



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2015

Eletrodinâmica Clássica

10/03/2015 - 09:00 às 12:00 h

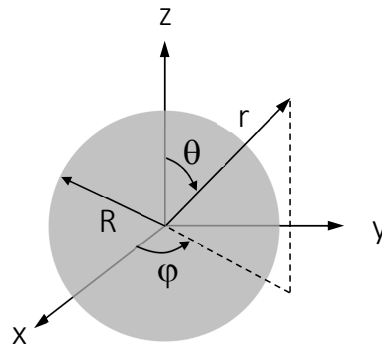
(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – CAMPO ELÉTRICO DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

Uma esfera de raio R contém uma distribuição de carga cuja densidade volumétrica é

$$\rho(r, \theta, \varphi) = k \cos \varphi \quad \text{para } r < R,$$

onde (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas, definidas na figura abaixo

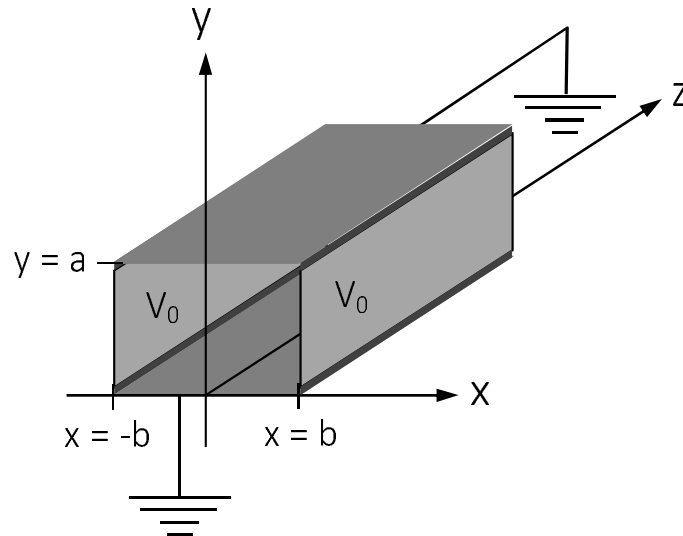


- (a) [30%] Determine a carga total da esfera.
- (b) [30%] Determine o valor do momento de dipolo dessa distribuição.
- (c) [20%] Calcule o potencial elétrico dessa distribuição para um ponto situado sobre o eixo \hat{x} positivo a uma distância $x \gg R$.
- (d) [20%] Calcule o campo elétrico dessa distribuição para um ponto situado sobre o eixo \hat{y} positivo a uma distância $y \gg R$.

Sugestão: antes de iniciar o problema, faça um esboço da distribuição de carga, considerando sua simetria.

QUESTÃO 2 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NA ELETROSTÁTICA

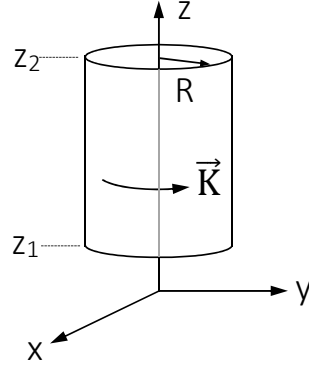
Duas lâminas condutoras muito longas são colocadas horizontalmente, uma em $y = 0$ e a outra em $y = a$. As duas peças são aterradas. Para formar um tubo retangular, são colocadas duas fitas metálicas verticais em $x = \pm b$ que são mantidas num potencial V_0 , conforme mostrado na figura abaixo. Uma camada muito fina de material isolante é colocada em cada aresta para colar as peças e isolar eletricamente as paredes umas das outras.



- (a) [40%] Use as condições de contorno adequadas para obter uma solução geral para o potencial elétrico na situação descrita acima.
- (b) [30%] Determine as constantes de integração e obtenha o potencial explicitamente.
- (c) [30%] Determine o vetor campo elétrico dentro do tubo.
-

QUESTÃO 3 – CAMPO MAGNÉTICO DE UM SOLENÓIDE

Um solenóide cilíndrico de raio R , centrado no eixo \hat{z} e localizado na região $z_1 < z < z_2$ transporta uma corrente superficial azimutal $\vec{K} = K\hat{\varphi}$, conforme a figura abaixo.



- (a) [20%] Usando a lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^2a' \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int R d\varphi dz' K \hat{\varphi} \times \frac{z\hat{z} - (R\hat{\rho}' + z'\hat{z})}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}},$$

calcule o valor do campo magnético ao longo do eixo \hat{z} .

- (b) [20%] Faça um esboço de seu resultado representando a variação de $B/\mu_0 K$ como função de z/R para $-6 < z/R < 4$.

- (c) [20%] Use a expressão para o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^2a' \frac{\vec{K}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{R d\varphi dz' K \hat{\varphi}'}{[R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2]^{1/2}}$$

e calcule \vec{A} para pontos próximos ao eixo \hat{z} , isto é $\rho \ll R$.

- (d) [20%] Calcule o campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ para pontos próximos ao eixo \hat{z} e compare com o resultado obtido no item (a).

- (e) [20%] Suponha que a amplitude da corrente varia lentamente, na forma $K(t) = K_0 \cos(\omega t)$. Obtenha o campo elétrico próximo ao eixo \hat{z} .

DADOS:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{[1 + (\xi - \xi_0)^2]^{3/2}} = \frac{\beta - \xi_0}{\sqrt{1 + (\beta - \xi_0)^2}} - \frac{\alpha - \xi_0}{\sqrt{1 + (\alpha - \xi_0)^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi' d\varphi' \cos(\varphi - \varphi') = \pi \varphi$$

QUESTÃO 4 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Uma onda eletromagnética incide obliquamente sobre uma interface plana entre dois meios não-magnéticos, conforme a Fig. 1. Os campos elétrico e magnético incidentes são ondas planas da forma $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$ e $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$, respectivamente, com expressões análogas para as ondas refletida e transmitida. O índice de refração de cada meio é n_j , com $j = 1, 2$.

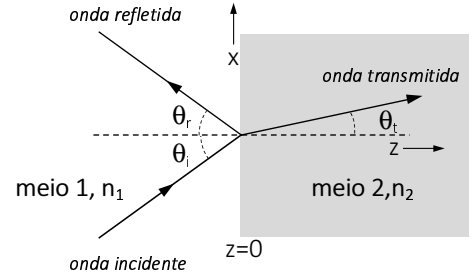


Figura 1

- (a) [30%] Escreva as condições de contorno para as componentes de \vec{E} e \vec{B} paralelas e perpendiculares ao plano de incidência (xz).
- (b) [40%] Considere caso em que todos os vetores campo magnético são perpendiculares ao plano de incidência. Use as condições de contorno acima para demonstrar as relações de Fresnel

$$E_r = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_i \quad ; \quad E_t = \frac{2}{\alpha + \beta} E_i \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad ; \quad \beta = \frac{n_2}{n_1} .$$

Obtenha as relações correspondentes para os coeficientes de reflexão e de transmissão definidos respectivamente por

$$R_p = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)^2 \quad \text{e} \quad T_p = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_t}{E_i} \right)^2 .$$

- (c) [20%] Os gráficos da Fig. 2 mostram a dependência com o ângulo de incidência θ_i dos coeficientes de reflexão (linha contínua) e de transmissão (linha tracejada) a partir do ar ($n_1 = 1$) para o vidro ($n_2 = 1,5$). Em (a) os campos *magnéticos* são perpendiculares (B_\perp) ao plano de incidência e em (b) os campos *elétricos* são perpendiculares (E_\perp) ao plano de incidência.

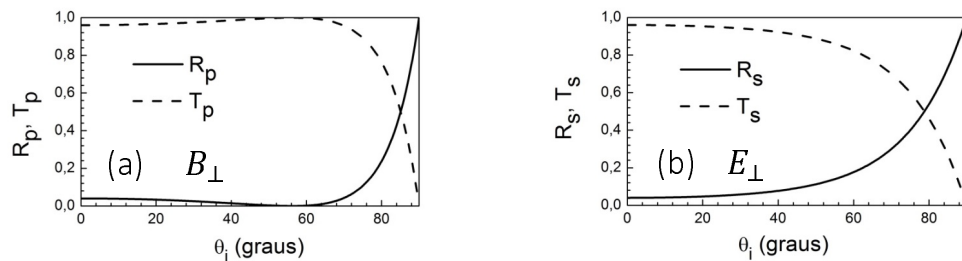


Figura 2

Use estas curvas para comentar sobre a natureza da luz refletida para ângulos de incidência no intervalo $20^\circ < \theta_i < 80^\circ$.

- (d) [10%] Com base nesta análise, explique a diferença da imagem da janela nas duas fotografias da Fig. 3, sugerindo uma maneira como o fotógrafo pode haver conseguido uma imagem melhor do interior do quarto na fotografia (II).



(I)



(II)

Figura 3

FORMULÁRIO

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$$

CONSTANTES FÍSICAS

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$
