



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2017

Mecânica Estatística

09/08/2017 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 — TERMODINÂMICA

Dois blocos metálicos, finitos em seus tamanhos, têm uma capacidade térmica à pressão constante C_p , que não varia. Um deles está inicialmente a uma temperatura "alta" T_H , enquanto o outro está a uma temperatura "baixa" T_L . Entre eles opera uma máquina térmica.

- (a) (40%) Considerando que os blocos atinjam a temperatura final T_F no equilíbrio térmico, determine a quantidade de trabalho que pode ser produzida pela máquina.
 - (b) (30%) Calcule a variação total de entropia dos blocos.
 - (c) (30%) Para o caso de uma máquina térmica com eficiência máxima ser usada, determine T_F em função de T_H e T_L .
-

QUESTÃO 2 – ENSEMBLES ESTATÍSTICOS

Considere um sistema termodinâmico formado por dois osciladores harmônicos quânticos desacoplados, de cargas elétricas $2e$ e $-e$, de forma que os níveis de energia de cada um deles sejam dados por:

$$\varepsilon_1 = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + 2e\phi \quad , \quad \varepsilon_2 = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - e\phi ,$$

onde $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e ϕ representa o potencial eletrostático advindo de um campo elétrico no qual os osciladores estão imersos. Considere que o sistema obedece à equação de estado

$$q\phi = -\alpha U ,$$

onde U é a energia interna do sistema, q é a carga elétrica total e α é uma constante. Sabendo que $dU = \delta Q - \delta W = TdS + \phi dq$, faça o que é solicitado abaixo.

- (a) (30%) Mostre que o número de estados com energia total $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ é $(n_1 + n_2 + 1)$ e use o formalismo **microcanônico** para calcular a entropia, S , e a energia interna em função da temperatura, $U(T)$.
 - (b) (25%) Calcule a capacidade térmica a carga constante, C_q , e a capacidade térmica a potencial constante, C_ϕ .
 - (c) (30%) Agora usando o formalismo **canônico**, calcule a função de partição desse sistema e a energia interna em função da temperatura, $U(T)$.
 - (d) (15%) Os resultados dos itens (a) e (c) para a energia interna $U(T)$ devem coincidir? Explique sua resposta.
-

QUESTÃO 3 – MECÂNICA ESTATÍSTICA NO ENSEMBLE CANÔNICO

Considere um gás monoatômico inicialmente à temperatura T , cujas moléculas têm massa m .

- (a) (40%) Usando o formalismo do **ensemble canônico**, mostre que a função de distribuição de módulos de velocidade de Maxwell-Boltzmann para a fração de moléculas com velocidades entre v e $v + dv$ é dada por

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^3} v^2 e^{-mv^2/2k_B T},$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

- (b) (20%) Calcule a energia média das moléculas do gás e comente seu resultado à luz do teorema de equipartição de energia.
- (c) (20%) Determine o valor da velocidade mais provável das moléculas do gás, v_m .
- (d) (20%) Imagine agora que tenhamos um dispositivo que permita liberar do recipiente que contém o gás uma fração das moléculas mais energéticas, digamos todas aquelas que têm velocidades $v > 2v_m$. As moléculas que restam no recipiente então termalizam e o gás passa a ter uma temperatura T_F . Usando o teorema da equipartição da energia, obtenha uma equação relacionando a temperatura final T_F com a temperatura inicial do gás T e a velocidade mais provável v_m . Mostre diretamente (ou apresente argumentos físicos para justificar) que $T_F < T$, ou seja, o gás que permaneceu no recipiente esfriou.

Obs.: Este é o princípio básico do mecanismo que está por trás do processo de resfriamento do cafezinho e também da técnica para resfriar átomos presos em uma armadilha atômica, chamada de resfriamento evaporativo.

Dados:



$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad ;$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

QUESTÃO 4 – GASES QUÂNTICOS, ENSEMBLE GRANDE CANÔNICO

Considere um gás composto de partículas idênticas não interagentes de spin 1 e massa m . Os níveis de energia de cada partícula são $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\}$. Denotando por n_i o número de partículas que ocupam o estado de energia ε_i , faça o que é pedido abaixo.

- (a) (10%) Sendo N o número total de partículas e E a energia total do gás, escreva N e E em termos de $\{n_i\}$ e $\{\varepsilon_i\}$. Depois, argumente que na expressão da função de partição do ensemble grande canônico, $\mathcal{Q}(T, \mu)$, podemos substituir as somas $\sum_N \sum_E$ por uma única soma sobre todos os valores permitidos para a lista de números $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$. Ou seja, argumente que $\sum_N \sum_E = \sum_{\{n_i\}}$.
- (b) (30%) Usando o ensemble grande canônico, encontre a expressão para $\langle n_i \rangle$, o número médio de partículas em um estado de energia ε_i , quando a temperatura é T e o potencial químico é μ .
- (c) (30%) Supondo que o gás esteja confinado em uma caixa cúbica de volume $V = L^3$, obtenha os níveis de energia ε_i . Use isso para achar a função densidade de estados $D(\varepsilon)$ (número de estados por intervalo de energia) quando $L \rightarrow \infty$.
- (d) (30%) Existe uma temperatura T_0 abaixo da qual o gás tem um comportamento peculiar. Essa temperatura é definida como sendo aquela na qual o potencial químico se anula, $\mu(T_0, V) = 0$. Supondo que $L \rightarrow \infty$, use os resultados dos itens anteriores para encontrar uma expressão para T_0 em função de N e V . Seu resultado pode ser deixado em termos de uma integral puramente numérica, sem dependência nas grandezas físicas. *Dica: Use a expressão para o número de partículas encontrada nos itens (a) e (b), faça $\mu = 0$ e $T = T_0$ e troque a soma sobre os estados por uma integral.*
-

Dados:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}; \quad \mathcal{Q}(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_E e^{\beta(N\mu - E)}; \quad \beta \langle N \rangle = \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\mathcal{Q}); \quad \beta \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(\mathcal{Q}) + \langle N \rangle \mu$$