Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2022

Mecânica Clássica

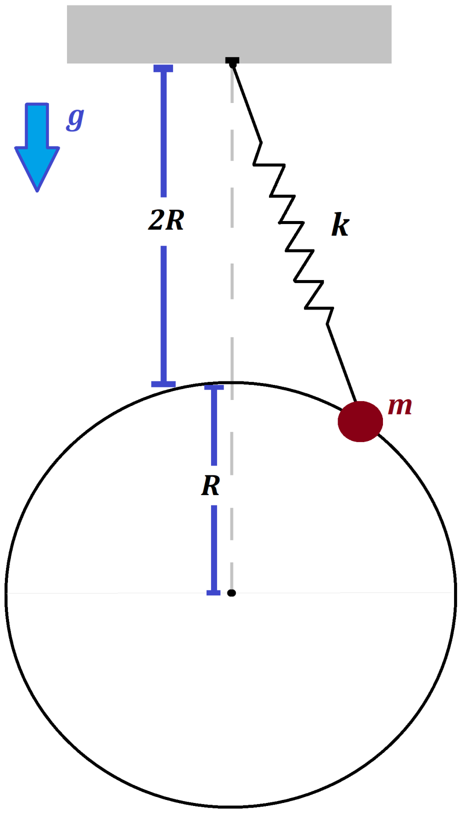
22/04/2022 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

Questão 1 – Formalismo langrangiano

Uma conta (esfera contendo um pequeno furo) de massa m está confinada a se mover sem atrito ao longo de um círculo de raio R. Essa conta está presa a uma mola cujo comprimento natural é R e cuja constante de mola é k. A outra extremidade da mola está presa a uma rótula localizada a uma distância de $3R$ acima do centro do círculo e presa ao teto, conforme ilustrado abaixo. A aceleração local da gravidade é g.



(a) (40%) Escolha uma coordenada generalizada conveniente e obtenha a lagrangiana da conta. Não deixe de definir bem qual será sua coordenada generalizada, faça um desenho para ilustrá-la.

(b) (30%) Obtenha uma equação de movimento para a coordenada generalizada da conta.

(c) (30%) Qual é o período das pequenas oscilações da conta em torno de um ponto de equilíbrio?

QUESTÃO 2 – FORMALISMO HAMILTONIANO

Considere que a hamiltoniana de uma partícula seja dada por

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \alpha\left[\frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right]^2,$$

onde α, m e ω são constantes, q é uma coordenada generalizada e p é seu momento canônico associado.

(a) (20%) Encontre as equações de Hamilton, ou seja, encontre equações para $\dot{p}$ e $\dot{q}$.

(b) (25%) Prove que $\Gamma = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ é uma constante de movimento.

(c) (25%) Determine a equação da trajetória no espaço de fase realizada pela partícula para as seguintes condições iniciais: $p(0) = p_0$ e $q(0) = 0$. Esboce a curva encontrada.

(d) (30%) Calcule $q = q(t)$ e $p = p(t)$ para a condição inicial do item (c). Encontre o período de oscilação da partícula.

Questão 3 – Potencial central

Considere uma partícula de massa m se movendo sob ação de uma força central cujo potencial é dado por $V(r)$, onde r é a distância da partícula à origem do sistema de coordenadas.

(a) (30%) Mostre que:

(i) o momento angular $\vec{L}$ se conserva e pode ser escrito em coordenadas polares como $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\ \hat{z}$, onde $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\theta}$.

(ii) a energia do sistema é dada por

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r),$$

onde $L = |\vec{L}|$.

(b) (20%) Usando a expressão da energia do item (a), mostre que a órbita da partícula em sua forma inversa é dada por

$$\theta(r) = \theta(r_0) + \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r^2\sqrt{E - V_e(r)}},$$

onde $V_e(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r)$. $\left[\textbf{Dica: } \dot{r} = \dfrac{dr}{d\theta}\,\dot{\theta}\right]$

Considere agora o potencial do oscilador harmônico $V(r) = \dfrac{1}{2}kr^2$, onde k é uma constante positiva:

(c) (30%) Calcule o raio da órbita circular e a energia mecânica dessa órbita.

(d) (20%) Utilizando a expressão do item (b) e o potencial harmônico, calcule a equação de uma trajetória qualquer $\theta = \theta(r)$ da partícula. Para esse cálcule, utilize

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}}\ \text{arcsen}\left(\frac{Bx + 2C}{x\sqrt{B^2 - 4AC}}\right),$$

com $C < 0$.

Questão 4 – Transformações canônicas

A função geradora de uma transformação canônica infinitesimal, $(q, p, h) \to (Q, P, H)$, é tipicamente escrita da seguinte forma:

$$F(q, P, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i \,+\, \epsilon\, G(q, P, t) \simeq \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i \,+\, \epsilon\, G(q, p, t)\,,$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal e n é o número de graus de liberdade do sistema. Na expressão acima, G é a chamada função geratriz da transformação infinitesimal e foi feito uso da seguinte aproximação: $\epsilon G(q, P, t) \simeq \epsilon G(q, p, t)$, que é justificada pelo fato de a diferença entre P e p ser de ordem linear em ϵ, de forma que a diferença entre $\epsilon G(q, P, t)$ e $\epsilon G(q, p, t)$ seria de ordem quadrática no parâmetro infinitesimal.

(a) (40%) Considerando apenas até a ordem linear em ϵ, demonstre que a transformação $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ gerada por F é sempre uma transformação canônica, qualquer que seja a função $G(q, P, t)$.

(b) (30%) Considerando $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, coordenadas cartesianas do $\mathbb{R}^3$, demonstre que a função geratriz $G = 2(x\, p_y - y\, p_x)$ gera uma rotação em torno do eixo z. Qual é a relação entre o ângulo de rotação e o parâmetro ϵ?

(c) (30%) Demonstre que o hamiltoniano $h(q, p, t)$ é o gerador da evolução temporal. Pode considerar o caso $n = 1$ para evitar o uso de índices.

Dados:

$$F = F(q, P, t) \;\Rightarrow\; p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\,, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}\,, \quad H(Q, P, t) = h(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

Rotação finita de um ângulo θ em torno de $\hat{e}_z$ em um vetor $\vec{V}$:

$$V_x \to \cos\theta\, V_x \,-\, \mathrm{sen}\theta V_y\,, \quad V_y \to \cos\theta\, V_y \,+\, \mathrm{sen}\theta V_x\,, \quad V_z \to V_z\,.$$