Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2018

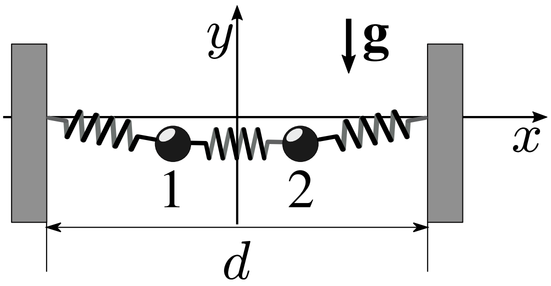
Mecânica Clássica

10/08/2018 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Oscilações

A figura abaixo mostra duas pequenas esferas de massa m cada, conectadas a três molas de mesma constante elástica k. Duas das molas estão fixadas a paredes verticais. Os pontos de fixação das molas às paredes se encontram a uma mesma altura e separados por uma distância horizontal d. Por conveniência, a origem de um sistema de coordenadas está situada a uma distância $d/2$ e na mesma altura dos pontos de fixação. A aceleração gravitacional no local é $\mathbf{g} = -g\hat{y}$.



(a) (10%) Escreva as equações de movimento para cada uma das esferas.

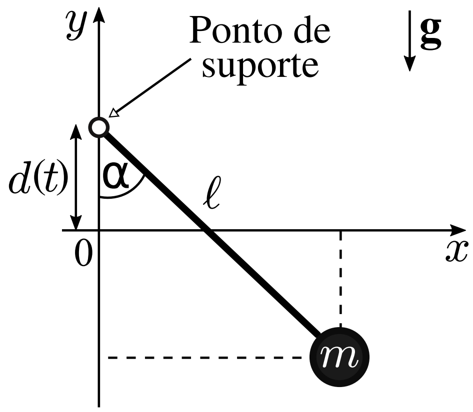
(b) (30%) Determine as posições de equilíbrio de cada esfera.

(c) (40%) Utilize as transformações de variáveis $\mathbf{q} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$ para desacoplar as equações de movimento e obtenha os modos normais de vibração do sistema (i.e., descreva os modos coletivos e calcule suas frequências de oscilação).

(d) (20%) Suponha que as esferas estejam inicialmente em repouso, com a esfera 1 na sua posição de equilíbrio [determinada no item (b)], enquanto a esfera 2 na origem do sistema de coordenadas. Em $t = 0$ o sistema é liberado. Determine as equações horárias para as posições das esferas 1 e 2 para $t \geq 0$.

Questão 2: Formalismo Lagrangiano

Um pêndulo de comprimento ℓ e massa m está localizado numa região de campo gravitacional uniforme, onde a aceleração da gravidade é $\mathbf{g} = -g\hat{y}$ e $\hat{y}$ é o vetor unitário ao longo do eixo y. Tal pêndulo faz um ângulo α com a vertical, como ilustra a figura abaixo. Sabe-se que o ponto de suporte do pêndulo move-se ao longo da direção vertical com uma posição dada por $d(t)$, que é uma função apenas do tempo t. Quaisquer efeitos de atrito e resistência do ar são desprezados. O nível de referência para a energia potencial gravitacional nula é $y = 0$.
Atenção: Neste problema use a coordenada α como sua coordenada generalizada.



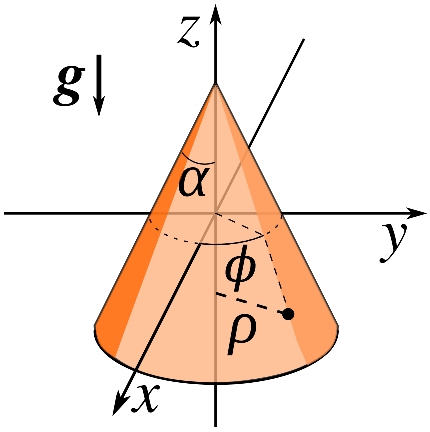
(a) (20%) Escreva o Lagrangiano do sistema.

(b) (40%) Utilizando a equação de Euler-Lagrange, obtenha a equação de movimento para o ângulo α.

(c) (40%) Supondo que $d(t) = A\,t^2/2$, onde A é uma constante positiva, calcule o período de oscilação do pêndulo para pequenas oscilações (pequenos ângulos α).

Questão 3: Formalismo Hamiltoniano e campo central

Uma partícula de massa $m = 1$ (em unidades arbitrárias) está restrita a se mover sobre a superfície de um cone, com o vértice para cima e cuja geratriz faz ângulo α com o eixo z (ver figura). A aceleração gravitacional local é dada por $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, onde g é constante, e a trajetória da partícula pode ser descrita em coordenadas cilíndricas por $(\rho(t),\, \phi(t),\, z(t))$, onde t é o tempo.



(a) (35%) Encontre a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ do sistema em coordenadas cilíndricas.

(b) (25%) Identifique as grandezas conservadas enquanto a partícula se move sobre a superfície do cone. Justifique sua resposta.

Considere que, em $t = 0$, a partícula se encontra no eixo x, a uma distância ρ_0 do eixo z, e com velocidade radial v_ρ, de tal modo que

$$v_\rho^2 + \frac{\ell^2 \mathrm{sen}^2\alpha}{\rho_0^2} = 2g\rho_0 \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha,$$

onde ℓ é a componente z do momento angular.

(c) (25%) A partir da energia mecânica do sistema em coordenadas cilíndricas e utilizando $u = \ell/\rho$, mostre que,

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\alpha\, u^2 = \frac{2\ell g\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{u}.$$

(d) (15%) Determine a trajetória da partícula, i.e., $\rho = \rho(\phi)$, para $\ell \neq 0$.

<u>Sugestão</u>: Utilize $s^2 = \dfrac{\tan\alpha}{2\ell g}u^3$ e resolva a integral resultante.

Dados:

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 - w^2}} = \arcsin w + \text{constante}$$

Questão 4: Transformações canônicas

Considere a seguinte transformação das variáveis (q, p) para as variáveis (Q, P):

$$Q = p + iaq, \qquad P = \frac{(p - iaq)}{2ia},$$

onde a é uma constante.

(a) (20%) Tal transformação é canônica? Justifique sua resposta quantitativamente e em detalhe.

(b) (45%) Encontre a função geradora $S = S(q, Q)$ para tal transformação.

(c) (35%) O Hamiltoniano no sistema (q, p) é dado por $\mathcal{H} = (p^2 + a^2q^2)/2$. Escreva as equações de Hamilton para as coordenadas (Q, P) e obtenha expressões para $Q(t)$ e $P(t)$, sabendo que em $t = 0$, $Q(0) = Q_0$ e $P(0) = P_0$.
