

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2023

**Eletrodinâmica Clássica**

07/03/2023 - 9h00 às 12h00

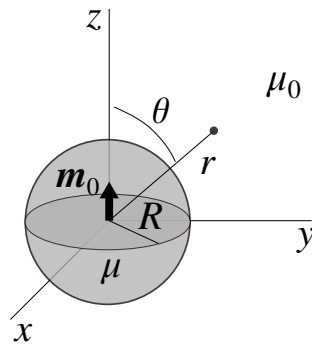
→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

**QUESTÃO 1 – MAGNETOSTÁTICA**

Um dipolo magnético puntiforme, de magnitude  $\mathbf{m}_0$ , se encontra no centro de uma esfera de raio  $R$  e permeabilidade magnética  $\mu$ , como mostra a figura. O meio externo à esfera é vácuo.

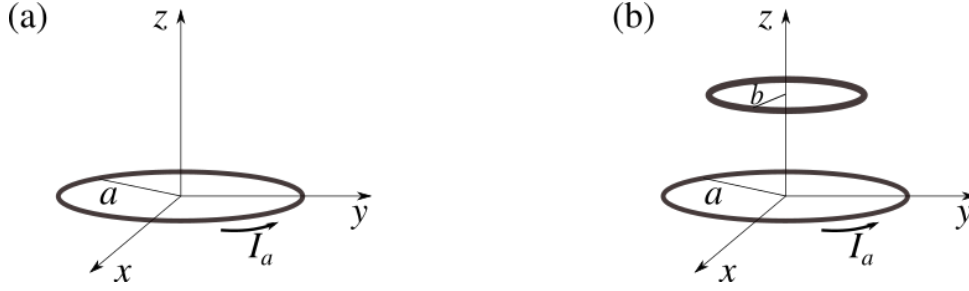
- (a) (20%) Mostre que é possível definir o potencial escalar magnético,  $\Phi$ , que satisfaz à equação de Laplace dentro e fora da esfera.
- (b) (25%) Aplique as condições de contorno apropriadas e determine as equações para os coeficientes das expansões de  $\Phi(r, \theta)$  em termos de polinômios de Legendre.
- (c) (35%) Obtenha  $\Phi(r < R, \theta)$  e  $\Phi(r > R, \theta)$ .
- (d) (20%) Calcule a magnetização da esfera.



Expresse suas respostas em termos das grandezas dadas no enunciado e das coordenadas esféricas  $(r, \theta)$ .

**QUESTÃO 2 – LEI DA INDUÇÃO DE FARADAY**

Uma espira de raio  $a$  transporta uma corrente  $I_a$  no sentido mostrado na Figura (a). Considere um sistema de coordenadas com origem no centro da espira e eixo  $z$  alinhado ao eixo de simetria da mesma [Figura (a)].



- (a) (30%) Mostre que o potencial vetor em todo o espaço devido à espira de raio  $a$  é dado por  $\mathbf{A} = A_\phi(\rho, z)\hat{\phi}$ , com

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I_a}{2} \int_0^\infty dk J_1(k\rho) J_1(ka) e^{-k|z|},$$

onde  $J_1(x)$  é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem 1,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, enquanto que  $(\rho, \phi, z)$  são coordenadas cilíndricas.

Suponha, agora, que uma segunda espira, de raio  $b$ , pode deslizar livremente ao longo do eixo  $z$ , mantendo-se coaxial à espira de raio  $a$ , que permanece fixa [ver Figura (b)].

- (b) (20%) Calcule o fluxo magnético que atravessa a espira de raio  $b$  quando esta se encontra a uma altura  $h$  da espira de raio  $a$ . Expresse sua resposta em termos de uma integral envolvendo funções de Bessel.
- (c) (25%) Obtenha a força eletromotriz e a corrente induzida na espira de raio  $b$  quando esta se move com velocidade  $v = \frac{dz}{dt}$ . Considere  $R$  a resistência elétrica desta espira. Expresse suas respostas em termos de uma integral envolvendo funções de Bessel.
- (d) (25%) Determine os sentidos da corrente induzida (vistos a partir do eixo  $z > 0$  ou esboce gráficos, se achar conveniente) nos casos (i)  $z > 0, v > 0$ , (ii)  $z > 0, v < 0$ , (iii)  $z < 0, v > 0$  e (iv)  $z < 0, v < 0$ .

**QUESTÃO 3 – POTENCIAIS E CALIBRES**

Nos itens abaixo considere um meio com permissividade elétrica  $\varepsilon_0$  e permeabilidade magnética  $\mu_0$ .

- (a) (20%) A partir das Equações de Maxwell mostre que, mesmo havendo cargas e correntes variando com o tempo, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser escritos em termos de um potencial escalar  $V$  e de um potencial vetor  $\mathbf{A}$ .
- (b) (20%) Os potenciais  $V$  e  $\mathbf{A}$  não são unicamente determinados pelas leis da eletrodinâmica, ou seja, é possível descrever a mesma situação física através de  $V' = V + v$  e  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{a}$ , desde que  $v$  e  $\mathbf{a}$  satisfaçam um vínculo apropriado. Deduza este vínculo.
- (c) (30%) Pode-se especificar unicamente os potenciais impondo-se  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (esta escolha define o calibre de Coulomb). Neste caso, escreva as Equações de Maxwell explicitamente em termos de  $V$  e  $\mathbf{A}$ .
- (d) (30%) Suponha que o potencial  $V$  seja nulo em todo o espaço e para todos os instantes de tempo e que o potencial vetor seja dado por  $\mathbf{A} = \alpha(t) [\cos(y/\lambda), \cos(x/\lambda), 0]$ . Determine  $\alpha(t)$  de modo que  $\mathbf{J} = \mathbf{A}/(2\mu_0 \lambda^2)$ . Use  $\alpha(0) = \alpha_0$  e  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

**QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS**

Considere uma onda eletromagnética se propagando no vácuo. O sistema de coordenadas adotado é tal que a propagação se dá ao longo do eixo  $z$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B}e^{i(kz - \omega t)}$$

- (a) (20%) Usando as equações de Maxwell mostre que a onda é transversal, ou seja, que os vetores  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  estão restritos ao plano  $x$ - $y$ .
- (b) (30%) Mostre que  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  são ortogonais e expresse  $\mathcal{B}$  em termos de  $\mathcal{E}$ , do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e da frequência angular  $\omega$ .
- (c) (30%) Calcule a densidade de energia associada a esta onda eletromagnética,  $u(\mathbf{r}, t)$ , e determine a sua média macroscópica  $\langle u \rangle$  (considerando um grande número de oscilações)
- (d) (20%) Se um espelho de área  $A$  é usado para inverter o sentido da propagação da onda, qual é a pressão que a radiação exerce sobre o mesmo?

### Informações que podem ser úteis

Equações de Maxwell:

$$\bullet \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \nabla \Phi &= \hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \bullet \quad \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \\ \bullet \quad \Phi &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \\ \bullet \quad \int_{-1}^1 P_{\ell}(u) P_{\ell'}(u) du &= \frac{2\delta_{\ell'\ell}}{2\ell+1} \end{aligned}$$

Função de Green (coordenadas cilíndricas):

$$\bullet \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z_{>} - z_{<})},$$

onde  $J_m(x)$  é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $m$ ,  $(\rho, \phi, z)$  são coordenadas cilíndricas e  $z_{>}(z_{<})$  é o maior (menor) dentre  $z$  e  $z'$ .

$$\bullet \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad \bullet \quad \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-n)\phi} = 2\pi \delta_{m,n}$$

Identidade do cálculo vetorial:

$$\bullet \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$