



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo Semestre de 2019

Mecânica Estatística

07/08/2019 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: COMPORTAMENTO DOS GASES IDEAIS

Um gás monoatômico de comportamento ideal é submetido ao seguinte processo reversível: *i*) primeiramente, ele é comprimido isotermicamente do estado A até o estado B , *ii*) então ele é permitido se expandir adiabaticamente até o estado C e finalmente *iii*) ele é aquecido a volume constante até o estado original A .

(a) (25%) Esboce esse processo cíclico nos planos (p, V) , (p, T) , (V, T) e (S, T) .

Expresse o valor do fluxo de calor, o trabalho realizado e a variação da energia interna, indicando seu sinal, como adequado, para:

(b) (25%) A etapa $A \rightarrow B$

(c) (25%) A etapa $B \rightarrow C$

(d) (25%) A etapa $C \rightarrow A$

QUESTÃO 2: FLUTUAÇÕES

Considere uma caminhada aleatória implementada sobre uma rede quadrada infinita em $d = 2$ dimensões, com parâmetro de rede a : Em cada sítio da rede, iniciando na origem O , o caminhante escolhe, ao acaso e com igual probabilidade, uma das 4 direções/sentidos possíveis e dá um passo de comprimento igual ao parâmetro de rede. Assim, após N passos o comprimento da caminhada é Na . Note que os passos podem, inclusive, se superpor.

- (a) (15%) Escreva a expressão para o vetor posição \vec{R}_{ON} desse caminhante após N passos.
 - (b) (40%) Faça a média $\langle R_{ON}^2 \rangle = \langle \vec{R}_{ON} \cdot \vec{R}_{ON} \rangle$ sobre o ensemble de todas as configurações para encontrar a dependência de $\langle R_{ON}^2 \rangle$ com N , no limite $N \gg 1$.
 - (c) (25%) Generalize o resultado anterior para $d > 2$. Atenha-se a redes (hiper)cúbicas com $2d$ (d inteiro) vizinhos mais próximos.
 - (d) (20%) Argumente para mostrar que a relação encontrada em (b) deve ser robusta, mesmo que os passos não tenham um mesmo tamanho fixo a .
-

QUESTÃO 3: POTENCIAL QUÍMICO PARA UM GÁS DE FERMÍ EM 2D

Considere um gás de elétrons formado por N partículas, com energia $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$, onde k é o vetor de onda do estado de onda plana. Em 2-D, com condições de contorno periódicas, os valores de k permitidos no espaço- k podem assumir valores positivos e negativos, com espaçamento $2\pi/L$, onde L é o tamanho do sistema em cada direção.

- (a) (30%) Mostre que a densidade de estados de uma partícula é $\rho(\varepsilon) = Am/(\pi\hbar^2)$, onde A é a área do sistema.
- (b) (20%) Considere $T = 0$. Mostre que a energia de Fermi vale $\varepsilon_F = n\pi\hbar^2/m$, onde $n = N/A$.
- (c) (20%) Considere agora temperaturas finitas. Mostre que, a partir da expressão do número total de partículas em termos da função de distribuição de Fermi, podemos escrever a expressão implícita para $\mu(T)$ na forma

$$\varepsilon_F = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

- (d) (30%) Expresse o integrando na forma

$$\frac{e^{-\beta(\mu-\varepsilon)}}{1 + e^{-\beta(\mu-\varepsilon)}}$$

para mostrar que o potencial químico pode ser escrito como $\mu(T) = \varepsilon_F t \ln(e^{1/t} - 1)$, onde $t = k_B T / \varepsilon_F = T/T_F$

QUESTÃO 4: SISTEMAS INTERAGENTES

Um sistema num espaço d -dimensional tem topologia unidimensional, ou seja, é formado pela conexão de N unidades iguais, $N \gg 1$, cada uma com um comprimento a , formando uma cadeia linear. As unidades estão em equilíbrio térmico com um meio externo e podem se orientar em diferentes direções, desde que não se superponham. Imagine que o sistema tende, em média, a se dispor dentro de uma esfera de raio R e seja descrito por um modelo de campo médio cuja energia livre de Helmholtz ($F = -TS + E$) assume a forma $F = (A/N)R^2 + B\rho^2 R^d$, onde $\rho = N/R^d$, $A > 0$, $B > 0$ e a temperatura T está implícita.

- (a) (40%) Esboce num mesmo plano *Energia* (ordenada) - R (abcissa) os dois termos de F , em curvas separadas, e interprete-os fisicamente. Para fazer esse esboço, trate A , N e B como constantes, focalizando apenas na dependência das energias com R .
 - (b) (40%) Encontre a dependência $N(R)$ no equilíbrio, interpretando-a fisicamente.
 - (c) (20%) Explique as respostas para os casos $d = 2, 3$ e 4 . Interprete fisicamente, em particular, o caso $d = 4$.
-