

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2021

**Mecânica Clássica**

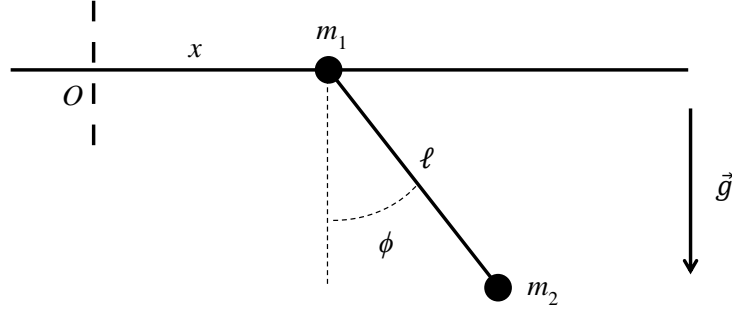
27/05/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

**QUESTÃO 1 – MECÂNICA LAGRANGEANA**

A figura abaixo ilustra um pêndulo com uma partícula de massa  $m_2$  fixada na extremidade de um fio ideal de comprimento  $\ell$ . A outra extremidade do fio está presa a uma partícula de massa  $m_1$ , que pode se movimentar livremente ao longo do eixo  $x$  horizontal. A aceleração da gravidade é denotada por  $\vec{g}$ .

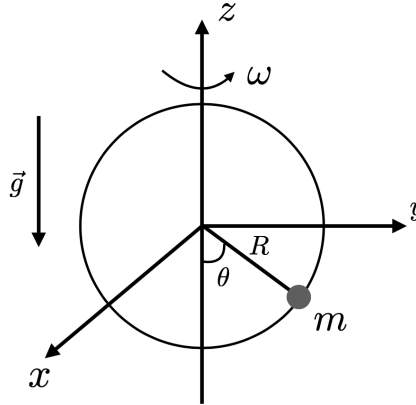


Considerando as coordenadas generalizadas  $x$  (posição da partícula  $m_1$  em relação à origem  $O$  do sistema de coordenadas) e  $\phi$  (desvio angular do pêndulo em relação à vertical), determine:

- (a) (30%) a lagrangeana do sistema formado pelas duas partículas;
- (b) (30%) as equações de movimento para as coordenadas  $x$  e  $\phi$  (não resolva as equações encontradas);
- (c) (20%) o momento conjugado associado a cada coordenada do item (b).
- (d) (20%) Considere, agora, que  $m_2 \ll m_1$ . Para oscilações da partícula  $m_2$  com pequenos ângulos  $\phi$ , tal que  $\sin\phi \approx \phi$  e  $\cos\phi \approx 1$ , e também com  $|\phi\dot{\phi}^2| \ll |\ddot{\phi}|$ , onde  $\dot{\phi} \equiv d\phi/dt$ , o sistema se comporta como um pêndulo simples de massa  $m_2$  e comprimento  $\ell$ , cujo ponto de suporte (partícula  $m_1$ ) se movimenta com velocidade constante ao longo do eixo  $x$ . Partindo de resultado do item (b), obtenha as equações para  $x$  e  $\phi$  nessa situação (sem resolvê-las). Determine a frequência de pequenas oscilações de  $\phi$ .

**QUESTÃO 2 – MECÂNICA HAMILTONIANA**

A figura abaixo mostra uma conta (uma pequena esfera com um furo central) de massa  $m$  que pode se mover livremente ao longo de um aro de raio  $R$  e massa desprezível. O aro, por sua vez, gira com frequência angular  $\omega$  constante ao redor do eixo vertical  $z$ . Seja  $\theta$  o ângulo que o vetor posição da conta faz com a direção vertical (ver figura). A aceleração da gravidade é denotada por  $\vec{g}$ .



- (a) (20%) Calcule a lagrangeana  $L(\theta, \dot{\theta})$  da partícula.
- (b) (20%) Através de uma transformação de Legendre, mostre que a hamiltoniana do sistema pode ser escrita em função de  $\theta$  e do seu momento conjugado  $p$  na forma:

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2\theta}{2} - mgR \cos\theta.$$

- (c) (20%) Partindo das equações de Hamilton, obtenha as equações de movimento do sistema (sem resolvê-las).
- (d) (20%) Se  $p$  for constante, mostre que  $\theta = \arccos(g/R\omega^2)$ . Neste caso, determine o valor de  $\theta$  para frequências angulares  $\omega$  muito baixas e muito altas. Interprete fisicamente os resultados obtidos.
- (e) (20%) É possível afirmar que a hamiltoniana do item (b) corresponde à energia total do sistema? Justifique sua resposta.

**QUESTÃO 3 – POTENCIAL CENTRAL**

Uma partícula de massa  $m$  move-se em um plano sob a ação de um potencial de força central  $V(r) = -k/(\beta r^\beta)$ , onde  $k > 0$  e  $\beta$  são constantes. Considere que o momento angular  $L$  da partícula não é nulo.

- (a) (20%) Escreva a lagrangeana da partícula no plano. Encontre as equações de movimento da partícula (sem resolvê-las) e mostre que o seu momento angular  $L$  se conserva.
- (b) (10%) Determine a energia total da partícula em termos de  $r$ ,  $\dot{r}$  ( $\equiv dr/dt$ ),  $m$ ,  $k$ ,  $\beta$  e  $L$ . Identifique os termos de energia cinética (dependente de  $\dot{r}$ ) e do potencial efetivo  $V_{ef}$  (dependente de  $r$ ).
- (c) (40%) Esboce o gráfico do potencial efetivo  $V_{ef}$  em função de  $r$  para os seguintes casos: (i)  $\beta < 0$ ; (ii)  $0 < \beta < 2$ ; (iii)  $\beta > 2$ . Discuta para que casos há órbitas ligadas e órbitas circulares estáveis.
- (d) (15%) Para os casos permitidos no item (c), calcule o raio  $r_0$  da órbita circular estável em termos  $m$ ,  $k$ ,  $\beta$  e  $L$ .
- (e) (15%) Considere os casos no item (c) que permitem órbita circular estável. Seja  $r = r_0 + \delta r$ . Obtenha a equação de movimento (sem resolver) para os desvios radiais  $\delta r$  na situação em que  $|\delta r| \ll r_0$ . Encontre a frequência de pequenas oscilações de  $r$  em torno de  $r_0$ .

**QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS**

- (a) (30%) Considere a função geradora

$$F_1(q, Q, t) = \frac{(q - Q)^2}{4t}.$$

Encontre a transformação canônica gerada por  $F_1$ , isto é, expresse as variáveis  $Q$  e  $P$  em termos de  $q$ ,  $p$  e  $t$ .

- (b) (40%) Considere agora a hamiltoniana  $H = p^2$ . Encontre a hamiltoniana transformada  $K(Q, P, t)$ . Interprete o seu resultado.
- (c) (30%) Resolva as equações de Hamilton para as variáveis  $Q$  e  $P$ . A partir da sua solução, encontre  $q$  e  $p$ . Comente sobre os resultados obtidos.