Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2018

Mecânica Quântica

09/08/2018 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Aplicações simples e potenciais independentes do tempo

Considere uma partícula de massa m sujeita ao potencial independente do tempo t, $V = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$, onde x representa a posição e ω é a frequência angular do oscilador.

(a) (20%) Calcule a função de onda do primeiro estado excitado em $t = 0$, $\Psi_1(x,\, 0)$.

Agora, considere que a partícula se encontra em um estado quântico dado pela função de onda

$$\Psi(x,\, 0) = C\left[\Psi_0(x) + 3\Psi_1(x)\right],$$

onde $\Psi_0(x)$ é a função de onda do autoestado de menor energia.

(b) (30%) Calcule a constante C e a probabilidade de encontrar a partícula numa região $\mathrm{d}x$ em torno de x.

(c) (30%) Calcule a amplitude e a frequência de oscilação de $\langle x \rangle$.

(d) (20%) Ao medir a energia da partícula que valores poderiam ser obtidos e com qual probabilidade?

Dados:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

$$a_\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x \pm \frac{i\,p}{m\omega}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^2\, e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Questão 2: Momento angular

Considere os operadores posição e momento ao longo de duas direções ortogonais para dois osciladores harmônicos unidimensionais, tal que $[x, p_x] = i\hbar = [y, p_y]$, enquanto $[x, y] = [x, p_y] = [y, p_x] = [p_x, p_y] = 0$.

(a) (30%) Encontre as relações de comutação entre os operadores

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip_x}{m\omega}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip_x}{m\omega}\right),$$

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(y + \frac{ip_y}{m\omega}\right), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(y - \frac{ip_y}{m\omega}\right).$$

(b) (20%) Represente $xp_y - yp_x$ em termos dos operadores a, $a^\dagger$, b e $b^\dagger$.

(c) (30%) Definindo $J_+ = \hbar\, a^\dagger b$, $J_- = \hbar\, b^\dagger a$, e $J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right)$, mostre que estes operadores satisfazem as relações de comutação:

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, [J_+, J_-] = 2\hbar J_z.$$

(d) (20%) Mostre que $xp_y - yp_x$ comuta com o número total de excitações dos osciladores, $N = a^\dagger a + b^\dagger b$.

Dados:

$$[AB, CD] = A[B, C]D + [A, C]BD + CA[B, D] + C[A, D]B$$

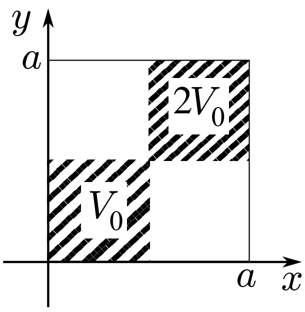
Questão 3: Teoria de perturbação

Considere uma partícula de massa m presa no poço infinito bidimensional:

$$V(x,\, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < a \text{ e } 0 < y < a, \\ \infty, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Introduza a perturbação

$$\mathcal{H}' = \begin{cases} V_0, & \text{se } 0 < x < a/2 \text{ e } 0 < y < a/2, \\ 2V_0, & \text{se } a/2 < x < a \text{ e } a/2 < y < a, \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$



(a) **(30%)** Calcule a correção em primeira ordem da energia do estado fundamental.

(b) **(40%)** Calcule a correção em primeira ordem da energia do primeiro estado excitado.

(c) **(30%)** Obtenha a função de onda normalizada do primeiro estado excitado perturbado.

Dados:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \; dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + \text{constante},$$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) \; dx = \frac{b \operatorname{sen}(ax) \cos(bx) - a \cos(ax) \operatorname{sen}(bx)}{a^2 - b^2} + \text{constante}, \qquad \text{para } a \neq b$$

QUESTÃO 4: PARTÍCULAS IDÊNTICAS

O estado de dois elétrons em um átomo de Hélio é descrito por

$$|r_1, r_2, m_1, m_2\rangle = |r_1, r_2\rangle\, |m_1, m_2\rangle\, ,$$

onde as dependências espacial $|r_1, r_2\rangle$ e de spin $|m_1, m_2\rangle$ são separáveis. Cada um dos spins $m_i = \pm$, onde $i = 1, 2$, pode assumir estados orientados paralelamente ou antiparalelamente a um eixo de referência.

(a) (50%) Seja P o operador que permuta os elétrons 1 e 2. Encontre uma base de estados em que P é diagonal.

Sugestão: investigue a ação de P sobre os estados da base $|m_1, m_2\rangle$.

(b) (20%) Suponha que a dependência espacial $|r_1, r_2\rangle$ do estado é simétrica sob a permutação entre r_1 e r_2, $P\,|r_1, r_2\rangle = |r_2, r_1\rangle$. Determine os possíveis estados de spin do sistema.

(c) (30%) Suponha que a dependência espacial $|r_1, r_2\rangle$ do estado é anti-simétrica sob a permutação entre r_1 e r_2, $P\,|r_1, r_2\rangle = -\,|r_2, r_1\rangle$. Determine os possíveis estados de spin do sistema.

Dados:

$$P\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{(bósons)}, \qquad P\,|\psi\rangle = -\,|\psi\rangle \quad \text{(férmions)},$$

$$S_{iz}\,|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|-\rangle\, , \qquad S_{iz}\,|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle$$