Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2022

Eletrodinâmica Clássica

18/04/2022 - 9h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

Questão 1 – Método de imagens e funções de Green

Alguns problemas em eletrostática tornam-se mais simples de resolver quando identificamos a função de Green apropriada à condição de contorno específica do problema. A função de Green satisfaz a seguinte equação

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{u}) = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{u}),$$

ou seja, é equivalente à equação de Poisson para uma partícula pontual de carga $q = 4\pi\epsilon_0$.

(a) (50%) Utilizando o método de imagens, mostre que a função de Green apropriada para problemas eletrostáticos no interior de uma cavidade esférica de raio b em um condutor aterrado pode ser expressa por

$$G(\vec{r},\vec{u}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{(r_> r_<)^\ell}{b^{2\ell+1}}\right] P_\ell(\cos\gamma),$$

onde $r_> = \max(r,u)$, $r_< = \min(r,u)$ e $\gamma = \measuredangle(\vec{r},\vec{u})$.

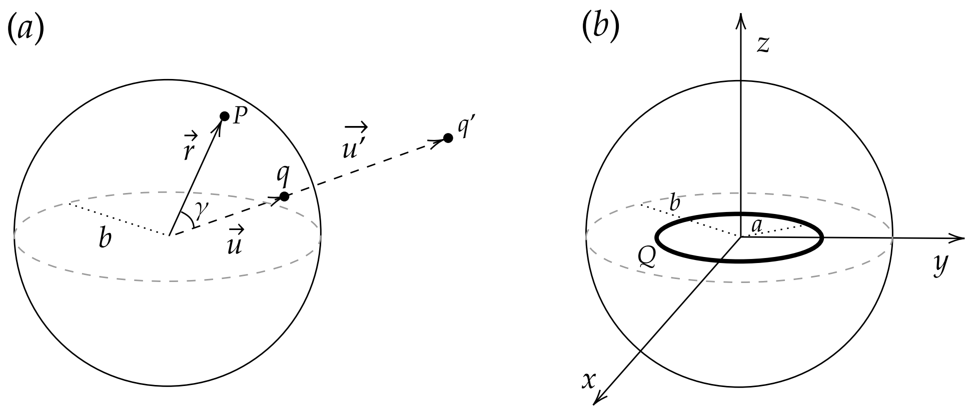
Dica: a condição de contorno pode ser satisfeita adicionando uma carga imagem q' no exterior da cavidade, colinear à carga q, conforme ilustrado na figura (a).

Dado: $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2-2ts}} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(s)$, onde $|t| < 1$.

Agora suponha um anel de raio $a < b$ e carga Q uniformemente distribuída, posicionado no plano xy e concêntrico à cavidade conforme ilustrado na figura (b).

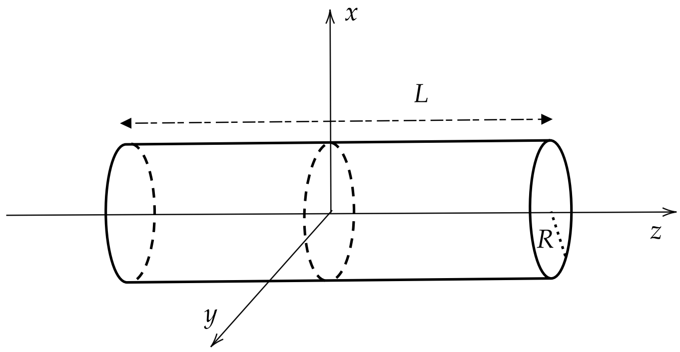
(b) (25%) Calcule a densidade de carga volumétrica $\rho(r,\theta,\phi)$.

(c) (25%) Usando os resultados dos itens (a) e (b), calcule o potencial eletrostático no interior da cavidade esférica nos intervalos $0 < r < a$ e $a < r < b$.



Questão 2 – Magnetostática

Considere um imã permanente na forma de um cilindro com raio R, comprimento L e magnetização uniforme $\vec{M} = M\hat{z}$. Considere o sistema de coordenadas orientado conforme ilustrado na figura, com a origem no centro do cilindro.



(a) (40%) Calcule o potencial magnético $\Phi(\vec{x})$ ao longo do eixo z.

(b) (40%) Calcule o campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$ ao longo do eixo z.

(c) (20%) Descreva qualitativamente a direção e sentido do campo $\vec{B}$ no ponto $(x, y, z) = (2L, 0, 0)$. Justifique sua resposta.

Questão 3 – Ondas Quase-estátcas em Condutores

Nos itens abaixo, considere um condutor de condutividade σ, permissividade ϵ e permeabilidade μ sujeito a campos que variam quase-estaticamente.

(a) (20%) A partir da equação da continuidade da corrente e de equações de Maxwell adequadas, mostre que a densidade de cargas livres ρ em um condutor satisfaz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\rho. \tag{1}$$

(b) (20%) Resolva a equação acima supondo que em $t = 0$ a distribuição de cargas no interior do condutor é $\rho(\vec{r}, 0)$. Use sua solução para explicar o que ocorre com uma distribuição de cargas livres colocada no interior de um condutor após um tempo suficientemente longo.

(c) (30%) Agora suponha que não haja cargas livres acumuladas no interior do condutor. A partir de equações de Maxwell adequadas, e desprezando correntes de deslocamento, mostre que, no interior do condutor, o campo $\vec{B}$ satisfaz a equação de difusão:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{2}$$

(d) (30%) Um condutor ocupa o espaço $x \geq 0$, de forma que sua superfície coincide com o plano yz. Um campo magnético oscilante $\vec{H} = \hat{z} H_0 e^{i\omega t}$ de frequência angular ω se distribui uniformemente na região externa ao condutor ($x < 0$). Notando que a Eq. (2) admite soluções do tipo $\vec{B}(x,t) = \hat{z} b(x) e^{i\omega t}$ em $x \geq 0$, calcule $b(x)$ e mostre que, no interior do condutor, a amplitude das oscilações do campo magnético decaem exponencialmente. Determine o comprimento característico desse decaimento, expressando-o em termos dos parâmetros materiais e da frequência angular ω.

Questão 4 – Ondas eletromagnéticas no vácuo

O campo elétrico no interior de um forno micro-ondas pode ser descrito aproximadamente por: $\vec{E}(z,t) = \hat{x}E_0 \operatorname{sen} kz \cos \omega t$.

(a) (20%) Mostre que $\vec{E}(z,t)$ satisfaz uma equação de onda.

(b) (40%) Calcule o campo magnético $\vec{B}(z,t)$ no interior do forno supondo $\vec{B}(t=0)=0$.

(c) (40%) Calcule a média temporal do vetor de Poynting no interior do forno ao longo de um período de oscilação dos campos. Interprete seu resultado à luz do significado físico do vetor de Poynting.

Formulário

Equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Meios lineares: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \mu^{-1} \vec{B}$

Identidade vetorial: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$

Polinômios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell,\ell'}$$
$$P_{2n+1}(0) = 0$$
$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2}$$

Gradiente em Coordenadas Esféricas:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$