Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro semestre de 2019

Mecânica Quântica

27/02/2019 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Espaço de estados

Considere os estados ortonormais $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ em um dado espaço de Hilbert. Sabe-se que:

i) o observável $\hat{\xi}$ tem $|1\rangle$ e $|2\rangle$ como autovetores, ambos correspondentes ao autovalor ξ_1, além do autovetor $|3\rangle$, com autovalor ξ_3;

ii) o observável $\hat{\eta}$ tem como autovetores $|1\rangle$, correspondente ao autovalor η_1, e $|2\rangle$ e $|3\rangle$, associados ao autovalor η_2.

Pergunta-se:

a) (20%) Os observáveis $\hat{\xi}$ e $\hat{\eta}$ são compatíveis entre si? Explique sua resposta. O conjunto $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ forma uma base completa para a descrição desses observáveis?

   Admita agora que o sistema está no estado descrito pelo vetor $|A\rangle = (a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle)\,/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (onde a, b e c são números reais), e considere as probabilidades de ocorrência de medições em que primeiro se determina o valor de $\hat{\xi}$ e depois o de $\hat{\eta}$.

b) (20%) Qual o estado do sistema logo após a primeira medição ter dado o valor ξ_1?

c) (20%) Qual a probabilidade de que a primeira medição dê o valor ξ_1?

d) (20%) Se a primeira medição der o valor ξ_1, qual a probabilidade de que a segunda medição dê o valor η_1?

e) (20%) Se a primeira medição der o valor ξ_3, qual a probabilidade de que a segunda medição dê o valor η_2?

Questão 2: Poço de potencial infinito

Como parte do projeto de um laser de estado sólido, considere um elétron confinado em um poço de potencial retangular unidimensional de comprimento L, para o qual $V(x) = 0$ em $0 < x < L$ e $V(x) = \infty$, nas outras regiões.

a) (15%) Encontre a expressão como função de L do comprimento de onda do elétron no estado fundamental desse sistema. Repita o cálculo para o caso em que o elétron está no primeiro estado excitado. Esboce as funções de onda correspondentes.

b) (15%) Encontre a expressão como função de L do comprimento de onda do fóton $\lambda_{fóton}$ emitido na transição do primeiro estado excitado para o estado fundamental do sistema.

c) (25%) Encontre a expressão como função de L do elemento de matriz $|\langle\varphi_m|\,\hat{x}\,|\varphi_n\rangle|$ correspondente à transição do primeiro estado excitado para o estado fundamental do sistema, com $|\varphi_i\rangle$ representando o estado quântico i.

d) (10%) O tempo de vida para a emissão espontânea entre dois estados quânticos $|\varphi_n\rangle$ e $|\varphi_m\rangle$ pode ser escrito como $\tau_{esp}^{nm} = (A_{nm})^{-1}$, onde $A_{nm} = (7,2 \times 10^{17}/\lambda_{fóton}^3)\,|\langle\varphi_m|\,\hat{x}\,|\varphi_n\rangle|^2$ (com todos os comprimentos envolvidos expressos em nm) é o coeficiente de Einstein para emissão espontânea. Para $L = 12$ nm, encontre o tempo de vida para a emissão espontânea a partir do primeiro estado excitado.

Considere agora que o sistema é inicialmente preparado com o elétron no estado fundamental $|\varphi_1\rangle$, com autoenergia E_1. Então, no instante $t = 0$, o potencial é rapidamente modificado, de tal modo que a função de onda original permanece a mesma, mas o potencial passa a ser nulo para a região $0 < x < 2L$, com $V(x) = \infty$, de outro modo.

e) (35%) Determine a probabilidade de que uma medição em $t > 0$ revele que o novo sistema está em seu primeiro estado excitado.

Dados:

$$h = 6,63 \times 10^{-34}\ \text{J.s} = 4,14 \times 10^{-15}\ \text{eV.s} \quad \hbar = 1,05 \times 10^{-34}\ \text{J.s} = 6,58 \times 10^{-16}\ \text{eV.s}$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \quad c = 3,0 \times 10^8\ \text{m/s}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2L^2}{m^2\pi^2}\ (m\ \text{ímpar})$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi/2 & \text{se} \quad m = n \end{cases} \quad \text{para } m \text{ e } n \text{ inteiros positivos}$$

$$\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi/2 & \text{se} \quad m = n \end{cases} \quad \text{para } m \text{ e } n \text{ inteiros positivos}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m+n \quad \text{for ímpar} \\ \frac{2m}{m^2-n^2} & \text{se} \quad m+n \quad \text{for par} \end{cases} \quad \text{para } m \text{ e } n \text{ inteiros}$$

Questão 3: Evolução temporal

Um elétron na presença de um campo magnético uniforme de magnitude B_0 apontando na direção positiva do eixo z encontra-se em $t = 0$ no autoestado do operador de spin $\hat{S}_y$ com autovalor $-\hbar/2$. O Hamiltoniano do sistema pode ser escrito como $\hat{H} = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$, onde γ é um parâmetro do sistema.

a) (10%) Obtenha o operador de evolução temporal $\hat{U}(t)$ do sistema.

b) (30%) Escreva o estado inicial do sistema na base que diagonaliza $\hat{U}(t)$.

c) (20%) Obtenha a função de onda $|\Psi(t)\rangle$ em um tempo t qualquer.

d) (40%) Qual a probabilidade de uma medida de $\hat{S}_x$ encontrar o valor $\hbar/2$ no instante t?

Dados:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Questão 4: Oscilador Harmônico

Considere um oscilador harmônico bidimensional descrito pelo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \, .$$

a) (20%) A partir de operadores de destruição do tipo

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right)$$

e de seus respectivos operadores de criação, mostre que esse Hamiltoniano pode ser diagonalizado na base de número de excitações.

b) (20%) Determine as energias do sistema e discuta as possíveis degenerescências dos autoestados correspondentes.

c) (20%) Suponha agora que as oscilações estejam acopladas pela perturbação $\hat{V} = \lambda \hat{x}\hat{y}$. Escreva $\hat{V}$ em termos dos operadores de criação e destruição para a base de estados não perturbados. Qual o resultado da atuação de $\hat{V}$ sobre um dos estados não perturbados do primeiro nível excitado do sistema?

d) (40%) Mostre que a perturbação acima levanta a degenerescência do primeiro estado excitado e determine as energias deste estado.