



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2017

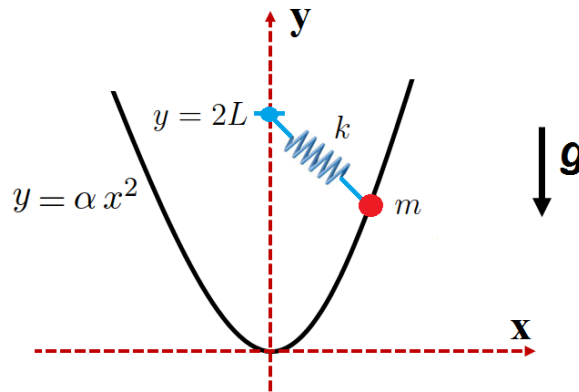
Mecânica Clássica

11/08/2017 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – FORMALISMO LAGRANGIANO, PEQUENAS OSCILAÇÕES

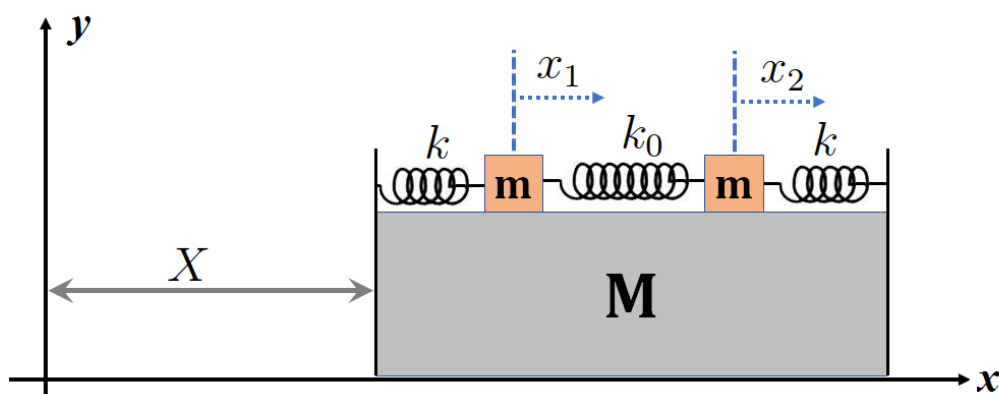
Suponha que uma conta (partícula com furo no meio) de massa m esteja restrita a se mover ao longo de um arame com o formato $y = \alpha x^2$, como ilustrado na figura abaixo, onde α é uma constante positiva. A conta também está presa a uma mola com constante de mola k cujo comprimento natural, quando não está comprimida nem estendida, é L . A segunda extremidade da mola está fixada na posição $\vec{r} = 2L\hat{y}$. Considere que não haja atrito e que a aceleração local da gravidade seja $\vec{a}_{grav} = -g\hat{y}$.



- (a) (40%) Usando a coordenada x da conta como coordenada generalizada, monte o lagrangiano desse sistema.
- (b) (30%) Note que no caso especial $\alpha = 1/(8L)$ a expressão que aparece dentro da raiz quadrada na resposta do item anterior é um quadrado perfeito, de forma que a raiz pode ser extraída. Use esse fato para simplificar o lagrangiano e encontre a equação de movimento nesse caso especial.
- (c) (30%) Encontre o(s) ponto(s) de equilíbrio da conta no caso especial $\alpha = 1/(8L)$ e obtenha o(s) período(s) das pequenas oscilações em torno desse(s) ponto(s). *Dica: Assuma que o movimento em torno do ponto de equilíbrio é do tipo harmônico e, na equação de movimento, considere apenas termos lineares na amplitude.*
-

QUESTÃO 2 – MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO

Dois blocos de mesma massa m estão presos a molas, cujas constantes de mola são k e k_0 , com as extremidades das molas de constantes k fixadas sobre um corpo de massa M , conforme ilustrado abaixo. O corpo de massa M está livre para se mover sobre a superfície horizontal. Não existe atrito entre nenhuma das superfícies de contato. Na figura, x_1 e x_2 representam os deslocamentos das massas com relação às respectivas posições de equilíbrio e X denota a posição da massa M em um referencial inercial.



- (a) (40%) Obtenha a lagrangiana do sistema em termos das coordenadas x_1 , x_2 e X e de suas velocidades \dot{x}_1 , \dot{x}_2 e \dot{X} .
- (b) (40%) Determine as frequências dos modos normais de oscilação deste sistema e descreva fisicamente estes modos.
- (c) (20%) Suponha agora que exista atrito entre o corpo de massa M e a superfície horizontal. Considerando que o sistema é posto a oscilar a partir de uma condição inicial arbitrária, qual(is) modo(s) sobreviverá(ão) após o período transiente. Explique sua resposta.
-

QUESTÃO 3 – POTENCIAL CENTRAL, LEIS DE CONSERVAÇÃO

Suponha que exista um Universo paralelo onde a força de atração gravitacional que uma massa pontual m_1 na posição \vec{r}_1 exerce sobre uma massa pontual m_2 na posição \vec{r}_2 seja a seguinte:

$$\vec{F} = \frac{K m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{5/2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = \frac{K m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{3/2}},$$

onde K é uma constante positiva. Considere que M é a massa de uma estrela nesse Universo e m a massa de um planeta que orbita tal estrela. Assumindo que $m \ll M$, de forma que podemos considerar que a estrela não se move no referencial do centro de massa, faça o que é pedido abaixo.

- (a) (10%) Demonstre que o momento angular do planeta é conservado e que a órbita do planeta está contida em um plano.
 - (b) (10%) A segunda lei de Kepler (lei das áreas) vale nesse Universo? Demonstre sua resposta.
 - (c) (20%) Supondo órbitas circulares, diga qual é o análogo da terceira lei de Kepler (lei dos períodos) nesse Universo.
 - (d) (40%) Usando coordenadas polares (r, θ) para descrever a posição do planeta no plano da órbita (com a estrela estando na origem), obtenha uma equação diferencial de primeira ordem para $r(t)$ sabendo que a energia mecânica do sistema planeta-estrela é E e que o módulo do momento angular do planeta é L .
 - (e) (20%) Demonstre que existem órbitas circulares e explique se essas órbitas são estáveis.
-

Dados:

Sendo $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$ a base ortonormal polar, temos:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}.$$

QUESTÃO 4 - TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Considere uma transformação de coordenadas do tipo $q_i = f_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t)$ (transformação pontual), onde q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, s$) são coordenadas generalizadas.

- (a) (40%) Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes por esta transformação.
 - (b) (40%) Obtenha o momento canônico P_k , conjugado à coordenada Q_k , e a energia total do sistema em termos de p_i , $H(q_i, p_i, t)$ e de derivadas das funções f_i , onde p_i é o momento conjugado a q_i e $H(q_i, p_i, t)$ é o hamiltoniano.
 - (c) (20%) Faça uso do resultado anterior para mostrar como o momento canônico e a energia de uma partícula se transformam quando passamos de um sistema de coordenadas cilíndricas parado para um referencial que gira em torno do eixo z com velocidade angular constante Ω .
-