Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2018

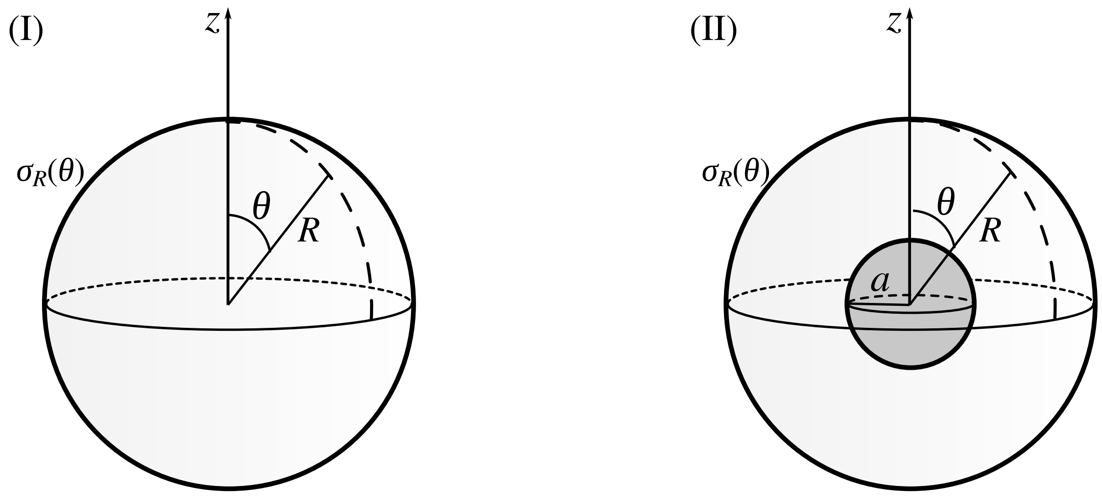
Eletrodinâmica Clássica

07/08/2018 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Eletrostática

Uma casca esférica não condutora de raio R é composta por um material isolante e possui uma densidade de carga superficial $\sigma_R(\theta) = \sum_n \sigma_n P_n(\cos\theta)$, conforme mostra a figura (I). Observa-se que a densidade de carga superficial $\sigma_R(\theta)$ produz um campo elétrico $\mathbf{E} = E_0(x\hat{x} + y\hat{y} - 2z\hat{z})$ no interior da esfera ($r < R$), onde E_0 é uma constante. Considere como vácuo as regiões internas e externas à casca.



(a) **(30%)** Mostre que o potencial elétrico em $r < R$ será dado por $E_0 r^2 P_2(\cos\theta)$ quando o zero do potencial é definido na origem. Nestas circunstâncias, calcule também o potencial elétrico na região externa à esfera, em $r > R$.

Agora, uma esfera perfeitamente condutora, de raio a e aterrada, é colocada concentricamente dentro da casca esférica isolante [figura (II)]. Não há cargas livres neste sistema.

(b) **(40%)** Determine o potencial elétrico em todo o espaço na presença da esfera condutora de raio a.

(c) **(30%)** Calcule a densidade superficial de cargas $\sigma(\theta)$ sobre a esfera condutora de raio a.

Dados:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta)$$

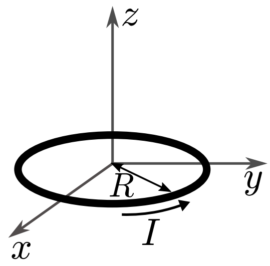
$$\int_{-1}^{1} P_l(u) P_m(u) du = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,m}$$

$$P_0(u) = 1, \qquad P_1(u) = u, \qquad P_2(u) = \frac{3u^2-1}{2}, \qquad P_3(u) = \frac{5u^3-3u}{2}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Questão 2: Magnetostática

A figura ao lado mostra uma espira condutora circular de raio R, localizada no plano xy e percorrida por uma corrente elétrica I. Sabe-se que a espira está centrada no eixo z e que a permeabilidade magnética do vácuo é μ_0. Na resolução desta questão use coordenadas cilíndricas $(\rho,\, \phi,\, z)$ e suponha que as componentes do vetor campo magnético $\mathbf{B}$ gerado por tal espira de corrente são denotadas por B_ρ, B_ϕ e B_z.



(a) (20%) Utilizando a lei de Biot-Savart calcule o módulo do campo magnético $B = B_z(\rho = 0,\, z)$ num ponto localizado ao longo do eixo $z > 0$, e a uma distância z do centro da espira.

Os itens (b) e (c) abaixo estão relacionados ao cálculo da intensidade do campo magnético para um ponto localizado a uma altura z acima do centro da espira, porém a uma distância radial finita $0 < \rho \ll R$.

(b) (35%) Sabendo que $B_\rho(\rho,\, z) = g(z)\rho$ quando $\rho \ll R$ e usando a equação de Maxwell apropriada, calcule a função $g(z)$.

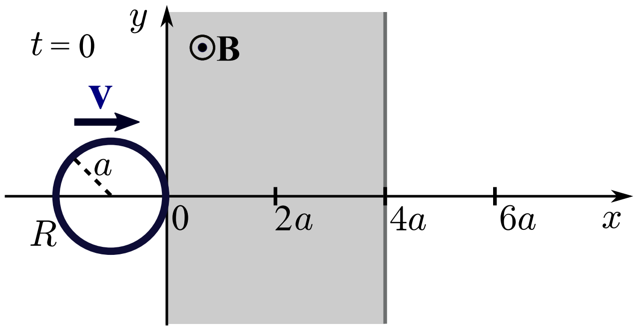
(c) (45%) Usando a função $g(z)$ calculada no item (b) e a equação de Maxwell apropriada, calcule a expressão de $B_z(\rho,\, z)$ quando $\rho \ll R$.

Dados:

$$
\begin{aligned}
\nabla\psi &= \hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\
\nabla\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} &= \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right) + \frac{\hat{z}}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

Questão 3: Indução eletromagnética

Na figura abaixo, uma espira condutora circular de raio a e resistência elétrica R move-se com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{x}$, onde $\hat{x}$ é o vetor unitário ao longo do eixo x. No instante de tempo $t = 0$ a extremidade direita da espira penetra a região $0 \leq x \leq 4a$ (área retangular em cinza), onde existe um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Sabe-se que fora desta região (ou seja, para $x < 0$ ou $x > 4a$) o campo magnético é nulo.



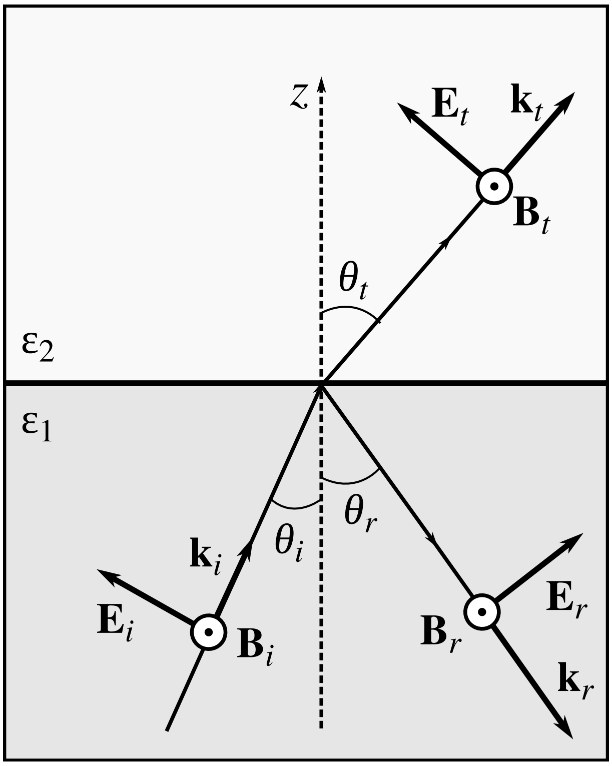
(a) **(45%)** Calcule a força eletromotriz induzida $\mathcal{E}$ na espira para um dado tempo t, onde $0 \leq t \leq 2a/v$.

(b) **(30%)** Faça um gráfico expressando a variação da força eletromotriz *adimensional* $E = (\mathcal{E}/2aBv)$ em função do tempo *adimensional* $T = vt/a$ para $0 \leq T \leq 6$.

(c) **(25%)** Qual é o módulo e o sentido assumido (horário ou anti-horário) pela corrente elétrica (*dimensional*) induzida na espira durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 6a/v$?

Questão 4: Ondas eletromagnéticas

Uma onda eletromagnética plana, de campo elétrico $\mathbf{E}_i = \hat{y} E_0 e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ e frequência ω, possui um vetor de onda $\mathbf{k}_i$ que forma um ângulo θ_i com o eixo z vertical, e está localizada em um meio de constante dielétrica ε_1 que ocupa o semi-espaço $z < 0$. A região $z > 0$ é preenchida por um meio homogêneo que possui uma constante dielétrica $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Considere que os campos refletido e transmitido possuem suas quantidades definidas de acordo com a figura abaixo. Utilize também que a permeabilidade magnética é igual ao seu valor no vácuo em todo o espaço, $\mu = \mu_0$ para qualquer z, e que as densidades de cargas e correntes são nulas em todo o espaço.



(a) **(30%)** Demonstre que os ângulos de incidência e reflexão são iguais, $\theta_i = \theta_r$, e obtenha a lei de Snell.

(b) **(40%)** Obtenha os campos elétricos em todo o espaço como função do campo elétrico incidente $\mathbf{E}_i$.

(c) **(30%)** Mostre que na condição de reflexão interna total a densidade de energia decai exponencialmente na região $z > 0$.