



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2020

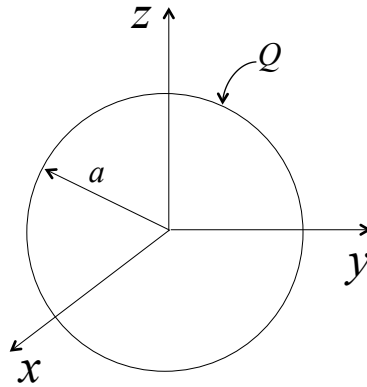
Eletrodinâmica Clássica

03/03/2020 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – ELETROSTÁTICA E MAGNETOSTÁTICA

Uma casca esférica com raio a possui uma carga Q uniformemente distribuída em sua superfície e se encontra em repouso no sistema de coordenadas cartesianas xyz mostrado na figura abaixo.



- (a) (40%) Resolva a equação de Laplace em coordenadas esféricas (r, θ, φ) para determinar o potencial elétrico Φ_E dentro e fora da casca. A partir do potencial elétrico determine o campo elétrico nestas mesmas duas regiões. Considere θ como o ângulo medido em relação ao eixo z .
- (b) (10%) Considere agora que a casca gira em torno do eixo z com velocidade angular constante ω . Mostre que a densidade superficial de corrente é dada por:

$$\vec{\kappa}(\theta) = \frac{Q}{4\pi a} \omega \sin\theta \hat{\varphi}.$$

- (c) (50%) Determine o potencial escalar magnético Φ_M dentro e fora da casca e o campo magnético nestas mesmas duas regiões

QUESTÃO 2 - MEIOS DIELÉTRICOS: MÉTODO DAS IMAGENS

Uma interface plana separa dois meios dielétricos com permissividades dielétricas ε_1 e ε_2 . Considere inicialmente o caso em que uma carga pontual $+q$ é colocada no meio ε_1 a uma distância d da interface, conforme mostra a Figura 1.

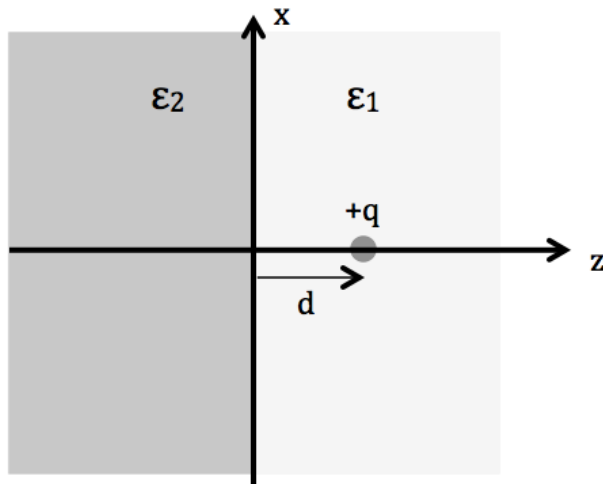


Figura 1

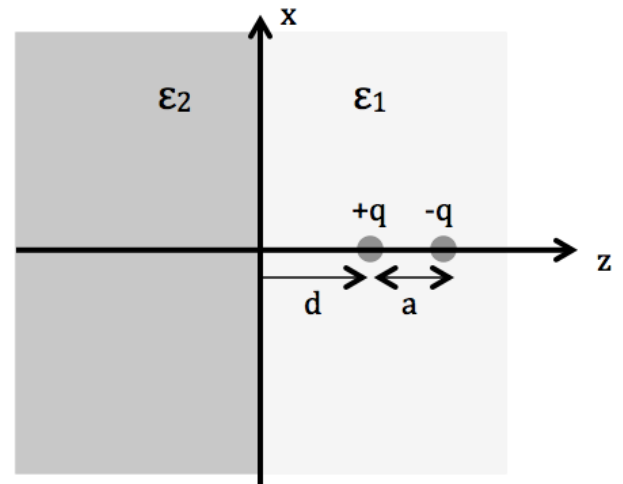
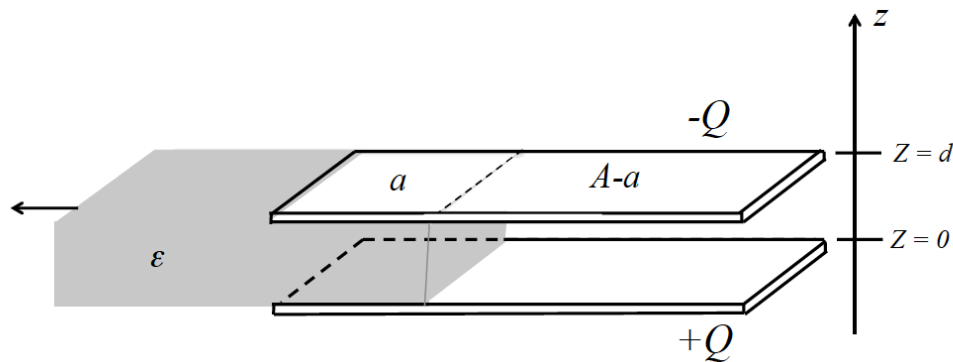


Figura 2

- (a) (30%) Para a situação descrita na figura 1, determine os valores das cargas imagem e onde elas devem ser colocadas para que as condições de contorno para os campos sejam satisfeitas.
- (b) (20%) Na situação do item (a), determine o potencial nas regiões ($z > 0$) e ($z < 0$). Expresse sua resposta em termos das coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , com $z = 0$ sendo o plano da interface.
- (c) (25%) Considere agora que uma segunda carga pontual $-q$ é colocada a uma distância $z = d + a$ da interface, conforme mostrado na Figura 2. Determine o potencial nas regiões ($z < 0$) e ($z > 0$) neste caso.
- (d) (25%) Nessa situação obtenha o potencial no limite em que $a \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$, com $p = aq$ sendo mantido fixo. Analise fisicamente sua resposta para os casos $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$.

QUESTÃO 3 – ENERGIA ELETROSTÁTICA

Um capacitor possui placas com mesma área A paralelas ao plano xy . As placas são isoladas, carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$ uniformemente distribuídas, e estão localizadas em $z = 0$ e $z = d$, respectivamente. O interior do capacitor é inicialmente preenchido com um material dielétrico de constante dielétrica ε . Despreze efeitos de borda.



- (a) (20%) Obtenha a polarização \vec{P} no dielétrico e as densidades de carga (volumétrica e superficial) induzidas.
- (b) (40%) Um agente externo atua para remover o material dielétrico do interior do capacitor. Para a configuração mostrada na figura, na qual o dielétrico preenche apenas uma região de área a , obtenha as densidades superficiais de carga nas placas do capacitor nas regiões com e sem dielétrico.
- (c) (40%) Determine o trabalho total efetuado pelo agente externo para a completa remoção do dielétrico do interior do capacitor.

QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Considere uma onda eletromagnética no espaço livre da forma:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t},$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0 e^{ikz - i\omega t},$$

onde \vec{E}_0 e \vec{B}_0 estão no plano xy .

- (a) (20%) Partindo das equações de Maxwell, ache a relação entre k e ω e entre \vec{E}_0 e \vec{B}_0 .
- (b) (40%) Mostre que quando esta onda incide normalmente em um meio condutor linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ϵ , permeabilidade magnética μ e condutividade σ , o vetor de onda no meio pode ser escrito como um número complexo. Determine k em termos de ϵ , μ , σ e ω .
- (c) (40%) Determine a variação na fase do vetor campo elétrico da onda refletida na superfície de um condutor. Considere o índice de refração do meio incidente igual a n e do meio condutor, $n_c = n(1 + i\beta)$, onde n e β são reais. Escreva o deslocamento de fase em função de β .

Informações Auxiliares

Identidades Vetoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \Phi \times \vec{A} + \Phi \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

Teoremas da divergência e de Stokes

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, d^3x = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} \, da, \quad \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \, da = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

Equações de Maxwell em meios materiais

Forma diferencial

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_f, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

onde $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$. Em meios lineares: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Forma integral

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, da &= Q_{env}, & \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da &= 0. \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot \hat{n} \, da, & \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_{env} + \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot \hat{n} \, da. \end{aligned}$$

Solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria axial

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

Gradiente em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi}.$$