



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2022

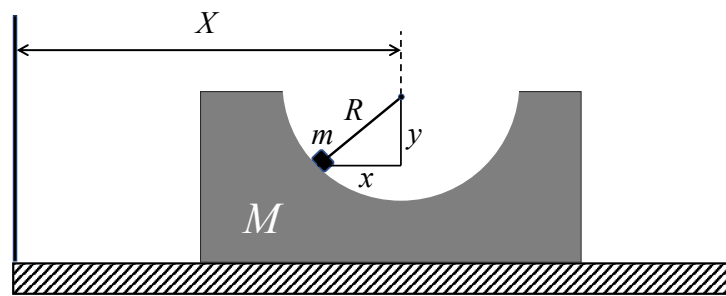
Mecânica Clássica

11/08/2022 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – LEIS DE NEWTON, FORMALISMO LAGRANGIANO, MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Um pequeno corpo de massa m pode deslizar sem atrito sobre uma cavidade cilíndrica de raio R cavada num bloco de massa M . O bloco encontra-se sobre uma superfície horizontal, sobre a qual também pode deslizar livremente. As posições dos dois corpos podem ser determinadas pelo conjunto de coordenadas X, x, y , mostradas na figura abaixo. Considere que o pequeno corpo é solto do repouso a partir do topo da cavidade com o bloco também em repouso.



- (a) (20%) Mostre num diagrama de corpo isolado as forças que atuam em cada um dos corpos e, usando as leis de Newton, escreva as respectivas equações de movimento. Identifique as constantes de movimento. Justifique sua resposta.
- (b) (30%) Obtenha a lagrangiana descrevendo este sistema em termos das coordenadas generalizadas X, x, y e de suas derivadas temporais $\dot{X}, \dot{x}, \dot{y}$.
- (c) (30%) Identifique a equação de vínculo entre as coordenadas e introduza o multiplicador de Lagrange para obter as equações de movimento. Qual o significado físico do multiplicador de Lagrange neste problema?
- (d) (20%) No limite em que $M \gg m$, obtenha a força normal que a parede da cavidade exerce sobre o corpo de massa m .
-

QUESTÃO 2 – PRINCÍPIO DE HAMILTON: AÇÃO ESTACIONÁRIA

O Princípio de Hamilton estabelece que a ação, definida como uma integral do lagrangiano na forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt,$$

possui um valor estacionário para a trajetória efetivamente percorrida por um sistema físico. Muitas vezes o princípio é chamado de Princípio de Mínima Ação, no entanto a condição postulada pelo princípio de Hamilton é que a ação seja estacionária, ou seja que esteja num extremo. A presença de uma condição de máximo, mínimo ou ponto de sela deve ser determinada a posteriori.

A seguir, iremos analisar uma aplicação do princípio de Hamilton a um oscilador harmônico, caracterizado pelo lagrangeano

$$\mathcal{L}_0(x_0, \dot{x}_0, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2,$$

onde m é a massa e k a constante elástica, tal que a frequência natural é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$ e o período é $\tau = 2\pi/\omega$.

- (a) (20%) Considerando uma perturbação na trajetória, tal que $x_0(t) \rightarrow x_0(t) + \eta(t)$, obtenha uma expressão para o lagrangiano em função de x_0 , \dot{x}_0 , η e $\dot{\eta}$.
- (b) (30%) Obtenha uma expressão para a ação incluindo a perturbação na trajetória S_η , em termos da ação na trajetória não perturbada S_0 e de uma integral na forma

$$S_\eta = S_0 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [m(2\dot{x}_0\dot{\eta} + \dot{\eta}^2) - k(2x_0\eta + \eta^2)] dt.$$

- (c) (30%) Sabendo que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, mostre que a ação pode ser escrita na forma

$$S_\eta = S_0 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{\eta}^2 - k\eta^2) dt.$$

- (d) (20%) Considere $t_1 = 0$, $t_2 = T$ e $\eta(t) = \epsilon \sin(\pi t/T)$, onde ϵ é uma constante. Analisando o sinal de $\Delta S = S_\eta - S_0$, mostre que a ação pode ser máxima ou mínima dependendo da relação entre T e τ . É possível ter valores de T e τ para que ΔS seja nulo? Justifique.

Dados:

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

QUESTÃO 3 – MOVIMENTO EM DUAS DIMENSÕES

Considere uma partícula de massa m se movendo em um plano sob a ação de um potencial constante $U(r) = U_0$. Use as coordenadas polares (r, θ) de modo que $\theta = 0$ corresponda à máxima aproximação da partícula da origem do sistema de coordenadas ($r = 0$).

- (a) (30%) Obtenha a lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ e a hamiltoniana $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$ deste sistema.
- (b) (30%) Determine as constantes de movimento do sistema. Justifique.
- (c) (40%) Obtenha a equação da trajetória descrita pela partícula em termos das constantes de movimento identificadas no item anterior. Mostre que a trajetória é uma linha reta.
-

Dado:

$$|\vec{v}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + \text{constante}$$

QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

- (a) (20%) Descreva as propriedades gerais de uma transformação canônica na mecânica clássica e comente a sua importância na solução de problemas físicos.

Considere uma transformação de coordenada generalizada e momento conjugado:
 $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, tal que

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p); \quad P = q^\alpha \sin(\beta p),$$

onde α e β são constantes numéricas.

- (b) (30%) Determine os valores numéricos de α e β para que esta transformação seja canônica.
- (c) (30%) Obtenha a função geradora desta transformação canônica.
- (d) (20%) Obtenha explicitamente os colchetes de Poisson $\{Q, Q\}_{q,p}$, $\{P, P\}_{q,p}$ e $\{Q, P\}_{q,p}$.
-

Dado:

$$\begin{aligned} dF_1(q, Q, t) &= \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt \\ dF_2(q, P, t) &= \sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt \\ dF_3(p, Q, t) &= \sum_i (-dq_i dp_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt \\ dF_4(p, P, t) &= \sum_i (-q_i dp_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt \end{aligned}$$

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}$$