



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2017

Mecânica Quântica

10/08/2017 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS

Considere um sistema físico no espaço tridimensional gerado por uma base ortonormal constituída pelos kets $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, $|v_3\rangle$. Nesta base e com os kets nesta ordem, o operador hamiltoniano do sistema H e os operadores A e B são descritos por:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}; \quad B = \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ω , α e β são constantes reais.

- (a) (10%) Quais dos operadores acima representam observáveis físicos? Justifique.
- (b) (40%) Obtenha a base que diagonaliza os operadores H e B .
- (c) (50%) Uma medida do observável representado pelo operador B é realizada quando o sistema se encontra no estado abaixo:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle.$$

Utilize o resultado do item anterior para determinar que valores podem ser obtidos e com que probabilidades. Para cada caso determine o vetor de estado após a medida.

QUESTÃO 2 – MOMENTO ANGULAR

Um sistema quântico é constituído de dois momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$.

- (a) (20%) Determine os possíveis valores do momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ e indique a forma irredutível (genérica) de uma matriz de rotação neste espaço.
- (b) (40%) Construa os kets da base $|j, m\rangle$ do subespaço com maior valor de j em função dos kets da base $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ e determine os coeficientes de Clebsch-Gordan ($\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle$): $\langle 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ e $\langle 1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$.

Considere que o sistema físico seja o elétron do átomo de Hidrogênio. Devido ao spin, temos que levar em conta a correção de origem relativística, conhecida como estrutura fina. Esta correção, além de deslocar os níveis de energia, quebra a degenerescência através do termo de acoplamento spin-órbita, representado por $H = a \vec{L} \cdot \vec{S}$, onde a é uma constante de acoplamento.

- (c) (40%) Explícite como este termo de interação quebra a degenerescência do estado 2p ($n = 2$ e $l = 1$). Determine os novos autoestados e esboce um diagrama de níveis.

Dados:

$$\begin{aligned} \langle j', m' | J^2 | j, m \rangle &= j(j+1) \hbar^2 \delta_{j'j} \delta_{m'm} \\ \langle j', m' | J_z | j, m \rangle &= m \hbar \delta_{j'j} \delta_{m'm} \\ \langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{j'j} \delta_{m'm \pm 1} \end{aligned}$$

QUESTÃO 3 – OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO E ESTADOS COERENTES

Um oscilador harmônico unidimensional tem massa m e frequência angular ω . No tempo $t = 0$, um estado $\Psi(x, t)$ do oscilador harmônico é autofunção do operador de aniquilação \hat{a} com autovalor α (um número complexo), ou seja $\hat{a}\Psi(x, 0) = \alpha\Psi(x, 0)$.

(a) (30%) Mostre que

$$\Psi(x, 0) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n,$$

em que φ_n é a autofunção normalizada do hamiltoniano com número quântico n , e c_0 é uma constante de normalização.

(b) (20%) Aplicando o operador de evolução temporal e comparando com os resultados obtidos no item (a), mostre que num tempo posterior t , $\Psi(x, t)$ é uma autofunção de \hat{a} com autovalor $\alpha \exp(-i\omega t)$.

(c) (30%) Mostre que se $\alpha = \lambda \exp(i\rho)$, onde $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$, então

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp[-(x - x_0)^2/2\delta^2], \text{ com } x_0 = 2\delta\lambda\cos(\rho - \omega t) \text{ e } \delta^2 = \hbar/2m\omega.$$

(d) (20%) Analise a evolução temporal do estado do oscilador harmônico, ilustrando sua análise com esboços da forma do estado do sistema em vários tempos.

Dados:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}_x) \sim \frac{1}{2\delta}x + \delta\frac{d}{dx}$$

QUESTÃO 4 – DINÂMICA QUÂNTICA: RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

Um sistema de nêutrons está sujeito a um campo magnético uniforme e constante B_0 ao longo da direção z e a um campo magnético girante no plano $x - y$, com componentes $B_r \cos(\omega t)$ ao longo de x e $B_r \sin(\omega t)$ ao longo de y , com B_r constante.

(a) (20%) Mostre que o hamiltoniano pode ser escrito na forma $H = H^{(0)} + H^{(1)}$, com

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= -\frac{1}{2}\hbar\omega_L\sigma_z, & \omega_L &= \gamma_n B_0, \\ H^{(1)} &= -\frac{1}{2}\hbar\omega_r [\sigma_x \cos(\omega t) - \sigma_y \sin(\omega t)], & \omega_r &= \gamma_n B_r, \end{aligned}$$

em que $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, são as matrizes de Pauli para o nêutron, e $\gamma_n = g_n \mu_B / \hbar$ é o fator giromagnético destas partículas.

(b) (40%) Se o estado de spin do nêutron for dado por

$$|\Psi(t)\rangle = c_\alpha \exp\left(\frac{i\omega_L t}{2}\right) |\alpha\rangle + c_\beta \exp\left(\frac{-i\omega_L t}{2}\right) |\beta\rangle,$$

onde $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são autoestados de $H^{(0)}$, mostre que os coeficientes c_α e c_β satisfazem às relações

$$\dot{c}_\alpha = \frac{1}{2}i\omega_r \exp(iqt) c_\beta, \quad \dot{c}_\beta = \frac{1}{2}i\omega_r \exp(-iqt) c_\alpha, \quad q = \omega - \omega_L.$$

(c) (40%) Se em $t = 0$ todos os nêutrons estiverem no estado $|\alpha\rangle$, mostre que a fração de nêutrons no estado $|\beta\rangle$, no tempo t , é dada por

$$|c_\beta(t)|^2 = \frac{\omega_r^2}{q^2 + \omega_r^2} \sin^2(\sqrt{q^2 + \omega_r^2} t/2).$$

Dados:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$