

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2023

**Mecânica Quântica**

03/08/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

**QUESTÃO 1 – POÇO ESFÉRICO: A ESTRUTURA DO DÊUTERON**

O dêuteron corresponde a um estado ligado entre um próton e um nêutron. Em uma primeira aproximação simplificada, ele pode ser descrito como consistindo em um poço esférico com profundidade  $V_0 > 0$  e largura  $a$ . A equação radial de Schroedinger correspondente é

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R = (E + V_0) R, \quad \text{para } r < a, \quad (1)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R = ER, \quad \text{para } r > a, \quad (2)$$

onde  $-V_0 \leq E \leq 0$  é a energia de um estado ligado e  $\mu$  a massa reduzida do dêuteron. Existe um estado ligado *esfericamente simétrico*, com energia  $E \approx -2.2 \text{ MeV}$ , cuja função de onda se anula para  $r \rightarrow 0$ .

- (a) (25%) Fazendo a substituição  $R(r) = u(r)/r$ , determine a forma de  $u(r)$ , a solução esfericamente simétrica fisicamente aceitável dentro do poço (você não precisa calcular a constante de normalização).
- (b) (25%) Repita o tratamento do item anterior, mas agora para a região fora do poço (você não precisa calcular a constante de normalização).
- (c) (20%) Escreva uma equação para os autovalores da energia, após impor a continuidade das derivadas logarítmicas de  $u(r)$  [isto é, da razão  $u'(r)/u(r)$ ], na interface  $r = a$ .
- (d) (30%) Resolva a equação dos autovalores da energia no limite  $E \rightarrow 0$  e determine o valor da quantidade adimensional  $\sqrt{2\mu V_0}/\hbar^2 a$ . Considere  $a \simeq 10^{-15} \text{ m}$  e use o fato de que  $\hbar^2 \pi^2 / 8\mu \simeq 10^{-28} \text{ MeV} \cdot \text{m}^2$ , para estimar o valor de  $V_0$ , de modo a compará-lo com o de  $|E|$ .

**QUESTÃO 2 – DINÂMICA QUÂNTICA: EFEITO ZENÃO QUÂNTICO**

Considere um sistema de dois níveis que apresenta dois estados identificados como “frio” e “quente”,

$$|\psi_{frio}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi_{quente}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A observação do estado em que o sistema se encontra corresponde à medida do observável  $\sigma_z$ , que tem como resultados possíveis  $+1$  para o estado “frio” e  $-1$  para o estado “quente”. O sistema, que é preparado de tal forma que no instante  $t = 0$  se encontre no estado  $|\psi_{frio}\rangle$ , obedece à evolução temporal unitária

$$\hat{U}(t + \Delta t, t) \equiv U(\Delta t) = \begin{pmatrix} \cos(\nu\Delta t/2) & -\sin(\nu\Delta t/2) \\ \sin(\nu\Delta t/2) & \cos(\nu\Delta t/2) \end{pmatrix},$$

de modo que pode passar do estado “frio” para o estado “quente” em um instante posterior.

- (a) (20%) Suponha que nenhuma medida é realizada no sistema. Em que instante de tempo  $t_B$  o sistema se encontrará no estado “quente” pela primeira vez?
- (b) (30%) Uma medida do observável  $\sigma_z$  no instante  $t = t_B/2$  encontra o sistema no estado  $|\psi_{frio}\rangle$ . Se uma medida subsequente é feita no instante  $t = t_B$ , especifique as probabilidades dos resultados possíveis de serem obtidos.
- (c) (25%) Suponha que o sistema é observado  $N$  vezes sucessivas, nos instantes  $t_1 = t_B/N$ ,  $t_2 = 2t_B/N$ , ..., e  $t_N = t_B$ . Encontre a probabilidade  $P_N$  de que todas as medidas encontrem o sistema no estado “frio”.
- (d) (25%) Para o caso em que  $N \gg 1$ , encontre uma aproximação para  $P_N$ , em primeira ordem em  $N$ . Expresse essa probabilidade em termos do intervalo de tempo  $\Delta t = t_B/N$ , e encontre seu valor no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , isto é, no caso em que o sistema é observado continuamente. Interprete o resultado.

**QUESTÃO 3 – MOMENTO ANGULAR E ROTAÇÕES**

O operador momento angular orbital  $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$  é definido pela relação  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}$ , onde  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e  $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$  são, respectivamente, os operadores de posição e momento linear, em três dimensões.

- (a) (30%) Determine explicitamente as componentes de  $\hat{\mathbf{L}}$  em termos de operadores de posição e de momento linear. Calcule o comutador  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$  e comente o resultado.
- (b) (40%) Obtenha o ket resultante da ação do operador  $\hat{R}_z(\delta\varphi) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{L}_z$ , onde  $\hat{I}$  é o operador identidade e  $\delta\varphi \ll 1$ , sobre um autoestado de posição  $|\vec{r}\rangle = |x, y, z\rangle$ . Qual é o significado físico da resposta obtida?
- (c) (30%) Calcule o comutador  $[\hat{R}_x(\delta\varphi), \hat{R}_y(\delta\varphi)]$  e interprete o resultado. Os operadores  $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_y$  são definidos de maneira análoga ao operador  $\hat{R}_z$ .

Dado: O operador de translações infinitesimais é definido por  $\left(\hat{I} - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{P}}\right)|\vec{r}\rangle = |\vec{r} + \delta\vec{a}\rangle$ , onde  $\delta\vec{a}$  é um vetor infinitesimal com dimensão de comprimento.

**QUESTÃO 4 – PARTÍCULAS INDISTINGUÍVEIS**

Duas partículas indistinguíveis, A e B, se encontram ligadas a um *mesmo* potencial harmônico, cujos autoestados são denotados por  $|n\rangle$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . O estado global do sistema é denotado por  $|\Phi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_{AB}|\chi\rangle_{AB}$ , onde  $\psi$  é o estado associado ao oscilador e  $\chi$  se refere ao estado de spin.

- (a) (25%) Supondo que A e B têm spin 1 e que  $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle_A|n'\rangle_B - |n'\rangle_A|n\rangle_B)$ ,  $n \neq n'$ , determine todos os possíveis estados de spin  $|\chi\rangle_{AB}$  do sistema composto.
- (b) (35%) Considere ainda que A e B têm spin 1. Supondo  $|\psi\rangle_{AB} = |n\rangle_A|n\rangle_B$ , determine todos os possíveis estados de spin  $|\chi\rangle_{AB}$  do sistema composto.
- (c) (40%) Suponha agora que A e B são elétrons e que a energia total do sistema é  $E_{AB} = h\nu(3 + 1)$ , onde  $\nu$  é a frequência do oscilador harmônico e  $h$  é a constante de Planck. Escreva todos os possíveis estados globais  $|\Phi\rangle_{AB}$  do sistema composto.