\omega^2 q^2),$$

onde m e ω são constantes reais positivas.

(a) (25%) Encontre a variável $Q(q, p)$ canonicamente conjugada a $P(q, p)$.

(b) (25%) Considere a hamiltoniana de um oscilador harmônico unidimensional de massa m e frequência angular ω ,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Obtenha a hamiltoniana transformada $K(Q, P)$.

(c) (25%) Obtenha as equações de movimento para Q e P e resolva. Interprete os resultados obtidos.

(d) (25%) Determine $q(t)$.

Dado: $\int (a^2 - b^2 u)^{-1/2} du = b^{-1} \arcsin(bu/a) + \text{constante}$