



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2022

**Mecânica Quântica**

10/08/2022 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

---

**QUESTÃO 1 – EVOLUÇÃO TEMPORAL E REPRESENTAÇÕES**

Uma partícula de *spin*  $1/2$  é colocada num campo magnético ao longo da direção  $x$ , de modo que a hamiltoniana do sistema é dada  $\hat{H} = \delta \hat{\sigma}_x$ , onde  $\delta$  é real.

- (a) (10%) Obtenha uma representação matricial para o operador  $\hat{\mathcal{H}}$  na base  $\{|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle\}$  de autoestados do observável  $\hat{S}_z$ .
- (b) (30%) Obtenha o operador de evolução temporal,  $\hat{U}(t, 0)$ , para esse sistema e determine o vetor de estado em um tempo  $t$ ,  $|\chi(t)\rangle$ , sabendo que em  $t = 0$  o sistema se encontra no estado  $|\chi_1\rangle$ .
- (c) (30%) Usando a descrição de Schroedinger, determine o valor médio do operador  $\hat{P} = |\chi_2\rangle\langle\chi_1|$  no tempo  $t$ . Idem usando a descrição de Heisenberg.
- (d) (30%) Para a partícula no estado  $|\chi(t)\rangle$ , calcule as dispersões  $\langle(\Delta\hat{S}_i)^2\rangle = \langle\hat{S}_i^2\rangle - \langle\hat{S}_i\rangle^2$  ( $i = x, z$ ) e verifique que elas satisfazem ao princípio de incerteza generalizado. Interprete fisicamente o seu resultado.
- 

Dados:

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i \quad (i = x, y, z)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\sigma}_i)^n = \begin{cases} \hat{1}, & n = \textit{par} \\ \hat{\sigma}_i, & n = \textit{impar} \end{cases}$$

---

**QUESTÃO 2 – FUNDAMENTOS**

- (a) (25%) Mostre que se o hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  de um sistema com momento angular  $\hat{J}$  é invariante por rotação, isto é,  $[\hat{\mathcal{D}}(R), \hat{\mathcal{H}}] = 0$ , os estados de  $\hat{\mathcal{H}}$ , denotados por  $|n; jm\rangle$ , são degenerados. Determine o grau de degenerescência.
- (b) (25%) Mostre que se  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são autoestados do operador paridade  $\hat{\pi}$ , então  $\langle\alpha|\hat{x}|\beta\rangle \neq 0$ , somente se  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  têm paridades opostas.
- (c) (25%) O operador de translação finita em uma dimensão,  $\hat{\tau}(l)$ , satisfaz às propriedades  $\hat{\tau}(l)|x'\rangle = |x' + l\rangle$  e  $\hat{\tau}^\dagger(l)x'\hat{\tau}(l) = x' + l$ . Considere o movimento de uma partícula num potencial periódico com período espacial  $a$ , de modo que  $V(x + a) = V(x)$ . Mostre que o hamiltoniano é invariante por translações na rede.
- (d) (25%) O hamiltoniano de um sistema com momento angular  $\hat{J}$  é dado por  $\hat{\mathcal{H}} = A\hat{J}_x^2 + B\hat{J}_y^2 + C\hat{J}_z^2$ , onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes reais. Verifique se esse sistema é invariante por reversão temporal.
- 

Dados:

$$\hat{\mathcal{D}}(R) = \exp(-i \frac{\hat{J} \cdot \hat{n} \phi}{\hbar})$$

$$\hat{\mathcal{D}}(R)|n; jm\rangle = \sum_{m'} |n; jm'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$$

---

**QUESTÃO 3 – ÁTOMO HIDROGENOIDE: TEORIA DE PERTURBAÇÃO**

Considere um átomo com número atômico  $Z$  e apenas um elétron, cujo hamiltoniano é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} - \frac{Z\hbar^2}{a_0 m r},$$

onde  $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$  é o raio de Bohr. O estado fundamental deste átomo é caracterizado por sua função de onda e energia dados por

$$\psi_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}; \quad E_{10} = -\frac{\hbar^2 Z^2}{2ma_0^2}.$$

Suponha que o número atômico aumenta repentinamente em uma unidade, tal que  $Z \rightarrow Z + 1$  (em princípio isso poderia acontecer através da emissão de pelo menos um elétron e um antineutrino pelo núcleo atômico).

- (a) (20 %) Determine diretamente a nova energia do estado fundamental em termos de  $E_{10}$ ,  $Z$  e outras constantes do problema.
- (b) (30 %) Agora, determine novamente a nova energia utilizando teoria de perturbação de primeira ordem independente do tempo.
- (c) (20 %) Comparando as expressões obtidas nos itens (a) e (b), para que valores de  $Z$  a teoria de perturbação descreveria apropriadamente a nova energia do estado fundamental? Em outras palavras, discuta o limite de validade da teoria de perturbação para este problema em função de  $Z$ .
- (d) (30 %) Suponha que inicialmente tivéssemos um átomo de trítio (isótopo do hidrogênio) no seu estado fundamental, e seu núcleo se transformasse no núcleo de um átomo de hélio. Calcule a probabilidade de encontrar o sistema no estado fundamental do hélio imediatamente após a transformação e interprete o valor encontrado.

---

Dado:

$$\int_0^\infty r e^{-ar} dr = 1/a^2$$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-ar} dr = 2/a^3$$

---

**QUESTÃO 4 – PARTÍCULA EM UM CAMPO MAGNÉTICO: NÍVEIS DE LANDAU**

Considere um elétron com carga  $q = -e$  e massa  $m$  colocado em um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{z}$ , descrito pelo potencial vetor  $\vec{A} = -yB\hat{x}$ , no *gauge* onde  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . A equação de Schroedinger descrevendo este sistema é dada por:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = E\Psi,$$

onde  $\Psi = \Psi(x, y, z)$ ,  $E$  representa a energia total do elétron e  $c$  a velocidade da luz.

- (a) (30%) Mostre que os observáveis  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  e  $\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$  são constantes de movimento neste problema.
  - (b) (40%) Escreva a função de onda do elétron na forma  $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  e obtenha as equações satisfeitas por  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$  em função das constantes de movimento identificadas acima.
  - (c) (30%) Identifique as soluções para as equações obtidas no item anterior e obtenha o espectro para as energias  $E$  do elétron (níveis de Landau).
-