

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2023

Mecânica Clássica

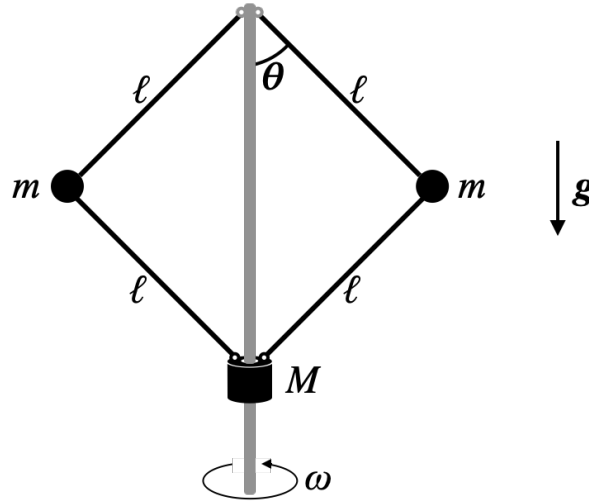
10/03/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – MECÂNICA NEWTONIANA E LAGRANGIANA

A figura abaixo ilustra um dispositivo usado em antigas máquinas a vapor para controlar a velocidade de rotação do motor. O dispositivo consiste de uma massa M , que pode deslizar sem atrito ao longo de um eixo vertical, e duas massas m idênticas, cada uma conectada ao topo do eixo e à massa M por hastes de comprimento ℓ rígidas e de massa desprezível. O dispositivo gira com velocidade angular ω constante de forma que o conjunto de massas e hastes está sempre no mesmo plano. O atrito nas articulações das extremidades das hastes é desprezível.



- (a) (30%) Esboce diagramas de corpo livre para m e M , identificando todas as forças que sobre elas atuam. Em seguida, a partir das leis de Newton e supondo que M está em sua posição vertical de equilíbrio, calcule o ângulo θ e as tensões nas 4 hastes.
- (b) (20%) Determine a lagrangiana do sistema em termos da coordenada generalizada θ .
- (c) (20%) Deduza a equação do movimento para θ e, a partir desta equação, calcule o ângulo de equilíbrio. Compare seu resultado com aquele do item (a).
- (d) (30%) Analisando sua equação na vizinhança do equilíbrio, prove que o equilíbrio é estável para todo $0 < \theta < \pi/2$.

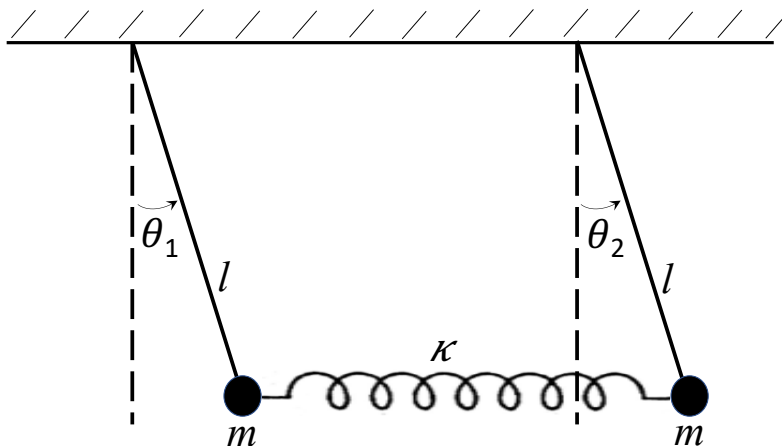
QUESTÃO 2 – FORÇA CENTRAL

Considere uma partícula de massa m se movendo em um campo de força central, com energia potencial $U(r)$, onde r é a distância radial ao centro do campo de força.

- (a) (15%) Escreva a lagrangiana do sistema em termos das coordenadas polares (r, ϕ) da partícula no plano de sua trajetória.
- (b) (25%) Calcule o momento generalizado para a coordenada ϕ e mostre que ele é constante.
- (c) (10%) Escreva a expressão, em termos de r , ϕ e suas derivadas, para a força central atuando sobre a partícula ($F = -\partial U / \partial r$).
- (d) (50%) Encontre a lei de força que leva uma partícula a se mover numa trajetória espiral logarítmica, dada por $r = ke^{\alpha\phi}$, onde k e α são constantes.

QUESTÃO 3 – OSCILADORES ACOPLADOS

Dois pêndulos de mesmo comprimento l e mesma massa m se encontram acoplados por uma mola de constante de força κ , ver figura abaixo. As hastes de comprimento l são rígidas e de massa desprezível. Considere θ_1 e θ_2 os ângulos entre as hastes e a vertical.



- (a) (30%) No limite de pequenas oscilações, escreva a lagrangiana do sistema em termos das coordenadas θ_1 , θ_2 , e suas derivadas. Despreze deformações da mola na direção vertical.
- (b) (20%) Encontre as equações de movimento do sistema.
- (c) (35%) Resolva as equações de movimento para os modos normais de oscilação do sistema.
- (d) (15%) A partir dos modos normais, obtenha as expressões para as funções $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$.

QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Considere a hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{(q^2 + p^2)^2}{4}.$$

Tomando proveito da forma funcional de $H(q, p)$, podemos definir transformações $q, p \rightarrow Q, P$ do tipo

$$\begin{aligned} q(Q, P) &= f(P) \sin Q, \\ p(Q, P) &= f(P) \cos Q, \end{aligned}$$

que tornam a nova coordenada Q cíclica em $\bar{H}(Q, P) \equiv H[q(Q, P), p(Q, P)]$. Porém, nem toda função $f(P)$ preserva a relação canônica entre P e Q .

- (a) (35%) Determine para que $f(P)$ a transformação acima é canônica.
- (b) (35%) Supondo as condições iniciais $q(t = 0) = 0$ e $H(t = 0) = E$, onde $E > 0$ é uma constante, resolva as equações de Hamilton para Q e P e determine $q(t)$ e $p(t)$.
- (c) (30%) A partir de $\bar{H}(Q, P)$, calcule a lagrangiana em termos de Q e \dot{Q} e mostre que Q também é cíclica em $\bar{L}(Q, \dot{Q})$.