



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2020

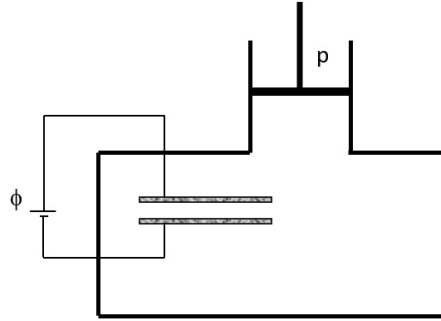
Mecânica Estatística

27/10/2020 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – RELAÇÕES DE MAXWELL

Considere um capacitor de placas paralelas, fixas, mergulhado inteiramente num líquido isotrópico de volume V e permissividade ϵ_r que depende da pressão p , e da temperatura T , $\epsilon_r(p, T)$. O sistema pode receber do meio exterior calor, Q , trabalho mecânico, W_m , e trabalho elétrico, W_e . Uma bateria ligada às placas pode controlar uma tensão ϕ (energia/unidade carga) entre as placas do capacitor e um pistão permite controlar a pressão p do líquido. Lembrando que a carga do capacitor é dada por $q = \epsilon_r C_o \phi$, onde C_o é a capacitância no vácuo.



- (a) (30%) Uma variação infinitesimal da energia interna interna, dU , está relacionada às trocas infinitesimais com o exterior, acima mencionadas. Obtenha uma expressão para dU , identificando as variáveis intensivas e suas respectivas relações com U . Em seguida obtenha dG , onde $G(T, p, \phi)$ é uma função de estado mais adaptada ao estudo experimental do sistema.
- (b) (40%) Verifica-se que um aumento pressão, a T e ϕ constantes, provoca um aumento de ϵ_r . Mostre que desse fato se pode concluir que um aumento da tensão ϕ , a T e p constantes, provoca uma diminuição de volume do dielétrico. Em seguida estime a variação volume ΔV para $C_o = 1$ pF; $\phi = 10$ kV e $\left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial p}\right)_{T, \phi} = 2.0 \times 10^{-9}$.
- (c) (30%) O calor recebido pelo sistema numa transformação reversível é dada por $dQ = B_1 dT + B_2 dp + B_3 d\phi$. Relacione os coeficientes B_{123} com a entropia S do sistema. Em seguida mostre que um aumento da tensão nas placas do capacitor, a S e p constantes, provoca um aumento da temperatura do sistema sabendo que $\left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial p}\right)_{T, \phi} < 0$

QUESTÃO 2 – FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ESTATÍSTICA

Num modelo de sólido supomos que cada um dos N átomos idênticos do cristal oscila em torno de sua posição de equilíbrio. Cada um deles pode ser considerado equivalente a três osciladores 1D, independentes, de massa m , colocados num potencial $Ep_0(x)$, vibrando com frequência ω .

- (a) (20%) Calcule o número médio de osciladores cuja posição se encontra entre x e $x+dx$.
- (b) (40%) Considere x_0^2 o deslocamento quadrático médio em torno do equilíbrio quando o sólido se funde, o que ocorre quando $x_0 = \gamma d$, onde d é a distância de equilíbrio entre os átomos e $\gamma \ll 1$. Estime a temperatura de fusão de um sólido para, $d = \frac{10}{3} \times 10^{-10} \text{m}$; $m = 1.0 \times 10^{-25} \text{ Kg}$; $\gamma = 0.03$, e $\frac{\hbar\omega}{k_B} = 300 \text{ K}$?
- (c) (30%) A uma temperatura elevada a capacidade calorífica dos sólidos apresentam um crescimento linear em função da temperatura, antes de atingir o resultado esperado pela lei de Dulong Petit. Uma das causas desse comportamento pode ser atribuída às vibrações não harmônicas. Nesta caso a energia potencial pode ser considerada como sendo $Ep_0(x) - fx^4$, e $fx^4 \ll K_B T$. Calcule a energia interna U e a capacidade calorífica C_V levando em conta essa correção.

Dados:

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2}$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2\alpha} I_n$$

$$k_B \approx 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\hbar \approx 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

QUESTÃO 3 – FUNÇÃO DE PARTIÇÃO DE SPINS NÃO INTERAGENTES

Considere uma rede rígida de átomos a uma temperatura T , cujas interações são negligenciáveis, sob um campo magnético \mathbf{H} . Os átomos têm spins $1/2$. Estes spins têm dois estados com energias $-\mu_0 H$ e $+\mu_0 H$, para spins up e down respectivamente.

- (a) (10 %) Determine a função de partição canônica \mathbb{Z} para este sistema.
 - (b) (30 %) Partindo da primeira lei da termodinâmica incluindo os efeitos da aplicação de um campo magnético no sistema ($dE = TdS - pdV - MdB$) e da energia livre de Helmholtz, determine uma expressão para a magnetização, M , dependente da função de partição, e depois, calcule a magnetização associada com o item (a).
 - (c) (30 %) Partindo da expressão $S = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)$ com p_i representando a probabilidade de ocupar um estado i com energia E_i numa temperatura T , calcule a entropia do sistema usando a função de partição \mathbb{Z} .
 - (d) (30 %) Supondo que $\mu_0 H \ll k_B T$ (campo magnético baixo), esboce um gráfico do comportamento da magnetização em função da temperatura (M vs T).
-

QUESTÃO 4 – ESTATÍSTICAS DE MAXWELL-BOLTZMANN, FERMI-DIRAC E BOSE-EINSTEIN

Considere um sistema de duas partículas, cada uma das quais pode ocupar um dos três níveis possíveis com energias 0 , ϵ , 2ϵ . O nível mais baixo de energia tem uma dupla degeneração. O sistema se encontra em equilíbrio térmico com temperatura T .

- (a) (20%) Calcule a função de partição supondo que as partículas obedeçam à estatística de Maxwell-Boltzmann. Em seguida calcule a energia média associada ao sistema.
 - (b) (30%) Considere agora que o sistema obedeça à estatística de Fermi-Dirac. Calcule a energia média e compare com a do item (a). Comente o resultado.
 - (c) (30%) Considere agora que o sistema obedeça à estatística de Bose-Einstein, Calcule a energia média e compare com os itens anteriores. Comentar o resultado.
 - (d) (20%) Finalmente, para os três casos acima, calcule a energia média para $\epsilon \gg k_B T$ e compare os resultados.
-