Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2022

# Mecânica Quântica

20/04/2022 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

## Questão 1 – Aplicação da Equação de Schrödinger

Em um experimento de ressonância magnética nuclear, um núcleo de spin-$1/2$ é colocado em um campo magnético de magnitude $B_0$ na direção $z$. Um campo oscilante de amplitude $B_1$ e frequeência $\omega$ é aplicado no plano $xy$, de modo que o campo magnético total é dado por

$$\vec{B} = (B_1 \cos(\omega t), B_1 \mathrm{sen}(\omega t), B_0).$$

O hamiltoniano do sistema é $\hat{\vec{H}} = -\mu \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}$, onde $\mu$ é o momento magnético e $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$, com $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ sendo as matrizes de Pauli.

**(a)** (15%) Escreva a representação matricial do hamiltoniano do sistema na base de autoestados de $\hat{S}_z$, onde $\hat{S}_z$ é o operador de spin na direção $z$.

**(b)** (30%) Considerando que no tempo $t$ o estado de spin na base de $\hat{S}_z$ é dado por

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

obtenha as equações diferenciais que determinam a evolução de $a(t)$ e $b(t)$. Na sua resposta, utilize a notação $\Omega_\parallel = \mu B_0/\hbar$ e $\Omega_\perp = \mu B_1/\hbar$.

**(c)** (20%) Utilizando o resultado do item (b), mostre que a equação dinâmica desacoplada de $a(t)$ é dada por

$$\ddot{a}(t) + i\omega\dot{a}(t) + (\omega\Omega_\parallel + \Omega_\perp^2 + \Omega_\parallel^2)a(t) = 0,$$

onde o ponto significa derivada temporal.

**(d)** (35%) Resolva a equação da dinâmica do item (c). Se em $t = 0$, o spin do núcleo aponta na direção $-z$, quanto tempo leva para o spin apontar na direção $+z$ pela primeira vez?

---

Dados:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Questão 2 - Momento Angular

Duas partículas de spin-1/2 são separadas por uma distância $d$ e interagem apenas através do hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{d^3}\hat{\vec{\mu}}_1 \cdot \hat{\vec{\mu}}_2 - \frac{3}{d^5}(\hat{\vec{\mu}}_1 \cdot \vec{d})(\hat{\vec{\mu}}_2 \cdot \vec{d}),$$

onde $\hat{\vec{\mu}}_i = \gamma\hat{\vec{S}}_i$ é o momento magnético de spin da partícula $i$ ($i = 1, 2$), com $\gamma$ sendo o fator giromagnético e $\hat{\vec{S}}_i$ o operador de spin da partícula $i$. Além disso, $\vec{d} = d\boldsymbol{e}_z$, onde $\boldsymbol{e}_z$ é o vetor unitário ao longo do eixo $z$. Considere $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$ sendo o módulo quadrado do spin total e o spin total na direção do eixo $z$, respectivamente.

**(a)** (35%) Obtenha o hamiltoniano em termos dos operadores $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$.

**(b)** (40%) Obtenha a representação matricial do hamiltoniano na base produto $\{|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle\}$, onde $\hat{S}_{iz}|s_i, m_i\rangle = \hbar m_i|s_i, m_i\rangle$ e $\hat{S}_i^2|s_i, m_i\rangle = \hbar^2 s_i(s_i + 1)|s_i, m_i\rangle$.

**(c)** (25%) Calcule as possíveis energias para esse sistema.

---

Dados:

$$\hat{S}_\pm|s, m\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \quad \text{e} \quad \hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$$

## Questão 3 – Teoria de Perturbação

Uma partícula de massa $m$ se move no potencial harmônico tridimensional dado por

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2),$$

onde $k = m\omega^2$ é uma constante. Suponha que uma interação externa gera uma perturbação aditiva no potencial dada por $U_{pert} = \lambda \frac{kxy}{2}$, onde $\lambda$ é um parâmetro pequeno.

**(a)** (15%) Encontre a correção de primeira ordem na energia do estado fundamental.

**(b)** (35%) Encontre a correção de segunda ordem na energia do estado fundamental.

**(c)** (50%) Encontre a(s) correção (correções) de primeira ordem do primeiro nível excitado de energia.

---

Dados:

$$\hat{X}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger), \quad \text{onde} \quad \hat{X}_1 = \hat{X},\ \hat{X}_2 = \hat{Y},\ \hat{X}_3 = \hat{Z}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{e} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

## Questão 4 – Partículas idênticas

Duas partículas idênticas e *no mesmo estado de spin* estão confinadas em uma caixa unidimensional de comprimento $L$. Suponha que as partículas não interagem entre si e considere os estados estacionários de uma única partícula nessa caixa como

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{com} \;\; x \in (0, L) \;\; \text{e} \;\; n = 1, 2, 3, ....$$

**(a)** (30%) Escreva a função de onda do estado fundamental $\psi(x_1, x_2)$ considerando que as duas partículas são: (i) férmions e (ii) bósons.

**(b)** (35%) Sendo férmions no estado fundamental, qual é a probabilidade de que ambas as partículas sejam encontradas na metade $x \in (0, L/2)$ da caixa?

**(c)** (35%) Repita o cálculo do item (b) para bósons. Em qual situação [(b) ou (c)] a probabilidade é maior? Como você explicaria fisicamente esse resultado?

---

Dados:

$$\int dx \;\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2\pi(m-n)}\text{sen}\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right] - \frac{L}{2\pi(m+n)}\text{sen}\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right],$$

para $m \neq n$.

$$\int dx \;\text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{x}{2} - \frac{L}{2n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

(2)