

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2023

Mecânica Clássica

04/08/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – LANÇAMENTO OBLÍQUO

No instante $t = 0$, uma bolinha de massa m é arremessada obliquamente a partir de um ponto no solo, tomado como a origem de um sistema de coordenadas, ver Figura 1. Admita que a sua velocidade inicial é $\vec{v}_0 = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$ e que o módulo da aceleração da gravidade é g .

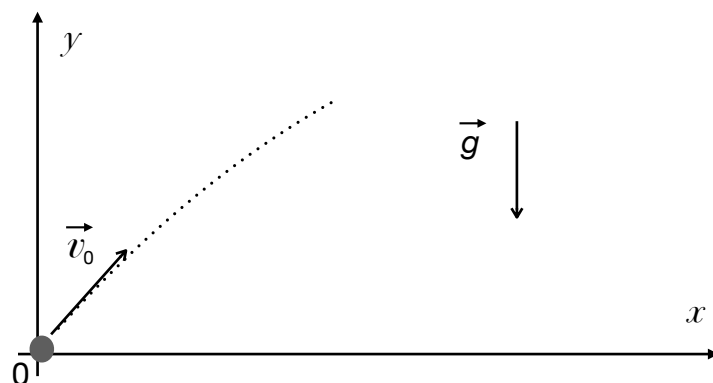


Figura 1

- (a) (20%) Desprezando a resistência do ar, determine as funções horárias $x(t)$ e $y(t)$ e a equação da trajetória $y(x)$.
- (b) (50%) Suponha agora que a resistência do ar é dada por uma força do tipo $\vec{f} = -\gamma m \vec{v}$, onde \vec{v} é a velocidade instantânea da bolinha e γ é uma constante positiva. Determine as funções horárias $x(t)$ e $y(t)$ e a equação da trajetória $y(x)$.
- (c) (30%) Partindo do resultado do item (b) e supondo que γ tem valor suficientemente pequeno, determine a correção de ordem mais baixa para a equação da parábola obtida no item (a).

Dado:
$$\ln(1 \pm a) = \pm a - \frac{a^2}{2} \pm \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \pm \dots \quad 0 \leq a < 1.$$

QUESTÃO 2 – PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Considere uma partícula de massa m que se move em um potencial central $V(r)$, onde r é a distância radial da partícula até o centro do sistema de coordenadas.

- (a) (30%) Escreva a lagrangiana do sistema usando o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , onde θ é o ângulo polar e ϕ o ângulo azimutal.
- (b) (20%) Mostre que a trajetória da partícula fica restrita a um plano no espaço tridimensional.
- (c) (30%) Usando leis de conservação, mostre que as equações de movimento podem ser reduzidas a um par de equações de *primeira* ordem para $\phi(t)$ e $r(t)$. Escreva essas equações.
- (d) (20%) Encontre uma expressão integral para $\phi(r) = \int dr f(r)$, isto é, encontre a função $f(r)$.

QUESTÃO 3 – EQUAÇÕES DE HAMILTON E OSCILADOR ANARMÔNICO

Considere um oscilador, com energia mecânica total E , descrito pela hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^4.$$

- (a) (20%) Escreva as equações de movimento de Hamilton e obtenha a equação de segunda ordem satisfeita pela coordenada q .
- (b) (50%) Usando a conservação da energia e o resultado anterior, obtenha a equação de primeira ordem satisfeita pela velocidade $v = \dot{q}$.
- (c) (30%) Integrando a equação do item (b), mostre que o período de oscilação, T , depende da energia de acordo com $T = \text{const} \cdot E^\alpha$ e determine o valor de α .
Dica: Integre entre $v = v_{\max}$ ($t = 0$) e $v = 0$ ($t = T/4$).

QUESTÃO 4 – LEIS DE CONSERVAÇÃO

Considere a hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + b Q_2^2 + a Q_1^2 + c P_1 Q_1 + d P_2 Q_2 , \quad (1)$$

onde a , b , c , e d são constantes.

- (a) (20%) Escreva as equações de Hamilton para o sistema.
- (b) (30%) Mostre que a função $G(Q_i, P_i)$ é uma constante de movimento se, e somente se, os parênteses de Poisson com a hamiltoniana se anulam,

$$\{H, G\} = 0 . \quad (2)$$

- (c) (25%) Quais são as condições sobre a , b , c e d para que

$$G = P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \quad (3)$$

seja uma constante de movimento?

- (d) (25%) Faça $b = d = 0$, e encontre a lagrangiana do sistema, $L(\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, Q_1, Q_2)$. Nesse caso, há alguma coordenada cíclica?