Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2022

Mecânica Estatística

19/04/2022 - 9h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

Questão 1 – Termodinâmica

Considere um gás não ideal que obedece às seguintes equações de estado,

$$E = a\,T^{\alpha} \qquad \text{e} \qquad P\,V = b\,T^{\beta}\,,$$

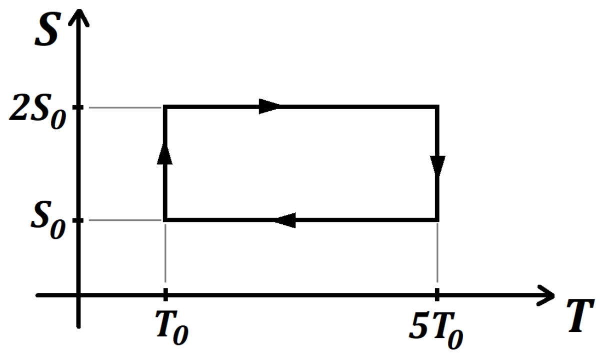
onde os parâmetros a, b, α e β são constantes características do gás, ao passo que E, P, V e T denotam respectivamente a energia interna, a pressão, o volume e a temperatura absoluta de uma porção desse gás. Faça o que é pedido abaixo.

(a) (25%) Calcule a capacidade térmica *a pressão constante* para essa porção de gás.

(b) (25%) Prove que devemos ter $\beta = 1$ a fim de que a entropia desse sistema, S, seja uma função de estado. Argumente a razão dessa necessidade.

(c) (25%) Considerando $\beta = 1$ e $\alpha = 2$, obtenha a forma genérica das curvas adiabáticas $V = V(T)$ para esse gás.

(d) (25%) Considerando $\beta = 1$ e $\alpha = 2$, calcule a eficiência do máquina térmica que tem essa porção de gás como substância operante e que segue o ciclo ilustrado na figura abaixo. Argumente seus passos.



Questão 2 – Ensemble microcanônico

Considere um sistema feito por partículas com três estados acessíveis, $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, cujas energias e magnetizações estão resumidas na tabela abaixo:

	$\vert 1\rangle$	$\vert 2\rangle$	$\vert 3\rangle$
Energia	0	ϵ	2ϵ
Magnetização	0	μ	3μ

Denotando respectivamente por N, E e M o número total de partículas do sistema, a energia total do sistema e a magnetização total, faça o que é pedido abaixo.

(a) (10%) Denotando por n_i o número de partículas no estado $|i\rangle$, monte expressões para N, E e M em termos de (n_1, n_2, n_3). Em seguida, inverta essas relações obtendo n_i em termos de (N, E, M).

(b) (30%) Supondo que o sistema está no macroestado (E, N, M), determine o número de microestados acessíveis, $\Omega(E, N, M)$. Argumente seus passos. Dica: Primeiro raciocine em termos dos parâmetros (n_1, n_2, n_3) e só no final escreva a resposta em termos de (E, N, M).

(c) (40%) Obtenha a temperatura do sistema no macroestado (E, N, M). Nas suas contas, considere $n_i \gg 1$ e use a aproximação de Stirling: $\ln x! \simeq x \ln x - x$, quando $x \gg 1$.

(d) (20%) Averigue se a temperatura obtida no item anterior é uma quantidade intensiva ou extensiva e discuta se isso está de acordo com suas expectativas.

Questão 3 – Ensemble canônico: gás clássico ultra-relativístico

Um gás monoatômico de N partículas clássicas está confinado em uma câmara unidimensional de comprimento L. As partículas estão no regime ultra-relativístico, de sorte que o hamiltoniano do sistema é $\mathcal{H}(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} c|p_i|$, onde c é uma constante e q_i e p_i são respectivamente a coordenada e o momento linear da i-ésima partícula.

(a) (40%) Calcule a função de partição clássica do gás, $Z(N, L, T)$, onde T é a sua temperatura.

(b) (30%) Calcule a capacidade térmica do gás a L constante.

(c) (30%) Seja τ a tensão linear, definida de forma que o trabalho mecânico exercido pelo gás para produzir um aumento infinitesimal dL do comprimento da câmara é $dW = \tau dL$. Calcule a equação de estado $\tau = \tau(N, L, T)$ do gás.

Questão 4 – Gás de Bósons Livres

A grande função de partição de um gás quântico pode ser expressa na forma

$$\mathcal{Z} = \prod_j \sum_{n_j} \left[z e^{-\beta \epsilon_j} \right]^{n_j}, \tag{1}$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$, $z = e^{\beta\mu}$ é a fugacidade, μ o potencial químico e j rotula todos os possíveis estados quânticos de uma partícula, sendo $\epsilon_j = \dfrac{\hbar^2 k_j^2}{2m}$ as energias desses estados e n_j os respectivos números de ocupação.

(a) (30%) Partindo da equação (1) e considerando que o gás satisfaz à estatística de Bose-Einstein, mostre que o número de ocupação médio do estado i é:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} - 1}$$

(b) (20%) Analisando a expressão de $\langle n_i \rangle$ e os possíveis valores de ϵ_i, determine qual o valor máximo de μ fisicamente possível. Interprete o que ocorre com o gás quando este valor máximo é atingido.

Nos itens abaixo, considere um gás bidimensional de bósons com degenerescência de spin $g = 1$ e confinados em uma superfície de área A no limite termodinâmico.

(c) (30%) Deduza uma expressão para o número total de bósons $N(T, A, \mu)$ supondo que o gás está numa fase não condensada. Expresse seu resultado em termos de uma função de Bose-Einstein:

$$b_\ell(z) = \frac{1}{\Gamma(\ell)} \int_0^\infty \frac{x^{\ell-1}}{z^{-1} e^x - 1} dx.$$

Em seguida, calcule $N(T, A, \mu)$ numa aproximação de primeira ordem em z no limite $z \ll 1$. Interprete fisicamente este limite.

Dados: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; $\Gamma(n+1) = n!\ \forall\ n$ inteiro; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(d) (20%) Mostre que não há condensação de Bose-Einstein deste gás em $T > 0$.