Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro semestre de 2019

Mecânica Estatística

26/02/2019 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Resfriamento por desmagnetização adiabática em um material ferromagnético

Desmagnetização adiabática é um processo que permite reduzir a temperatura de um material ferromagnético, sendo a base para produção de refrigeradores que utilizam o fenômeno magneto-calórico. Nesse processo, um material a uma temperatura T_1 e sob a ação de um campo magnético H_1 tem a entropia magnética (S_m) minimizada em razão do acoplamento dos momentos magnéticos com o campo. Com o material isolado termicamente, o campo magnético é reduzido para um valor H_0, acarretando um aumento na entropia magnética às custas da energia térmica da rede cristalina, resfriando assim o material magnético. Considerando desprezível a variação do volume do material e que o campo magnético influencia apenas a magnetização $M(H,T)$, ou seja, que o potencial de Gibbs G e a energia interna U não dependem do volume, i.e., $dG = -SdT - \mu_0 M dH$ e $dU = TdS + \mu_0 H dM$. Demonstre:

a) (30%) A relação de Maxwell $\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$

b) (30%) A relação termodinâmica

$$dS = \left(\frac{C_{PH}}{T}\right) dT + \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dH,$$

onde C_{PH} é a capacidade calorífica mantendo a pressão P e H constantes.

c) (20%) Que em um processo adiabático ($dS = 0$), a variação do campo H é acompanhada por uma variação na temperatura que pode ser obtida através da expressão

$$\Delta T = -\mu_0 \int_{H_0}^{H_1} \left(\frac{T}{C_{PH}}\right) \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dH.$$

d) (20%) Por fim, demonstre que em um processo isotérmico ($dT = 0$) a variação na entropia magnética pode ser escrita por

$$\Delta S_m = -\mu_0 \int_{H_0}^{H_1} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) dH.$$

QUESTÃO 2: GÁS IDEAL

Considere um gás ideal clássico formado por N partículas de massa m ocupando um volume V em contato com um reservatório térmico à temperatura T.

a) (40%) Obtenha a expressão da função canônica de partição.

b) (30%) Calcule a energia livre de Helmholtz.

c) (30%) Calcule a energia média.

Dados:

$\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Questão 3: Ensembles estatísticos

Considere um sistema de N osciladores harmônicos quânticos não interagentes e localizados nos sítios de uma rede unidimensional em contato com um banho térmico à temperatura T. Os níveis de energia de cada oscilador são dados por

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

onde ω_0 é uma frequência fundamental.

a) (35%) Obtenha uma expressão para a energia interna u por oscilador em função da temperatura T.

b) (30%) Qual a expressão de u nos limites de baixas temperaturas ($\hbar\omega_0 >> k_B T$) e altas temperaturas ($\hbar\omega_0 << k_B T$)? Comente sobre os resultados.

c) (35%) Calcule o calor específico a volume constante.

Questão 4: Teoria de campo médio: modelo de Landau

Na aproximação de Landau, a energia livre para um sistema magnético a uma temperatura T e na presença de um campo magnético H pode ser descrita pela expressão

$$F(m,H) \approx \frac{1}{2}a_0 t m^2 + u_0 m^4 - \frac{mH}{k_B T}, \tag{1}$$

onde a_0 e u_0 são constantes positivas e independentes de T, $t \left(= \frac{T-T_c}{T_c}\right)$ é a temperatura reduzida, com T_c sendo a temperatura crítica, e a magnetização m o parâmetro de ordem associado à fase magnética.

a) (20%) Mostre que quando $H = 0$ a simetria da energia livre de Landau é quebrada em relação a m para $T < T_c$.

b) (20%) Demonstre que, para $H = 0$ e $t < 0$, o valor médio do parâmetro de ordem é descrito por uma lei de potência do tipo $\bar{m} \sim |t|^\beta$, e indique o valor do expoente crítico β.

c) (20%) Demonstre que a susceptibilidade magnética é descrita por $\chi \sim |t|^{-\gamma}$ e calcule o expoente γ.

d) (20%) Determine o expoente crítico δ para a dependência do parâmetro de ordem com H em $T = T_c$, na forma $\bar{m} \sim |H|^{1/\delta}$.

e) (20%) Verifique se os valores dos expoentes críticos determinados utilizando a teoria de campo médio de Landau satisfazem a lei de escala de Widom: $\gamma = \beta(\delta - 1)$. A teoria de Landau prevê ainda uma descontinuidade no calor específico ao invés de uma lei de potência com expoente crítico α. A partir da lei de escala de Rushbrooke ($\alpha + 2\beta + \gamma = 2$) obtenha α e discuta o resultado obtido.