

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2023

Mecânica Quântica

09/03/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

Considere uma partícula restrita a se mover livremente em uma única direção x e cuja função de onda $\psi(x)$ tem a forma de um pacote de onda Gaussiano

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}} \exp \left[ikx - \frac{x^2}{2d^2} \right],$$

onde k e d são constantes. Considere ainda a dispersão $\langle \Delta A^2 \rangle$ de um operador A definida a partir de $\Delta A = A - \langle A \rangle$, com $\langle \dots \rangle$ indicando o valor esperado do operador.

- (a) (10%) Interprete fisicamente k e d .
- (b) (30%) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.
- (c) (10%) Obtenha a dispersão em x .
- (d) (30%) Calcule $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$.
- (e) (10%) Obtenha a dispersão em p .
- (f) (10%) A partir de (c) e (e), deduza a relação de incerteza entre x e p .

Dados:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2 e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

QUESTÃO 2 – SISTEMA DE DOIS NÍVEIS

Considere um sistema de dois níveis sob ação de um campo magnético externo de módulo B . O hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega}{2} + \mu B & 0 \\ 0 & +\frac{\hbar\omega}{2} - \mu B \end{pmatrix},$$

com auto-estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$ e as respectivas auto-energias E_a e E_b .

- a) (20%) Considere que B cresce lentamente de zero até o valor máximo $\hbar\omega/\mu$ e esboce o gráfico da variação de E_a e E_b como função de B .
- b) (50%) Considere agora que uma perturbação é ligada, de modo que o novo hamiltoniano do sistema passa a ser

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega}{2} + \mu B & \hbar g \\ \hbar g^* & +\frac{\hbar\omega}{2} - \mu B \end{pmatrix},$$

onde g é a constante de acoplamento entre os estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$. Encontre os autovetores $|a'\rangle$ e $|b'\rangle$ e os autovalores E'_a e E'_b de \hat{H}' .

- c) (20%) Considere novamente que B cresce lentamente de zero até o valor máximo $\hbar\omega/\mu$ e esboce o gráfico da variação de E'_a e E'_b como função de B .
- d) (10%) Interprete fisicamente as diferenças encontradas entre os resultados dos itens (a) e (c).

QUESTÃO 3 – POTENCIAIS CENTRAIS E MOMENTO ANGULAR

Uma partícula de massa M sem spin se encontra em um potencial esfericamente simétrico, $V = V(r)$, onde $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, sendo \mathbf{r} o operador posição.

- (a) (30%) Calcule $[\mathbf{L}, p^2]$ e $[\mathbf{L}, r^2]$, onde \mathbf{p} é o operador momento linear da partícula, $p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ e $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é o operador momento angular orbital. A partir disso, determine o comutador de \mathbf{L} com o hamiltoniano \mathcal{H} do sistema.
- (b) (20%) Use as relações de comutação do operador momento angular $[L_j, L_k] = i\hbar \sum_l \varepsilon_{jkl} L_l$ para determinar $[\mathbf{L}^2, L_z]$.
- (c) (30%) Utilize a identidade $\mathbf{L}^2 = r^2 p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$, para mostrar que a equação de Schroedinger é separável em uma equação de autovalores para \mathbf{L}^2 , com harmônicos esféricos como autofunções, e uma equação diferencial radial para uma função $R_{E,l}(r)$. Em particular, verifique que $R_{E,l}(r)$ depende da energia E do sistema e do número quântico orbital l , mas independe do autovalor m de L_z .
- (d) (20%) Considere $E < 0$ e potenciais em que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) \rightarrow 0$. Determine as dependências radiais de $R_{E,l}$ em (I) $r \rightarrow 0$ e (II) $r \rightarrow \infty$.

Dados:

$$[x_j, p_k] = i\hbar \delta_{jk}, \quad [S, TU] = [S, T]U + T[S, U], \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \sum_{l,m} \varepsilon_{klm} a_l b_m,$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ &- \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \phi)$$

QUESTÃO 4 – OSCILADOR HARMÔNICO E TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

Considere um oscilador harmônico simples, com frequência angular ω e hamiltoniano

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

(a) (20%) Utilize os operadores destruição e criação, a e a^\dagger , onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{b} + i \frac{bp}{\hbar} \right) \quad \text{com} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

para obter as autoenergias em termos do número de ocupação n do estado $|n\rangle$.

(b) (30%) Mostre que as autofunções normalizadas deste sistema são dadas por:

$$\psi_n^{(0)} = \left(\frac{1}{\pi b^2} \right)^{1/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{2b^2}}}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{x}{b} \right),$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $H_n(z)$ são os *polinômios de Hermite*.

Agora, suponha que uma pequena perturbação $V(x) \geq 0$ é adicionada de modo que o hamiltoniano do sistema passa a ser $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V(x)$.

(c) (20%) Determine a expressão integral para as correções em primeira ordem das autoenergias do sistema em termos de

$$V_{\text{ímpar}} = \frac{V(x) + V(-x)}{2} \quad \text{e} \quad V_{\text{par}} = \frac{V(x) - V(-x)}{2}.$$

Em particular, verifique que não há contribuição de $V_{\text{ímpar}}$.

(d) (30%) Para $V(x) = \lambda e^{-\beta x^2}$ calcule a correção em primeira ordem na energia do estado fundamental, considerando que λ e β são constantes positivas.

Dados:

$$\frac{d^2 H_n}{dz^2} - 2z \frac{dH_n}{dz} + 2n H_n(z) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}, \quad H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$