



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2017

**Eletrodinâmica Clássica**

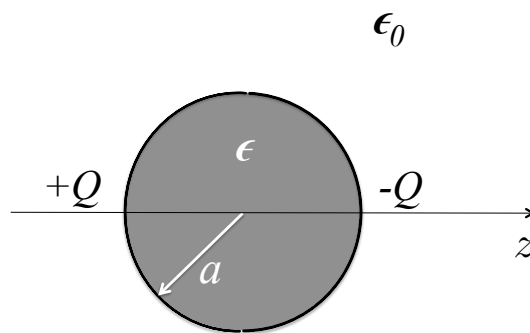
08/08/2017 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

---

**QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE**

Uma esfera dielétrica com permissividade elétrica  $\epsilon$  e raio  $a$  tem as superfícies dos seus dois hemisférios cobertas, respectivamente, com cargas  $+Q$  ( $z < 0$ ) e  $-Q$  ( $z > 0$ ) ( $Q > 0$ ), uniformemente distribuídas em cada uma das superfícies e isoladas uma da outra, conforme indicado na figura abaixo.



- (a) (40%) Obtenha o potencial elétrico em todos os pontos do espaço.
- (b) (30%) Determine a densidade superficial de carga induzida na esfera dielétrica.
- (c) (30%) Obtenha o potencial elétrico no limite em que  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $a \rightarrow 0$  e  $Q \rightarrow \infty$ , com  $p = Qa$  sendo finito. Interprete fisicamente o seu resultado.
- 

Dados:

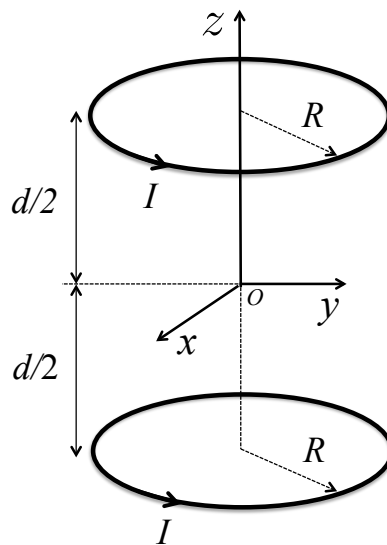
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = \text{par} \\ (-1)^{(l-1)/2} \frac{(l-1)!}{2^l (\frac{l+1}{2})! (\frac{l-1}{2})!}, & l = \text{impar}. \end{cases}$$

---

**QUESTÃO 2 – MAGNETOSTÁTICA: LEI DE BIOT-SAVART**

- (a) (20%) Calcule o campo magnético  $\vec{B}$  a uma distância  $z$  ao longo do eixo de simetria cilíndrica de uma espira circular de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $I$ .
- (b) (20%) Considere agora duas espiras idênticas de raios  $R$  com seus planos paralelos e separadas por uma distância  $d$ , conforme mostrado na figura abaixo. Calcule o campo magnético ao longo do eixo  $z$ , até segunda ordem em  $z/d$ , quando cada uma das espiras é percorrida por uma corrente  $I$ , circulando no mesmo sentido.
- (c) (40%) Use o resultado anterior e o fato de que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  para obter as componentes transversais,  $B_x$  e  $B_y$ , do campo magnético em pontos próximos ao eixo das espiras.
- (d) (20%) Analise seu resultado para o caso  $d = R$  e esboce as linhas de campo desta distribuição de correntes.




---

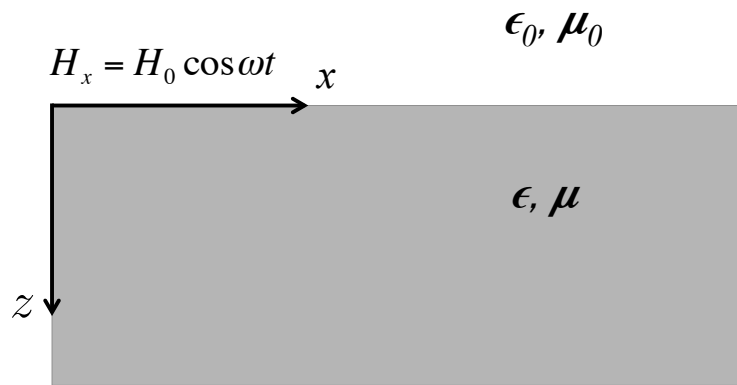
Dados:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

---

**QUESTÃO 3 – CAMPOS QUASE-ESTÁTICOS**

Um condutor semi-infinito de condutividade  $\sigma$  ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ), permissividade  $\epsilon$  e permeabilidade  $\mu$  ocupa a região  $z \geq 0$ , tendo o vácuo na região  $z < 0$ . A superfície  $z = 0^-$  está sujeita a um campo magnético na direção  $x$ , espacialmente constante, mas que varia no tempo e definido pela parte real de  $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$ , com  $H_0$  real. Considere o meio bom condutor, com  $\sigma \gg \omega\epsilon$ .



- (a) (20 %) Obtenha a equação (tipo difusão) para o campo magnético no interior do condutor ( $z > 0$ ).
  - (b) (30 %) Use as condições de contorno na interface  $z = 0$  para calcular o campo magnético,  $H_x(z, t)$ , no condutor ( $z > 0$ ) e o comprimento de penetração  $\delta$ .
  - (c) (40 %) Determine a densidade de corrente induzida no meio,  $\vec{J}(z, t)$ .
  - (d) (10 %) Calcule a potência média (temporal) dissipada no condutor.
- 

Dado:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

---

**QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS**

Uma onda eletromagnética plana, com frequência  $\omega$  e vetor de onda  $\vec{k}$ , propaga-se em um meio caracterizado pelas constantes  $\epsilon_1$  e  $\mu_1$ , com  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$  e cujo campo  $\vec{B}$  pode ser escrito como a parte real de  $\vec{B} = \hat{e}_y B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .

- (a) (30%) A partir das equações de Maxwell, obtenha o campo elétrico  $\vec{E}$  e encontre uma expressão para a velocidade de propagação da onda.
- (b) (40%) Esta onda incide na interface com um outro meio dielétrico, caracterizado pelas constantes  $\epsilon_2$  e  $\mu_2$ . Considerando que as ondas refletida e refratada também sejam ondas planas, escreva as condições de contorno para os campos e obtenha as relações entre os ângulos de incidência, reflexão e refração (lei da reflexão e lei de Snell).
- (c) (30%) No caso particular de uma incidência normal, temos que a onda refletida forma uma onda estacionária quando combinada com a onda incidente. Para o caso de termos uma fração  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) de energia refletida e uma mudança de fase  $\pi$  na reflexão do campo elétrico, ache uma expressão para a amplitude do campo elétrico total,  $E_T$ , no meio de incidência como função da distância  $d$  à interface. Determine as posições dos máximos e mínimos de  $\langle E_T^2 \rangle$ .

---

*Dado:*

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$