



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2015

Mecânica Clássica

13/03/2015 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

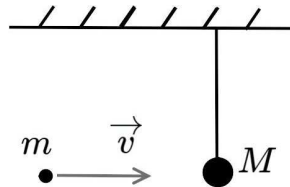
Questão 1 – Equações de Newton para o movimento

Uma partícula com massa m , em repouso na atmosfera, é solta de uma altura $y(t = 0) = h$ caindo até o solo sob influência do campo gravitacional *uniforme* terrestre. O ar oferece resistência ao movimento através de uma força proporcional à magnitude da velocidade da partícula. Considere por simplicidade que o movimento seja unidimensional na direção vertical y .

- (a) [25%] Escreva a equação diferencial de movimento.
 - (b) [25%] Resolva a equação de movimento para determinar a posição $y(t)$ da partícula.
 - (c) [25%] Como se dá o movimento da partícula para um tempo muito longo após ser solta? Qual é a força *total* agindo sobre a mesma nessa situação? Identifique quantitativamente o que significa ‘tempo muito longo’ em termos de alguma escala de tempo típica do sistema.
 - (d) [25%] Calcule o trabalho realizado pela força de atrito sobre a partícula. Em que outras formas de energia é convertida a energia mecânica inicial da partícula?
-

Questão 2 – Leis de conservação

Um pêndulo ideal com massa M e comprimento ℓ se encontra em repouso em sua configuração de equilíbrio. Um projétil com massa $m \ll M$ e velocidade horizontal \vec{v} atinge a massa M e se gruda a ela, dando início à oscilação do sistema.



- (a) [20%] Desenhe esquematicamente as forças *atuando sobre a massa M* do pêndulo no *instante exato* da colisão, indicando todos os pares de ação-reação envolvidos. Em particular, responda: que força se caracteriza como o par de ação-reação da força peso agindo sobre a massa M ?
 - (b) [20%] Calcule a velocidade com que o pêndulo inicia seu movimento. Utilize um princípio de conservação (por exemplo, momento total ou energia mecânica), *justificando porque se aplica ao caso*.
 - (c) [20%] Determine a amplitude angular θ_0 de oscilação do pêndulo. Utilize para tanto um princípio de conservação, *justificando porque se aplica ao caso*. Para que faixa de velocidades v do projétil vale a aproximação de pequenas oscilações $\theta_0 \ll 1$? Aproxime o resultado em primeira ordem na razão m/M .
 - (d) [20%] A energia mecânica do projétil pode ser totalmente transferida para o pêndulo? Determine a fração de energia mecânica perdida ou descreva o processo de transferência de energia no caso de ser conservada a mesma.
 - (e) [20%] Supondo que valha a aproximação de pequenas oscilações $\theta_0 \ll 1$, discuta como a *amplitude angular* θ_0 e a frequência ω de oscilação do pêndulo se alterariam caso a *velocidade* do projétil dobrasse de magnitude.
-

Questão 3 – Forças centrais

Um satélite de telecomunicações se encontra em órbita circular em torno da Terra. A energia potencial do satélite no campo gravitacional terrestre segue a expressão

$$U_g(r) = -\frac{GmM}{r}, \quad (1)$$

em que $\vec{r} = r\hat{r}$ é a posição do satélite (massa m) em relação ao centro da Terra (cuja massa vale $M \gg m$).

- (a) [25%] Mostre que o momento angular \vec{L} é conservado. Mostre que sua magnitude vale $L = mr^2\dot{\theta}$.
- (b) [25%] Mostre que a energia mecânica E do satélite pode ser escrita na forma unidimensional

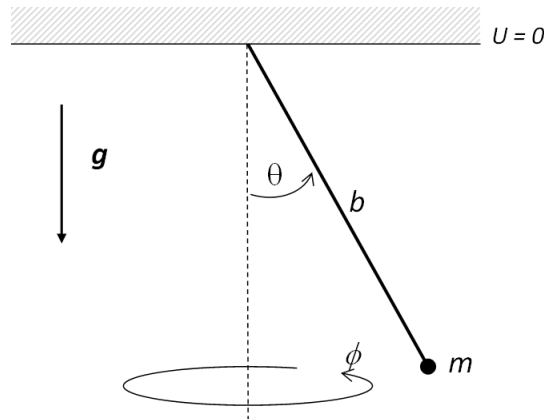
$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r), \quad (2)$$

em que $U(r) = U_g(r) + U_c(r)$ é a energia potencial efetiva do satélite. Encontre a expressão para a energia potencial centrífuga $U_c(r)$ utilizando a conservação do momento angular.

- (c) [25%] Investigue a forma da energia potencial $U(r)$ para *descrever em detalhe todos os tipos* possíveis de trajetória. Em particular, mostre que a órbita circular (i.e. $r(t) = r_0$) corresponde à trajetória de mínima energia U_0 para uma magnitude fixa L do momento angular.
- (d) [25%] Calcule a frequência de pequenas oscilações radiais do satélite caso sua energia seja ligeiramente maior do que U_0 . A trajetória do satélite é fechada? Justifique.
-

Questão 4 – Mecânica lagrangiana

A figura mostra um pêndulo esférico de massa m e comprimento b . Utilize o ponto de suspensão do pêndulo como referência para a energia potencial gravitacional.



- (a) [25%] Obtenha a função lagrangiana do sistema em função das coordenadas angulares azimutal θ e polar ϕ .
 - (b) [15%] Escreva as equações de lagrange para o movimento.
 - (c) [35%] Deduza a função hamiltoniana do sistema utilizando a transformada de Legendre.
 - (d) [15%] Escreva as equações canônicas de Hamilton para o movimento.
 - (e) [10%] Existe alguma coordenada cujo momento conjugado seja conservado? Justifique sua resposta.
-