



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2020

Mecânica Quântica

28/10/2020 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NA PRESENÇA DE UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Considere uma partícula de massa m e carga q , sem spin, na presença de um campo eletromagnético.

- (a) (20%) Escreva o hamiltoniano do sistema em função dos potenciais vetorial e escalar: $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $\phi(\vec{r}, t)$.
- (b) (40%) Utilize o conceito probabilístico associado à função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ e a equação de Schrödinger, para determinar a corrente da densidade de probabilidade \vec{J} e a equação da continuidade
- (c) (40%) Através de uma transformação canônica unitária da função de onda: $\tilde{\Psi}(\vec{r}, t) = e^{iqf(\vec{r}, t)}\Psi(\vec{r}, t)$, identifique e verifique as transformações de calibre (gauge de Lorenz) que deixam a equação de Schrödinger invariante.

QUESTÃO 2 – ROTOR QUÂNTICO COM DIPOLO ELÉTRICO NA PRESENÇA DE UM CAMPO ELÉTRICO

Considere um rotor quântico planar com momento de inércia I em torno do eixo de rotação e dipolo elétrico \vec{p} . O plano de rotação é identificado com o plano (x, y) .

- (a) (20%) Escreva o hamiltoniano do sistema.
- (b) (30%) Determine as autofunções e os autovalores.
- (c) (50%) Agora, considere a presença de um campo elétrico, estático e fraco, \vec{E} , no plano (x, y) . Use teoria de perturbação até segunda ordem para determinar as correções para a energia do sistema.

QUESTÃO 3 – MOMENTO ANGULAR

Considere uma partícula sem spin representada pela função de onda

$$\psi(x, y, z) = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde K e α são constantes reais.

- (a) (20%) Qual é o momento angular total da partícula?
 - (b) (30%) Qual é o valor esperado da componente z do momento angular?
 - (c) (30%) Se a componente- z do momento angular, L_z for medida, qual é a probabilidade de que o resultado seja $L_z = +\hbar$?
 - (d) (20%) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula no ângulo sólido $d\Omega$ em θ, ϕ , onde θ e ϕ são os ângulos usuais das coordenadas esféricas?
-

Dados:

Primeiros harmônicos esféricos:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}.$$

QUESTÃO 4 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO

Um átomo tem um núcleo de carga Z e um elétron (massa m_e). O núcleo tem um raio R , dentro do qual a carga (prótons) está uniformemente distribuída. Queremos estudar o efeito de tamanho finito do núcleo sobre os níveis de energia do elétron:

- (a) (50%) Calcule o potencial levando em consideração o tamanho finito do núcleo.
- (b) (50%) Use teoria de perturbação de primeira ordem para determinar a variação na energia do estado $1s$ devido ao tamanho finito do núcleo. Aproxime a função de onda considerando que R é muito menor que o raio de Bohr a_0 .

Dados:

$$\Psi_{1s} = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\exp(-Zr/a_0)\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2},$$

$$a_0 = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / (e^2 m_e).$$