Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2019

Mecânica Quântica

08/08/2019 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Fundamentos

Um feixe de $1,0 \cdot 10^{16}$ elétrons/s com energia E incide da direita para a esquerda sobre o potencial-degrau

$$V(x) = \begin{cases} 4eV, & \text{para } x < 0 \\ 0, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Considere $E = 6$ eV:

(a) **(30%)** Encontre a densidade de corrente de probabilidade nas regiões $x > 0$ e $x < 0$.

(b) **(20%)** Qual a fração do fluxo incidente que pode ser encontrada na região $x < 0$?

(c) **(10%)** Qual o fluxo de partículas refletidas na região $x > 0$?

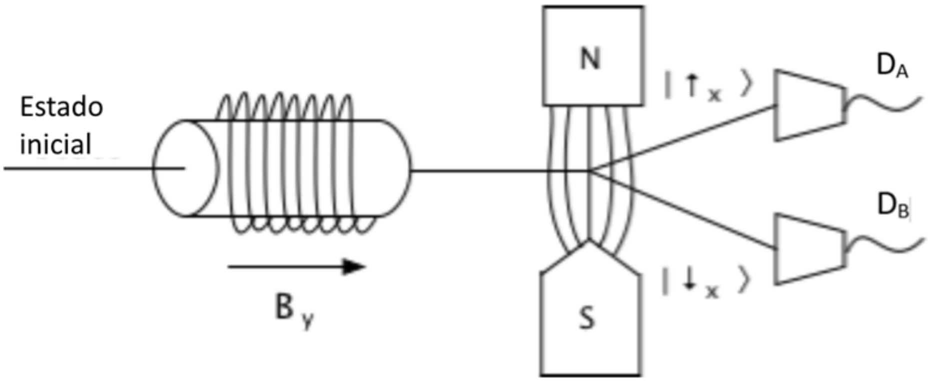
Considere agora $E = 2$ eV:

(d) **(20%)** Encontre a densidade de corrente de probabilidade nas regiões $x > 0$ e $x < 0$.

(e) **(20%)** Defina um comprimento de penetração característico x_c para a região $x < 0$ e estime o valor da densidade de probabilidade para $x = -|x_c|$.

Questão 2: Spin

Um elétron é enviado através de um solenoide com um campo magnético uniforme na direção y e, em seguida, medido com um equipamento Stern-Gerlach com gradiente de campo na direção x, conforme mostrado abaixo:



O tempo gasto dentro do solenoide é tal que $\Omega t = \varphi$, onde $\Omega = 2\mu_B B/\hbar$ é a frequência de precessão de Larmor.

(a) (15%) Mostre que o efeito do solenoide é rotacionar o spin do elétron na forma

$$\hat{R}_y = \left\{ \begin{array}{cc} +\cos(\varphi/2) & \text{-sen}\,(\varphi/2) \\ +\text{sen}\,(\varphi/2) & +\cos(\varphi/2) \end{array} \right\}$$

(b) (15%) Suponha que o estado de entrada seja o estado puro $|\uparrow_z>$. Obtenha a expressão da probabilidade $P_{D_A}(\varphi)$ de que o detector D_A dispare.

(c) (10%) Suponha que o estado de entrada seja o estado puro $|\downarrow_z>$. Obtenha a expressão da probabilidade $P_{D_A}(\varphi)$ de que o detector D_A dispare.

(d) (10%) Faça um esboço da variação de $P_{D_A}(\varphi)$ como função de φ para os dois casos anteriores;

(e) (25%) Suponha agora que o estado inicial é descrito por $|\uparrow_x> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z> + |\downarrow_z>)$. Obtenha a expressão da probabilidade $P_{D_A}(\varphi)$ de que o detector D_A dispare e faça um esboço de sua variação como função de φ.

(f) (25%) Suponha agora que $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\uparrow_z><\uparrow_z| + |\downarrow_z><\downarrow_z|)$ descreve o estado inicial. Obtenha a expressão da probabilidade $P_{D_A}(\varphi)$ de que o detector D_A dispare e faça um esboço de sua variação como função de φ.

Questão 3: Momento angular

Um operador que descreve a interação de duas partículas de spin 1/2 tem a forma

$$f = a + b\vec{\sigma}_{(1)}.\vec{\sigma}_{(2)},$$

onde a e b são constantes, $\vec{\sigma}_{(1)}$ e $\vec{\sigma}_{(2)}$ são matrizes de Pauli e $\vec{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$. O momento angular de spin total é $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$.

(a) (30%) Mostre que f, $\vec{J}^2$ e J_z podem ser medidos simultaneamente.

(b) (20%) Obtenha a representação matricial para f na base $|J, M, J_1, J_2\rangle$.

(c) (50%) Obtenha a representação matricial para f na base $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$.

Questão 4: Teoria de perturbação independente do tempo

Uma partícula de massa m se move em 1-D no potencial periódico

$$V = V_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right),$$

onde V_0 e a são constantes. Sabemos que os autoestados de energia podem ser divididos em classes caracterizadas por um ângulo θ com funções de onda $\phi(x)$ que obedecem $\phi(x+a) = e^{i\theta}\phi(x)$ para todo x.

Para a classe $\theta = \pi$, temos a condição: $\phi(x+a) = -\phi(x)$.

(a) (50%) Mesmo quando $V_0 = 0$, podemos ainda classificar os autoestados por θ. Para quais valores de k a onda plana $\phi(x) = e^{ikx}$ satisfaz a condição estabelecida? Qual é o espectro de energia para $V_0 = 0$?

(b) (50%) Quando V_0 é pequeno ($V_0 \ll \hbar^2/ma^2$), calcule os dois autovalores de energia mais baixos por teoria de perturbação de primeira ordem.