



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2015

Mecânica Quântica

12/03/2015 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – OBSERVÁVEIS NA MECÂNICA QUÂNTICA

Considere um sistema físico cujo espaço de estados é descrito por uma base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Nesta base, o hamiltoniano H do sistema e uma observável O são representados por:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad O = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde ω_0 e σ são constantes reais.

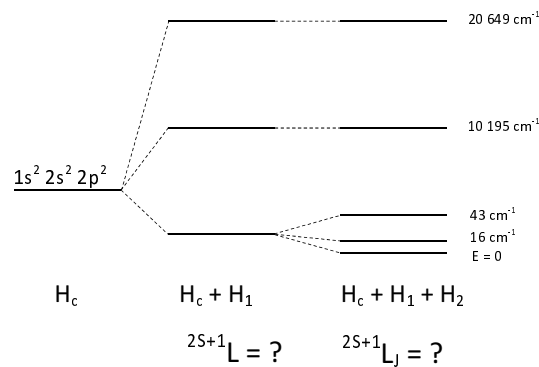
- (a) [20%] A observável O é uma constante de movimento do sistema? Justifique.
- (b) [35%] Determine os possíveis resultados de medidas das observáveis H e O .
- (c) [45%] Suponha que no instante $t = 0$ o sistema encontra-se no estado

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|1\rangle - \sqrt{2}|3\rangle \right) .$$

Qual o estado do sistema num instante t arbitrário? Calcule o valor esperado $\langle O \rangle(t) = \langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle$.

QUESTÃO 2 – ÁTOMOS DE MUITOS ELÉTRONS

Na ausência de campos externos e considerando apenas as interações de Coulomb, o Hamiltoniano de um átomo de N elétrons pode ser escrito como $H = H_c + H_1 + H_2$, onde H_c é o termo correspondente à aproximação de campo central, H_1 representa a diferença entre o total das interações de Coulomb dos elétrons e a repulsão média contida no campo central e, finalmente, H_2 corresponde às interações spin-órbita dos elétrons.



Na figura acima estão indicados os desdobramentos de energia do estado fundamental do átomo de carbono quando esses componentes do Hamiltoniano são considerados sucessivamente. Indique explicitamente:

- [30%] cada um dos termos espectroscópicos ^{2S+1}L correspondentes quando apenas o Hamiltoniano $H = H_c + H_1$ é considerado.
- [40%] cada um dos termos espectroscópicos $^{2S+1}L_J$ correspondentes quando o Hamiltoniano completo $H = H_c + H_1 + H_2$ é considerado.
- [30%] de que forma cada um dos termos $^{2S+1}L_J$ se desdobra quando um campo magnético externo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ é aplicado ao sistema.

DADO:

	m_{l1}	m_{s1}	m_{l2}	m_{s2}	$M_L = m_{l1} + m_{l2}$	$M_S = m_{s1} + m_{s2}$
1	1	1/2	1	-1/2	2	0
2	1	-1/2	0	1/2	1	0
3	0	1/2	0	-1/2	0	0
4	0	-1/2	-1	1/2	-1	0
5	-1	1/2	-1	-1/2	-2	0
6	1	1/2	0	1/2	1	1
7	1	-1/2	0	-1/2	1	-1
8	0	1/2	-1	1/2	-1	1
9	0	-1/2	-1	-1/2	-1	-1
10	1	1/2	0	-1/2	1	0
11	1	-1/2	-1	1/2	0	0
12	0	1/2	-1	-1/2	-1	0
13	1	1/2	-1	1/2	0	1
14	1	-1/2	-1	-1/2	0	-1
15	1	1/2	-1	-1/2	0	0

QUESTÃO 3 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO PARA UM SISTEMA DE DOIS NÍVEIS

Considere um sistema de dois níveis descrito pelo Hamiltoniano $H = H_0 + V(t)$. Os autoestados e autovalores do Hamiltoniano independente do tempo, H_0 , são $|1\rangle$, $|2\rangle$ e E_1 e E_2 , respectivamente, com $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar > 0$. A perturbação é nula em $t = 0$. Na representação de interação a evolução do sistema é descrita por $|\psi, t\rangle_I = \sum_{m=1,2} c_m(t) |m\rangle$.

- (a) [10%] Mostre que as amplitudes $c_m(t)$ obedecem o sistema de equações diferenciais acopladas

$$i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} = \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t) .$$

- (b) [30%] A perturbação dependente do tempo que acopla os dois níveis tem a forma

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \Omega e^{i\omega t} \\ \hbar \Omega e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde a amplitude da perturbação $\hbar\Omega \in \mathbb{R}$. Obtenha explicitamente as equações diferenciais de segunda ordem que descrevem a evolução temporal das amplitudes $c_n(t)$.

- (c) [15%] No instante $t = 0$ o sistema se encontra no estado $|1\rangle$ de mais baixa energia . Nesse caso a solução exata para o nível excitado é

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2/4} \sin^2 \left[\left(\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2/4} \right) t \right] ,$$

onde $\Delta \equiv \omega - \omega_{21}$. Analise e interprete fisicamente este resultado para as situações limite em que (i) $\Delta = 0$; (ii) $\Omega \gg \Delta \neq 0$ e (iii) $\Omega \ll \Delta \neq 0$.

- (d) [30%] Use a teoria de perturbação dependente do tempo e encontre uma expressão equivalente para $|c_2(t)|_{TP}^2$.
- (e) [15%] Considere o caso ressonante, isto é $\Delta = 0$, e compare as expressões obtidas em (c) e (d). Quais as limitações do resultado encontrado por teoria de perturbação?

Sugestão: examine as expressões correspondentes para a amplitude de oscilação e a frequência angular da oscilação de $|c_2(t)|^2$.

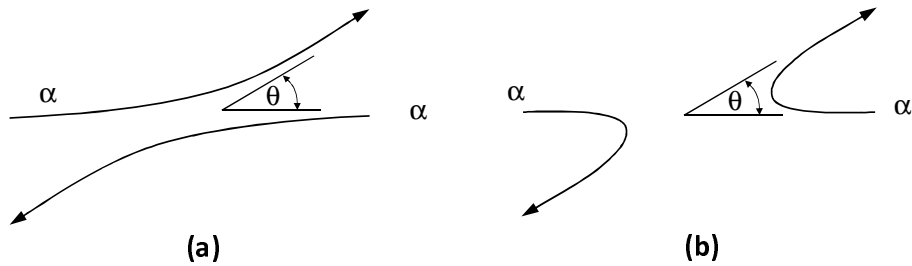
QUESTÃO 4 – ESPALHAMENTO QUÂNTICO DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS

Na teoria do quântica do espalhamento, uma onda plana $\psi(z) = A e^{ikz}$, ao encontrar um potencial espalhador centrado na origem, se transforma em uma onda espalhada que tem a forma

$$\psi(r, \theta) \approx A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right],$$

onde a amplitude de espalhamento $f(\theta)$ é relacionada com a seção de choque diferencial do centro espalhador pela expressão $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$. Suponha que a interação entre as partículas não dependa do spin.

- (a) [30%] Considere o espalhamento de dois bósons sem spin, como o de uma partícula α por outra partícula α , mostrado na figura abaixo. O processo em que a partícula incidente é espalhada por um ângulo θ é indistinguível do processo em que ela é espalhada segundo o ângulo $\pi - \theta$. Use o fato de que as partículas são indistinguíveis para escrever uma expressão devidamente simetrizada para a função de onda espalhada $\psi(r, \theta)$.



- (b) [20%] Obtenha a expressão correspondente para a seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$ e analise como o resultado para um espalhamento por um ângulo $\theta = 90^\circ$ difere do caso em que as partículas fossem distinguíveis.
- (c) [20%] Considere agora o caso do espalhamento de dois férmions idênticos de spin 1/2 no estado singleto e escreva a expressão correspondente para $d\sigma/d\Omega$.
- (d) [30%] Se os dois férmions idênticos de spin 1/2 estiverem no estado tripleto, escreva a expressão correspondente para $d\sigma/d\Omega$. Mostre que férmions em estados tripletos nunca poderão ser espalhados por um ângulo $\theta = 90^\circ$.
-