



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-graduação em Estatística

CÉSAR DIOGO BEZERRA DA SILVA

ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE UMA CLASSE DE
AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS COM
INTERAÇÃO NÃO LOCAL

Recife
2018

César Diogo Bezerra da Silva

**Análise de Convergência de uma Classe de Autômatos Celulares Probabilísticos com
Interação Não Local**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística. Área de Concentração: Probabilidade.

Orientador: **Prof. Dr. Alex Dias Ramos**

Recife-PE
2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586a Silva, César Diogo Bezerra da
Análise de convergência de uma classe de autômatos celulares probabilísticos com interação não local / César Diogo Bezerra da Silva. – 2018. 48 f.: il., fig.

Orientador: Alex Dias Ramos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2018.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística. 2. Autômatos celulares probabilísticos. I. Ramos, Alex Dias (orientador). II. Título.

310

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2018-036

CÉSAR DIOGO BEZERRA DA SILVA

**ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE UMA CLASSE DE AUTÔMATOS
CELULARES PROBABILÍSTICOS COM INTERAÇÃO NÃO LOCAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 24 de janeiro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Alex Dias Ramos
UFPE

Prof. Getúlio José Amorim do Amaral
UFPE

Prof. Pablo Martin Rodriguez
USP

Dedico esta dissertação

Aos meus pais, Paulo Manoel e Marinalva Bezerra, e ao meu irmão, Carlos Diego, por todo amor, carinho, dedicação e fé nos momentos das mais remotas possibilidades.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a força que eu precisava para conseguir concluir mais esta etapa.

Aos meus pais, Paulo Manoel e Marinalva Bezerra, e o meu irmão Carlos Diego, por serem a melhor família que eu poderia ter, dando apoio, amor e com muita fé nos momentos mais difíceis.

Aos familiares, minha tia Marineide, que tenho como uma segunda mãe, meus tios Edivaldo, Gorete, Joel, Joselma, Josias, Josina, Marliete, Nazaré, Pedro, minha avó, Amara, minha cunhada, Iliana, e aos demais familiares por toda oração, força e torcida.

Ao meu orientador, prof. Dr. Alex Dias Ramos, por toda paciência e empenho e por acreditar em mim nos momentos mais delicados que passei aqui. Ele que me inspirou desde o primeiro dia de aula e que, após esse período do mestrado, me fez confirmar todas as expectativas sobre ele. Concluo o curso admirando ainda mais a pessoa e profissional que ele é.

Aos amigos, Alex, Jessica, Danilo, Risomario, Flávia, Aurélio, Hugo, Ana Cristina, Jairo, Alexandre, Marcones, Alice, João, Bruna, Abel, Wenia, Yuri Alves, Yuri Marti, Inara, Jhonnata, Jucelino, Vinicius, José Valdenir e Nayara por cada momento que tivemos, sendo eles de estudos, de distração ou simplesmente de um ombro amigo nas horas de medo e angústia.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), em especial os que tive a honra e o prazer de aprender e crescer mais a cada dia. São eles: Prof. Dr. Alex Ramos, Prof. Dr. Getulio Amorim, Prof^a. Dr^a. Maria do Carmo, Prof^a. Dr^a. Audrey Cisneyros, Prof. Dr. Gaus Cordeiro, Prof. Dr. Aldo Garay e Prof. Dr. Francisco Cribari. Ainda, agradeço ao Prof. Dr. Raydonal Ospina, coordenador do curso, pela prestatividade e atenção nas questões extraclasse.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições que enriquecem o nosso trabalho.

Aos meus professores da graduação, por serem exemplos de dedicação e comprometimento com o trabalho e por despertarem em mim o desejo pela pesquisa científica, em especial, Prof^a. Me. Cristiane Rocha, Prof. Dr. José Ivanildo, Prof. Me. José Marcos e Prof^a. Dr^a. Andrea Santos.

Aos servidores da UFPE, principalmente à Valéria Bittencourt, pela paciência, prestatividade e também pela sensibilidade com a qual nos trata. Agradeço à UFPE, pelo ensino de qualidade e suporte para conseguir realizar o curso e ao apoio financeiro fornecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que foi decisivo no curso, permitindo dedicação exclusiva às atividades.

Aos demais colegas que fiz no mestrado. À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse crescer e concluir o curso.

Resumo

Estudamos uma classe de autômatos celulares probabilísticos com interação não local. Cada componente pode assumir estado *zero* ou *um* e possui dois vizinhos. Se seus vizinhos têm igual estado, então a componente assume o mesmo estado de seus vizinhos. Quando os seus vizinhos tem estados distintos, temos: se o vizinho da direita está no estado *um*, então a componente assume o estado *um* com probabilidade α ou o estado *zero* com probabilidade $1 - \alpha$; se o vizinho da esquerda está no estado *zero*, então a componente assume o estado *um* com probabilidade β ou o estado *zero* com probabilidade $1 - \beta$. Consideramos um conjunto de medidas iniciais do nosso processo. Para estas medidas, provamos que o processo sempre converge fracamente para a medida concentrada na configuração cujo todas as componentes tem estado *zero*. Mostramos que o tempo médio desta convergência apresenta um tipo de transição de fase. Numa direção, se $\alpha \geq 1 - \beta$, então este tempo médio é infinito; na outra direção, se $\alpha < 1 - \beta$ e a distância entre os vizinhos é de uma unidade, então este tempo médio é finito. Neste caso, obtemos um limite superior para o tempo médio de convergência, o qual é uma função linear da medida inicial. Por meio dos nossos resultados, foi possível estabelecer novas características em alguns processos conhecidos na literatura. Também apresentamos algumas análises numéricas do nosso processo.

Palavras-chaves: Autômatos celulares probabilísticos. Interação não local. Tempo médio de convergência.

Abstract

We studied a class of probabilistic cellular automata with non-local interaction. Each component can assume state *zero* or *one* and it has two neighbors. If its neighbors are in equal state, then the component assume equal state of its neighbors. When its neighbors are in different states, then: if the right neighbor is in state *one*, then the component assume state *one* with probability α or state *zero* with probability $1 - \alpha$; if the right neighbor is in state *zero*, then the component assume state *one* with probability β or state *zero* with probability $1 - \beta$. Let us consider a set of initial measures to our process. For these measures, we prove that the process always converges weakly to the measure concentrated in the configuration whose all the components are in state *zero*. We show that the mean time of convergence exhibit a kind of phase transition. At one hand, if $\alpha \geq 1 - \beta$, the mean time is infinity; on the other hand, if $\alpha < 1 - \beta$ and the distance between neighbors is one unit, then this mean time is finite. In this case, we obtain an upper bound for the convergence time, which is a linear function of the initial measure. Through our results, it was possible to establish new characteristics in some well-known processes in the literature. Also, we presented some numerical analysis of our process.

Key-words: Probabilistic cellular automata. Non-local interaction. Mean time of convergence.

Lista de Figuras

2.0.1	<i>Ilustração de uma interação não-local, considerando $p < q$.</i>	14
2.0.2	<i>Ilustração do fragmento do processo $p = -1$ e $q = 4$.</i>	15
3.2.1	<i>Ilustração de uma possível ação do Operador de Percolação.</i>	19
3.2.2	<i>Ilustração de uma possível ação do Operador de Vasilyev.</i>	21
4.1.1	<i>Ilustração de um $(10, -1)$-salto e um $(01, -1)$-salto.</i>	22
4.1.2	<i>Ilustração da ação do operador T_p.</i>	23
4.3.1	<i>Diagrama do Processo de Nascimento e Morte.</i>	28
4.4.1	<i>Ilustração de um fragmento do nosso processo, o qual ocorre com probabilidade positiva. Do lado direito são descritos os valores correspondentes de X_t</i>	32

Lista de Notações

\mathbb{Z} - Conjunto dos Números Inteiros.

$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ - Espaço de configurações.

Δ - Conjunto das ilhas de uns.

\mathcal{M} - Conjunto das medidas normalizadas na σ -álgebra gerada pelos cilindros em Ω .

\mathcal{A} - Conjunto das medidas normalizadas na σ -álgebra gerada pelos cilindros em Δ .

δ_1 - Medida concentrada na configuração todos uns.

δ_0 - Medida concentrada na configuração todos zeros.

δ_x - Medida concentrada na configuração x .

$\mathbf{P} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ - Operador \mathbf{P} agindo de \mathcal{M} para \mathcal{M} .

$<$ - Relação de ordem para medidas e operadores.

$V(i)$ - Vizinhança de i .

$F_{(p,q)}$ - Operador F de vizinhança (p, q) .

comprimento - Comprimento de uma ilha.

gigante(μ) - Ilha de maior comprimento.

$\tau_{\mu}^{(p,q)}$ - Tempo de alcance à configuração todos zeros, com medida inicial μ e vizinhança (p, q) .

$\mathbf{P}_{(p,q)}$ - Operador de Percolação na vizinhança (p, q) .

$\mathbf{D}_{(p,q)}$ - Operador determinístico na vizinhança (p, q) .

\mathbf{R}_{α} - Operador aleatório.

\mathbf{S} - Operador do processo Stavskaya's.

\mathbf{V} - Operador de Vasilyiev.

\mathcal{S}_{01}^i - Salto de 0 para 1 na posição i .

\mathcal{S}_{10}^i - Salto de 1 para 0 na posição i .

X - Processo X .

H_i - Tempo de atingir o estado zero, dado que o processo X iniciou no estado i .

$\mathbb{E}(H_i)$ - Tempo esperado até o processo X atingir o estado zero, dado que ele iniciou no estado i .

T_i - Operador de deslocamento em i unidades.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	DEFINIÇÕES E TEOREMAS	13
3	ORDEM E APLICAÇÕES	17
3.1	Ordem	17
3.2	Aplicações	18
3.2.1	<i>Operador de Percolação</i>	18
3.2.2	<i>Processo de Stavskaya</i>	20
3.2.3	<i>Processo de Vasilyev's</i>	20
4	PROVAS DOS TEOREMAS	22
4.1	Propriedades de $F_{(p,q)}$	22
4.2	Prova do Teorema 1	25
4.3	O Processo de Nascimento e Morte, X	27
4.4	O Processo X e o Operador F	31
4.5	Prova do item (A.2) do Teorema 2	32
4.6	Prova do item (B.2) do Teorema 2	34
5	ESTUDO NUMÉRICO	36
5.1	Aproximação de Campo Médio	36
5.2	Visualização Computacional do Processo $F_{(p,q)}$	38
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A - UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA	45
	APÊNDICE B - PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE	46
	B.1 Tempo esperado até a extinção	46

1 INTRODUÇÃO

Autômatos celulares probabilísticos, ou ACP como denotaremos por simplicidade, são bastante utilizados para modelagem de processos físicos, químicos e biológicos. ACP são sistemas dinâmicos estocásticos com tempo discreto. Geralmente, nestes sistemas, estudos teóricos tem como foco a ergodicidade (TOOM, 1980), isto é, se há uma medida invariante e havendo tal medida se dada qualquer medida inicial o sistema convergirá para esta. Ainda nesta direção, uma pergunta natural refere-se ao tempo médio necessário para o sistema atingir o equilíbrio. Geralmente neste tipo de análise é considerado espaço finito, e sua motivação vem de resultados de simulação computacional.

Quando o processo é não ergódico, pode existir ou não uma medida invariante, contudo mostrar sua existência ou não é uma tarefa difícil (DEPOORTER; MAES, 2006). Alguns estudos teóricos e computacionais, (SA; MAES, 1992), (TOOM, 1995b) e (TAGGI, 2015), descrevem o tempo esperado para a convergência de alguns processos não ergódicos em um espaço finito.

Resultados matematicamente formais em ACP são poucos, principalmente quando é retirada a hipótese da monotonicidade do processo. Em (RAMOS; LEITE, 2017) foi estudada uma classe de ACP não monótona. Foi exibido o tempo médio de convergência, sendo considerado o espaço infinito. Até então, ao menos pelo que sabemos, não eram conhecidos na literatura estudos onde é estimado o tempo médio de convergência sob estas hipóteses. É comum nos estudos teóricos e computacionais de ACP considerar a vizinhança sendo os vizinhos mais próximos. Contudo, no mundo físico, algumas situações violam a suposição de que a interação em determinados sistemas dinâmicos é local. Suponha, por exemplo, a transmissão de sinal de um neurônio para outro no cérebro, o qual ocorre através de axônios e dendritos. A distância entre dois neurônios não é relevante sobre a informação de que eles estão conectados. Em uma outra situação, dois corretores em um mercado de ações podem se comunicar via linha telefônica, independente do quão longe ou perto os dois estejam. Esses dois cenários apresentam situações que enfatizam se há conexão entre dois objetos e não na distância entre eles (LI, 1991) e (LI, 1992).

Em um estudo analítico desenvolvido em (TAGGI, 2015) é abordada uma classe de ACP, os quais são conhecidos como operadores de Percolação. Os resultados obtidos lá foram desenvolvidos com base na posição dos vizinhos, não necessariamente os mais próximos. Para cada componente há pelo menos dois vizinhos. Verificou-se o efeito da interação dos vizinhos sobre a probabilidade de transição de fase destes processos, mostrando que mudança na vizinhança afeta quantitativamente o valor crítico da transição.

Este trabalho vem colaborar no preenchimento de uma lacuna que há nos ACP com interação não local, a qual visa fornecer melhor entendimento teórico neste tipo de sistemas, dando embasamento para o uso em modelagens.

Adotaremos uma classe de ACP com interação não local, dois vizinhos e uma classe de medidas iniciais. Mostraremos sob quais condições o sistema convergirá fracamente para

uma medida concentrada na configuração com todas as componentes iguais a zero. Também, verificaremos o tempo médio desta convergência. Mostraremos quando este tempo é infinito ou quando é finito. Neste caso, obtivemos um limite superior para este tempo, o qual é uma função linear da medida inicial do processo. Também faremos alguns estudos numéricos.

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos, sendo o primeiro essa breve introdução. No capítulo 2, apresentamos algumas definições que servirão como base no desenvolvimento das provas dos nossos teoremas. No capítulo 3, são descritas as relações de ordem para medidas e operadores. Elas serão importantes na comparação entre duas ou mais medidas ou operadores. Também trazemos algumas aplicações. No capítulo 4, são feitas as demonstrações dos teoremas de interesse. No capítulo 5, realizamos alguns estudos numéricos e apresentamos algumas simulações. Por fim, no capítulo 6, trazemos algumas considerações finais e perspectivas para futuras pesquisas.

2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Os operadores aleatórios de nosso interesse são definidos no espaço de configuração $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, onde \mathbb{Z} é o conjunto dos números inteiros sendo 0 e 1 chamados de *zero* e *um* respectivamente. Chamamos uma sequência bi-infinita de *zeros* e *uns* de configuração.

Uma configuração $x \in \Omega$ é determinada pelas componentes x_i , para qualquer i pertencente a \mathbb{Z} , tal que $x_i \in \{0, 1\}$. O *espaço de configuração*, Ω , é o conjunto que contém todas as configurações. Chamamos uma configuração x , *todos zeros*, quando todas as componentes são *zeros* e *todos uns*, quando todas as componentes são *uns*.

Dizemos que duas configurações x e y estão *próximas* uma da outra se o conjunto $\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$ é finito. Chamamos de *ilha de uns* uma configuração que é próxima da configuração *todos zeros* e denotamos por Δ o conjunto de todas as ilhas de uns.

Se $x \in \Delta$, então existem posições $i < j$ tais que $x_{i+1} = x_{j-1} = 1$ e $x_k = 0$ quando $k \leq i$ ou $j \leq k$. Neste caso, dizemos que a ilha tem comprimento $j - i - 1$, essa quantidade será denotada por $\text{comprimento}(x)$.

As medidas normalizadas concentradas nas configurações *todos zeros* e *todos uns* são denotadas por δ_0 e δ_1 respectivamente. Para uma configuração x , denotamos uma medida normalizada concentrada em x por δ_x .

Definimos um *cilindro* em Ω da forma usual e denotamos um *cilindro fino* qualquer conjunto

$$\{x \in \Omega : x_i = a_i, \text{ para todo } i \in I\},$$

onde $(a_i)_{i \in I} \in \{0, 1\}^I$ e I é subconjunto finito de \mathbb{Z} . Por simplicidade, denotaremos cilindro fino por $\{x_i = a_i, i \in I\}$. Um cilindro fino é chamado *segmento cilíndrico* se os índices i_1, \dots, i_k formam um segmento em \mathbb{Z} . Seja \mathcal{M} o conjunto das medidas normalizadas na σ -álgebra gerada pelos cilindros em Ω . Isso significa que uma convergência em \mathcal{M} implica em uma convergência em todos os cilindros.

O conjunto das medidas normalizadas na σ -álgebra gerada pelo cilindro em Δ é denotado por \mathcal{A} . Chamamos qualquer $\mu \in \mathcal{A}$ *arquipélago de uns*.

Um operador P é uma função do conjunto \mathcal{M} em \mathcal{M} , isto é $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Dados um operador P e uma medida inicial $\mu \in \mathcal{M}$, a sequência aleatória $\mu, \mu P, \mu P^2, \dots$ define nosso processo aleatório. Dizemos que uma medida μ é *invariante* para P se $\mu P = \mu$.

Para cada $i \in I \subset \mathbb{Z}, I$ finito, chamamos $V(i) \subset \mathbb{Z}$ o conjunto de vizinhos de i . Denotaremos $V(I) = \bigcup_{i \in I} V(i)$.

Definimos uma função $T_p : \Omega \rightarrow \Omega$ da seguinte maneira

$$(x T_p)_k = x_{k-p}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

a qual induz deslocamento de medidas. Utilizaremos a mesma notação, T_p , para indicar o operador induzido pelo deslocamento de p unidades sobre medidas.

Em nosso estudo, iremos considerar uma classe de autômatos celulares probabilísticos em \mathbb{Z} , onde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $V(k) = \{k + p, k + q\}$.

Um ACP, \mathbf{P} , é determinado pela probabilidade de transição $\theta(b_k | a_{V(k)}) \in [0, 1]$, de modo que

$$\theta(b_k | a_{k+p} a_{k+q}) \in \{0, 1\} : \sum_{b_k \in \{0,1\}} \theta(b_k | a_{k+p} a_{k+q}) = 1.$$

Logo, $\theta(0 | a_{k+p} a_{k+q}) + \theta(1 | a_{k+p} a_{k+q}) = 1$.

Os valores de $\mu\mathbf{P}$, para qualquer $\mu \in \mathcal{M}$ nos cilindros é dado por

$$\mu\mathbf{P}(y_i = b_i, i \in I) = \sum_{a_j, j \in V(I)} \mu(x_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta(b_i | a_{i+p} a_{i+q}), \quad (2.1)$$

para qualquer subconjunto finito $I \subset \mathbb{Z}$ e $b_i \in \{0, 1\}$, $i \in I$.

Imaginemos uma vizinhança com apenas duas componentes. Nesse caso, seja x_k a componente de nosso interesse e x_{k+p} , x_{k+q} a vizinhança de x_k , com $p, q \in \mathbb{Z}$. A operação ocorre conforme ilustração da figura 2.0.1.

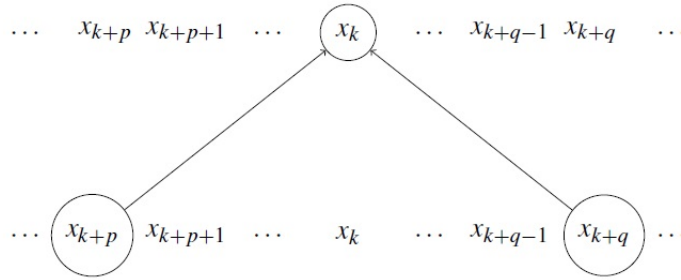


Figura 2.0.1 – Ilustração de uma interação não-local, considerando $p < q$.

Para valores fixos de p e q denotamos por $\mathbf{F}_{(p,q)}$ um operador, cujas probabilidades de transição são descritas por

$$\theta(1 | a_{k+l} a_{k+r}) = \begin{cases} a_{k+p}, & \text{se } a_{k+p} = a_{k+q}; \\ \alpha, & \text{se } a_{k+l} = 0 \text{ e } a_{k+r} = 1; \\ \beta, & \text{se } a_{k+l} = 1 \text{ e } a_{k+r} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $l = \min\{p, q\}$ e $r = \max\{p, q\}$. Se p e q são negativos, assumimos que $q < p$. Se p ou q é positivo, então $p < q$. Quando $p = 0$ e $q = 1$, denotamos $\mathbf{F}_{(p,q)}$ por \mathbf{F} .

A k -ésima componente da configuração resultante é consequência da operação com base nas componentes x_{k+p} e x_{k+q} seguindo (2.2). Na figura 2.0.2 ilustramos um fragmento da ação de $\mathbf{F}_{(-1,4)}$ sobre a medida δ_x , medida concentrada na configuração x , para algum $x \in \Omega$. Isso significa que a k -ésima componente da configuração resultante é igual a 1, pois os vizinhos de x_k , neste caso, possuem valor igual a 1.

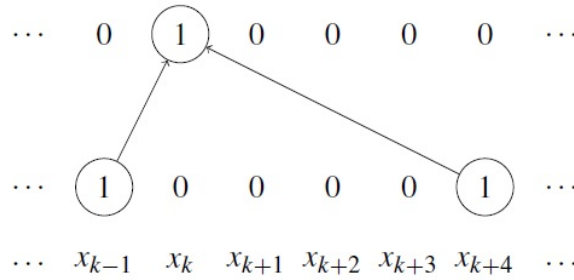


Figura 2.0.2 – Ilustração do fragmento do processo $p = -1$ e $q = 4$.

As medidas δ_0 e δ_1 são invariantes para $F_{(p,q)}$. Como consequência, para $\lambda \in [0, 1]$, $\pi_\lambda = (1 - \lambda)\delta_0 + \lambda\delta_1$ também é invariante em nosso processo.

Dados p e q , definimos a variável aleatória

$$\tau_\mu^{(p,q)} = \inf\{t \geq 0 : \mu F_{(p,q)}^t(1) = 0\}. \quad (2.3)$$

Assumimos neste caso, que o ínfimo do conjunto vazio é ∞ . Quando $p = 0$ e $q = 1$, denotamos $\tau_\mu^{(p,q)}$ por τ_μ . Note que a variável aleatória em (2.3) indica o tempo de alcance à medida δ_0 .

Como Δ é contável (ver lema 10), se $\mu \in \mathcal{A}$, então existem configurações x^1, x^2, \dots pertencentes a Δ e respectivas medidas $\delta_{x^1}, \delta_{x^2}, \dots$ de modo que μ é uma combinação convexa destas δ -medidas e denotamos gigante de μ por

$$\text{gigante}(\mu) = \max \left\{ \text{comprimento}(x^i) : \mu = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \delta_{x^i} \right\}, \quad (2.4)$$

onde k_1, k_2, \dots são valores reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{\infty} k_i = 1$. Informalmente falando, $\text{gigante}(\mu)$ é o maior comprimento das ilhas cujas δ -medidas da combinação convexa de μ estão concentradas. Caso não haja o maior comprimento, dizemos que $\text{gigante}(\mu) = \infty$. No exemplo 1, apresentamos uma situação em que o $\text{gigante}(\mu)$ é infinito.

Exemplo 1. Suponha que exista uma combinação convexa de μ tal que $\mu = k_1\delta_{x^1} + k_2\delta_{x^2} + k_3\delta_{x^3} + \dots$, onde $\text{comprimento}(x^1) = 1$, $\text{comprimento}(x^2) = 2$, \dots , $\text{comprimento}(x^n) = n$. Daí, temos que $\text{gigante}(\mu) = \infty$.

Denotamos por \mathbb{E} o valor esperado. Dados p e q , dizemos que o operador $F_{(p,q)}$ é eroder linear se para valores fixos de α e β existe um valor constante k tal que

$$\mathbb{E}(\tau_\mu^{(p,q)}) = k(1 + \text{gigante}(\mu)),$$

para todo $\mu \in \mathcal{A}$ cujo $\text{gigante}(\mu)$ é finito.

O nome eroder aqui possui um significado diferente do usado por (TOOM, 1980), (GALPERIN, 1976) e (PETRI, 1987). Lá esse nome foi usado para operadores determinísticos, enquanto aqui pensamos no sentido de convergência em operadores determinísticos.

Em nosso texto, a medida μ sempre estará se referindo a um arquipélago de uns, a menos que seja feita alguma referência contrária. Resultados análogos aos dos teoremas 1 e 2 podem ser obtidos considerando ilhas e arquipélagos de zeros.

Teorema 1. *Para $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, temos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu F_{(p,q)}^t = \delta_0.$$

Teorema 2. *Sejam $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$.*

(A.2) *Se $\alpha \geq 1 - \beta$, então $\mathbb{E}(\tau_{\mu}^{(p,q)}) = \infty$;*

(B.2) *Se $\alpha < 1 - \beta$, então $F_{(p,1+p)}$ é eroder linear.*

3 ORDEM E APLICAÇÕES

3.1 Ordem

Como é comum, assumimos que $0 < 1$. Apresentamos agora uma ordem parcial em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Dadas duas configurações x e y dizemos que x precede y , ou que y sucede x quando $x < y$ ou $y > x$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que um conjunto mensurável $S \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ é superior se

$$(x \in S \text{ e } x < y) \implies y \in S.$$

De forma análoga, um conjunto S é inferior, se

$$(y \in S \text{ e } x < y) \implies x \in S.$$

Observe que em todo conjunto superior S , a configuração *todos uns* pertence a S . Isto porque qualquer que seja $x \in S$ e sendo y a configuração *todos uns*, temos que $x < y$, implicando que $y \in S$. Logo, $S = \{1\}^{\mathbb{Z}}$ é um conjunto superior. Outro conjunto superior é $S = \Omega^{\mathbb{Z}}$.

Introduzimos uma ordem parcial em \mathcal{M} de modo que μ precede ν (ou ν sucede μ), se $\mu(S) \leq \nu(S)$ para todo supremo S (ou $\mu(S) \leq \nu(S)$ para todo ínfimo S , o que é equivalente).

A prova para os lemas 1, 2 e 3 podem ser encontradas em (TOOM; VASILYEV *et al.*, 1990) e (TOOM, 2001) nas páginas 28 e 81 respectivamente.

Lema 1. *Sejam x, y duas configurações. Um operador P em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ com probabilidade de transição $\theta(\cdot|\cdot)$ é monótono se e somente se*

$$x < y \implies \theta(I|x_{k+p}x_{k+q}) \leq \theta(I|y_{k+p}y_{k+q}) \quad (3.1)$$

Lema 2. *Se p e q são dados, então o operador $F_{(p,q)}$ é monótono.*

Sejam P e Q dois operadores de \mathcal{M} em \mathcal{M} . Dizemos que o operador P precede o operador Q , e denotamos por $P < Q$, se para todo $\mu \in \mathcal{M}$, então $\mu P < \mu Q$.

Lema 3. *Dados dois operadores P e Q em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que possuem probabilidade de transição $\theta^P(\cdot|\cdot)$ e $\theta^Q(\cdot|\cdot)$ respectivamente. Então $P < Q$ se e somente se*

$$\theta^P(I|x_{k+p}x_{k+q}) \leq \theta^Q(I|x_{k+p}x_{k+q})$$

Lema 4. *Sejam P e Q operadores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Se $P < Q$ e pelo menos P ou Q é monótono, então $P^t < Q^t$ para qualquer valor natural t .*

Prova. Suponha o caso em que apenas P é monótono. A prova segue pelo princípio de indução. *Base de indução:* $P < Q$ é dado.

Hipótese de indução: $\mathbf{P}^{t-1} < \mathbf{Q}^{t-1}$

Passo de indução: Pela hipótese de indução

$$\mu \mathbf{P}^{t-1} < \mu \mathbf{Q}^{t-1}, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

Como \mathbf{P} é monótono e $\mathbf{P} < \mathbf{Q}$, segue para todo $\mu \in \mathcal{M}$

$$\mu \mathbf{P}^t < \mu \mathbf{Q}^{t-1} \mathbf{P} \text{ e } \mu \mathbf{Q}^{t-1} \mathbf{P} < \mu \mathbf{Q}^t.$$

E por transitividade segue o resultado para este caso. O caso em que \mathbf{Q} é monótono segue de forma semelhante ao caso anterior. ■

3.2 Aplicações

3.2.1 Operador de Percolação

Consideramos o operador de percolação, $\mathbf{P}_{(p,q)}$, com dois vizinhos. O operador $\mathbf{P}_{(p,q)}$ é uma superposição de dois operadores, sendo o primeiro determinístico, denotado por $\mathbf{D}_{(p,q)}$ e o segundo aleatório, denotado por $\mathbf{R}_{1-\alpha}$, nesta ordem, conforme (TOOM; VASILYEV, *et al.* 1990), (TOOM, 2001) e (TOOM, 2013). Então $\mathbf{P}_{(p,q)} = \mathbf{R}_{1-\alpha} \mathbf{D}_{(p,q)}$. Para $x \in \Omega$ o operador $\mathbf{D}_{(p,q)}$ transforma, inicialmente, qualquer configuração x em uma configuração $x \mathbf{D}_{(p,q)}$ cujo k -ésimo componente é $(x \mathbf{D}_{(p,q)})_k = \max\{x_{k+p}, x_{k+q}\}$ e em seguida, $\mathbf{R}_{1-\alpha}$ transforma 1 em 0 com probabilidade $1 - \alpha$ independente do que acontece com as outras componentes. Uma vez que definimos $\mathbf{P}_{(p,q)}$, definiremos sua probabilidade de transição por

$$\theta(1|a_{k+p}a_{k+q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{k+p} = a_{k+q} = 0; \\ \alpha, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

e $\theta(0|a_{k+p}a_{k+q}) = 1 - \theta(1|a_{k+p}a_{k+q})$.

Para melhor entender o funcionamento de (3.2), considere o operador de percolação $\mathbf{P}_{(0,1)}$ e uma configuração x , onde x_3 assume estado 1, enquanto as demais componentes assumem estado 0. A figura 3.2.1 ilustra um fragmento da configuração x e a ação do operador de percolação sobre δ_x , medida normalizada concentrada em x . Após ação de $\mathbf{D}_{(0,1)}$, na segunda linha, as componentes x_2 e x_3 assumem estado 1. Depois ocorre a ação de $\mathbf{R}_{1-\alpha}$, o qual transforma 1 em 0 na posição 3, exemplificando o comportamento do operador de percolação.

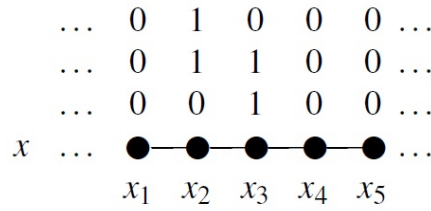


Figura 3.2.1 – Ilustração de uma possível ação do Operador de Percolação.

Nossos teoremas 1 e 2, nos possibilitam mostrar

Proposição 1. Dados $p, q \in \mathbb{Z}$,

(A.1) Se $\alpha > 0$, então $\mu \mathbf{P}_{(p,q)}^t \rightarrow \delta_0$ quando t tende a infinito.

(B.1) Se $\alpha > \frac{1}{2}$, então $\mathbf{P}_{(p,1+p)}$ é eroder linear.

Antes de mostrar a proposição 1, veremos o lema 5.

Lema 5. Dados α, β tomamos $\mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}$, o operador $\mathbf{F}_{(p,q)}$ quando $\alpha = \beta$. Então

$$\mathbf{P}_{(p,q)}^t < \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t$$

para cada valor de t .

Prova. Segue do lema 2 que o operador $\mathbf{F}_{(p,q)}$ é monótono, o que implica que $\mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}$ também é monótono. Utilizando o lema 1 e a definição de operador de percolação em (3.2) obtemos que o operador $\mathbf{P}_{(p,q)}$ é monótono. Usando o lema 4, (2.2) e (3.2) conclui-se que $\mathbf{P}_{(p,q)}^t < \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t$.

■

Agora estamos prontos para provar a proposição 1.

Prova da Proposição 1. Provaremos primeiro o item (A.1). Tome $\alpha > 0$. Pelo lema 5 temos que $\mu \mathbf{P}_{(p,q)}^t < \mu \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$. Pelo teorema 1, se $\mu \in \mathcal{A}$, então $\mu \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t \rightarrow \delta_0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{P}_{(p,q)}^t < \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t = \delta_0.$$

Como $\delta_0 < \mu$, para qualquer medida $\mu \in \mathcal{M}$, então conclui-se a prova de (A.1).

Provaremos agora o item (B.1). Sabemos que $q - p = 1$. Para $\mu \in \mathcal{A}$ definimos as variáveis aleatórias

$$\tau_{\mu}^{\mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}} = \inf\{t > 0 : \mu \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t(1) = 0\} \text{ e } \tau_{\mu}^{\mathbf{P}_{(p,q)}} = \inf\{t > 0 : \mu \mathbf{P}_{(p,q)}^t(1) = 0\}.$$

Pelo teorema 2, item (B.2), se $\alpha > \frac{1}{2}$, então existe uma constante k tal que

$$\mathbb{E}(\tau_{\mu}^{\mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}}) \leq k(1 + \text{gigante}(\mu))$$

para todo $\mu \in \mathcal{A}$ cujo $\text{gigante}(\mu)$ é finito.

Observe que se $\mathbf{P}_{(p,q)}^t < \mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}^t$ então $\tau_\mu^{\mathbf{P}_{(p,q)}} \leq \tau_\mu^{\mathbf{F}_{(p,q,\alpha)}}$, implicando que

$$\mathbb{E}(\tau_\mu^{\mathbf{P}_{(p,q)}}) \leq k(1 + \text{gigante}(\mu)).$$

■

3.2.2 Processo de Stavskaya

O operador de percolação quando $p = 0$ e $q = 1$ corresponde ao processo conhecido por *Processo de Stavskaya*, como em (TOOM, 1968) e (STAVSKAYA; PIATETSKI-SHAPIRO, 1971), que é o análogo discreto do processo de contato (LIGGETT, 1985). Denotamos esse processo por \mathbf{S} , logo $\mathbf{S} = \mathbf{P}_{(0,1)}$.

Sabemos que $\delta_0 \mathbf{S} = \delta_0$. Em (TOOM, 1968) foi provado que existe $0.09 \leq \alpha^* \leq 0.323$ tal que:

- (i) Se $\alpha < \alpha^*$, então $\mu \mathbf{S}^t(1) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ qualquer que seja $\mu \in \mathcal{M}$;
- (ii) Se $\alpha > \alpha^*$, então $\delta_1 \mathbf{S}^t(1) > 0$ para qualquer $t > 0$.

Isso quer dizer que o processo de Stavskaya mostra uma espécie de transição de fase. O item (A.1) da proposição 1 mostra que a transição de fase em \mathbf{S} não pode ser obtida para $\mu \in \mathcal{A}$.

3.2.3 Processo de Vasilyev's

O operador de *Vasilyiev*, descrito por (TOOM, 2001) (ver página 48) é similar ao operador de Stavskaya, mas é não monótono, o que torna difícil o seu estudo teórico. Denotaremos este operador por \mathbf{V} .

O operador \mathbf{V} é descrito tomando-se $p = 0$ e $q = 1$ e com probabilidade de transição dada por:

$$\theta(1|a_k a_{k+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } a_k = a_{k+1}; \\ \alpha, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Nessas condições $\delta_0 \mathbf{V} = \delta_1 \mathbf{V} = \delta_0$.

O operador \mathbf{V} não é monótono. De fato, se assumirmos a monotonicidade de \mathbf{V} estaremos dizendo que, para qualquer medida δ_x temos

$$\delta_x < \delta_1 \implies \delta_x \mathbf{V} < \delta_1 \mathbf{V} = \delta_0,$$

implicando que $\delta_x \mathbf{V} = \delta_0$, o que não é sempre verdade, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2. Se tomarmos δ_x a medida concentrada na configuração onde $x_k = 1$ e $x_i = 0$, para $i \neq k$, então após ação de \mathbf{V} , teremos $\delta_x \mathbf{V}(0) < 1$ com probabilidade positiva.

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
x & \cdots & x_{k-3} & x_{k-2} & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & x_{k+3} & \cdots
\end{array}$$

Figura 3.2.2 – Ilustração de uma possível ação do Operador de Vasilyev.

Uma ilustração do que foi descrito pode ser vista na figura 3.2.2.

Contudo, simulações computacionais sugerem que existe $0.1 < \alpha^* < 0.2$ tal que se $\alpha < \alpha^*$ então $\nu V^t(0) < 1$ para todo $t > 0$, onde a distribuição inicial ν é uma medida do produto em que $\nu(1) = \frac{1}{2}$. Não há uma prova rigorosa desta transição de fase.

Proposição 2. (A.2) Existe $0.09 \leq \alpha \leq 0.323$ em que se $\alpha > \alpha^*$, então $\mu V^t(1) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para toda distribuição inicial $\mu \in \mathcal{M}$;
(B.2) Para todo $\alpha > 0$, se $\mu \in \mathcal{A}$, então $\mu V^t \rightarrow \delta_0$ quando t tende a infinito;
(C.2) Se $\alpha > \frac{1}{2}$, então V é eroder linear.

Prova. A partir das expressões (3.2), (3.3) e pelo lema 3, concluí-se que $V < S$. Sabemos ainda que S é monótono. Segue do lema 4 que $V^t < S^t$ e concluí-se pelo lema 5 que

$$V^t < S^t < F_{(0,1,\alpha)}^t \quad (3.4)$$

Tomando $\alpha > \alpha^*$ temos que $\mu S^t \rightarrow \delta_0$ quando $t \rightarrow \infty$, e usando (3.4) concluímos a prova de (A.2). Usando agora a proposição 1 e (3.4) concluímos a proposição 2. ■

O item (A.2) mostra que o operador V é ergódico quando $\alpha \geq 0.323$. Então para que V seja não ergódica é necessário que $\alpha < 0.323$. O item (B.2) mostra que não é possível provar a não ergodicidade de V usando $\mu \in \mathcal{A}$ como distribuição inicial.

4 PROVAS DOS TEOREMAS

4.1 Propriedades de $F_{(p,q)}$

Dizemos que uma configuração x é um $(10, i)$ -salto se houver uma posição i tal que $x_j = 1$ para todo $j < i$ e $x_j = 0$ para todo $j \geq i$. Denotamos a medida concentrada no $(10, i)$ -salto por S_{10}^i . De maneira semelhante, dizemos que uma configuração x é um $(01, i)$ -salto se houver uma posição i tal que $x_j = 0$ para todo $j < i$ e $x_j = 1$ para todo $j \geq i$. Denotamos a medida concentrada no $(01, i)$ -salto por S_{01}^i . Na figura 4.1.1 mostramos $(10, -1)$ -salto e $(01, -1)$ -salto.

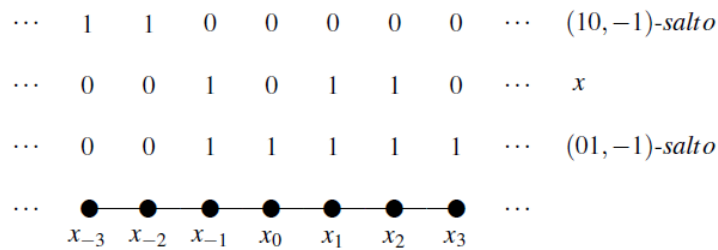


Figura 4.1.1 – Ilustração de um $(10, -1)$ -salto e um $(01, -1)$ -salto.

Iremos verificar algumas características do operador $F_{(p,q)}$. Exibiremos uma outra maneira de escrever este operador, a qual nos proporcionará provar nossos resultados.

Na figura 4.1.2, temos a esquerda, a ação do operador $F_{(p,q)}$ para alguns valores de p e q estabelecidos. A direita temos a ação da função T_p composta com $F_{(0,q-p)}$.

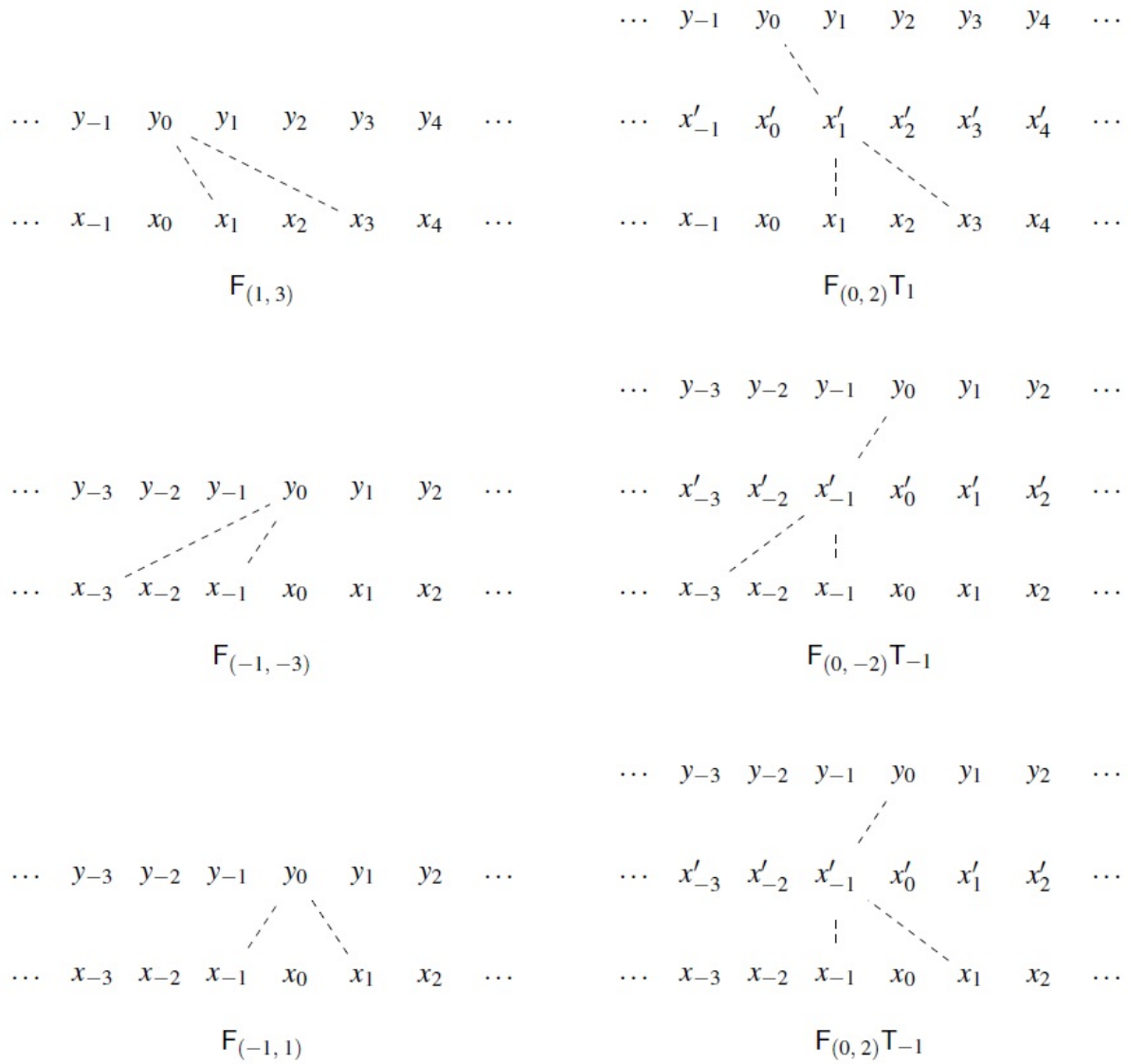


Figura 4.1.2 – Ilustração da ação do operador T_p .

Estas ilustrações clarificam que

$$\mathbf{F}_{(p,q)} = \mathbf{F}_{(0,q-p)} \mathbf{T}_p. \quad (4.1)$$

Esse fato será utilizado em alguns pontos do nosso texto. Uma consequência desta igualdade é apresentada no lema 6.

Lema 6. *Seja $x \in \Delta$, então para cada valor $t \in \mathbb{N}$*

$$\delta_x \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) = \delta_x \mathbf{F}_{(0,q-p)}^t(1)$$

Prova. Por (4.1), temos

$$\delta_x \mathbf{F}_{(p,q)} = \delta_x (\mathbf{F}_{(0,q-p)} \mathbf{T}_p).$$

Note que T_p não modifica a densidade de uns na medida. Logo,

$$\delta_x (\mathbf{F}_{(0,q-p)} T_p) (1) = \delta_x \mathbf{F}_{(0,q-p)}(1) \implies \delta_x \mathbf{F}_{(p,q)}(1) = \delta_x \mathbf{F}_{(0,q-p)}(1).$$

■

Agora, nós exibiremos um acoplamento entre dois processos gerados pelos operadores $\mathbf{F}_{(0,1)}$ e $\mathbf{F}_{(0,q-p)}$, com p ou q positivo e tendo a mesma condição inicial. Este acoplamento está definido pelo pseudo-código, Algoritmo 1, onde $x(j, t)$ e $y(j, t)$ significam componentes de duas marginais no ponto j no tempo t . Este tipo de acoplamento é descrito com mais detalhe em (TOOM, 1995a).

Algoritmo 1: ACOPLAMENTO ENTRE OS PROCESSOS GERADOS POR $\mathbf{F}_{(0,1)}$ E $\mathbf{F}_{(0,q-p)}$

COM $q - p > 0$

```

1 Faça  $cont \leftarrow 0$  e  $q - p > 0$ 
2 fixe  $i \in \mathbb{Z}$ 
3 para cada  $j \in \mathbb{Z}$  fazer
4    $x(j, 0) \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq i \\ 0 & \text{se } j > i \end{cases}$ 
5    $y(j, 0) \leftarrow x(j, 0)$ 
6 fim
7 para  $t \in \mathbb{N}$  fazer
8   para  $j \in \mathbb{Z}$  fazer
9      $U_j^t \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ 
10  fim
11  para  $j \in \mathbb{Z}$  fazer
12     $x(j, t) \leftarrow \begin{cases} x(j, t-1) & \text{se } j \neq i \\ 0 & \text{se } j = i \text{ e } U_j^t > \beta \end{cases}$ 
13     $y(j, t) \leftarrow \begin{cases} y(j, t-1) & \text{se } y(j, t-1) = y(j+q-p, t-1) \\ 1 & \text{se } y(j, t-1) = 0, y(j+q-p, t-1) = 1 \text{ e } U_j^t < \alpha \\ 0 & \text{se } y(j, t-1) = 0, y(j+q-p, t-1) = 1 \text{ e } U_j^t > \alpha \\ 1 & \text{se } y(j, t-1) = 1, y(j+q-p, t-1) = 0 \text{ e } U_j^t < \beta \\ 0 & \text{se } y(j, t-1) = 1, y(j+q-p, t-1) = 0 \text{ e } U_j^t > \beta \end{cases}$ 
14  fim
15 fim
16 se  $x(i, t) = 0$  e  $y(i, t) = 0$  então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
17  $i \rightarrow i - 1$ 

```

Lema 7. Para qualquer $i \in \mathbb{Z}$ e $q - p > 0$, temos

$$\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(0,q-p)}^t(1) \leq \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t(1).$$

Prova. Em nosso pseudo-código, linhas 4 – 5, descrevemos a condição inicial \mathcal{S}_{10}^i . Das linhas 12 – 13, a ação do operador \mathbf{F} e $\mathbf{F}_{(0,q-p)}$ respectivamente. Vemos que $\mathbb{P}(y(j, t) \leq x(j, t)) = 1$ para cada $t \in \mathbb{N}$. ■

Lema 8. Se $\beta \in (0, 1)$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t(1) = 0.$$

Prova. No nosso pseudo-código, linha 17, $cont$ é uma variável aleatória onde seu valor na t -ésima iteração é dado por

$$\sum_{N=1}^t L_N^{1-\beta}$$

onde $L_1^{1-\beta}, L_2^{1-\beta}, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{P}(L_1^{1-\beta} = 1) = 1 - \beta$ e $\mathbb{P}(L_1^{1-\beta} = 0) = \beta$. Logo, usando a lei forte de Kolmogorov, (FELLER, 1968),

$$\mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{N=1}^t L_N^{1-\beta}}{t} = 1 - \beta \right) = 1.$$
■

4.2 Prova do Teorema 1

Lema 9. Sejam $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ e δ_x a medida normalizada concentrada em $x \in \Delta$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_x \mathbf{F}_{(p,q)}^t = \delta_0.$$

Prova. Usando o lema 6

$$\delta_x \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) = \delta_x \mathbf{F}_{(0,q-p)}^t(1).$$

Deste ponto consideramos $q - p > 0$.

Pelo lema 7,

$$\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(0,q-p)}^t(1) \leq \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t(1).$$

Do lema 8, para um dado $i \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t(1) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(0,q-p)}^t(1) = 0.$$

Note que dado δ_x , existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\delta_x < \mathcal{S}_{10}^i$.

Logo, pela monotonicidade do operador $F_{(0,q-p)}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_x F_{(0,q-p)}^t(1) = 0.$$

o que implica dizer pelo lema 6 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_x F_{(p,q)}^t(1) = 0.$$

O caso em que $q - p < 0$ é análogo. ■

Lema 10. *O conjunto Δ é contável¹.*

Prova. Seja $x^n \in \Delta$ onde $\text{comprimento}(x^n) = n$. Note que, dado n temos um número enumerável de ilhas de comprimento n . Denotamos este conjunto por Δ^n . Logo

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^n.$$

Assim, concluímos que Δ é enumerável. ■

Prova do Teorema 1. Sejam x^1, \dots, x^n, \dots ilhas de uns e $\delta_{x^1}, \dots, \delta_{x^n}, \dots$ suas respectivas medidas normalizadas. Então

$$\mu = \sum_{x \in \{x^1, \dots, x^n, \dots\}} k_x \delta_x$$

onde $\sum_{i=1}^{\infty} k_i = 1$ e $k_x > 0$ para $x \in \{x^1, \dots, x^n, \dots\}$. Usando o lema 9, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_x F_{(p,q)}^t = \delta_0.$$

Pela linearidade de $F_{(p,q)}$, em (2.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu F_{(p,q)}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{x \in \{x^1, \dots, x^n, \dots\}} k_x \delta_x \right) F_{(p,q)}^t = \sum_{x \in \{x^1, \dots, x^n, \dots\}} k_x \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_x F_{(p,q)}^t = \sum_{x \in \{x^1, \dots, x^n, \dots\}} k_x \delta_0 = \delta_0. ■$$

O lema 11 é apresentado, pois uma consequência dele é que dada uma distribuição inicial \mathcal{S}_{01}^i , para valores distintos de p e q , a distribuição limite de $\mathcal{S}_{01}^i F_{(p,q)}^t$ pode não ser a mesma. De fato, se p e q são negativos, a convergência é para δ_0 , e quando p e q são positivos, a convergência é para δ_1 . Outra informação obtida neste caso é que a medida invariante não se comporta como um atrator global, só local.

¹ Dizemos que um conjunto X é contável se ele é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Lema 11. Para $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ e cada posição j ,

(i) Se p e q são positivos, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t = \delta_1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t = \delta_0.$$

(ii) Se p e q são negativos, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t = \delta_1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t = \delta_0.$$

Prova. Primeiro apresentamos a prova de (i). Note que para cada $t \geq 0$

$$\mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) \geq \mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}^t(1) \text{ e } \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) \leq \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t(1).$$

Então, basta mostrar que $\mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}^t$ e $\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t$ convergem para δ_1 e δ_0 , respectivamente, quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $L_1^\alpha, L_2^\alpha, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas onde

$$\mathbb{P}(L_1^\alpha = 1) = \alpha \text{ e } \mathbb{P}(L_1^\alpha = 0) = 1 - \alpha.$$

Utilizando a lei forte de Kolmogorov, (FELLER, 1968),

$$\mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{N=1}^t L_N^\alpha}{t} = \alpha \right) = 1. \quad (4.2)$$

De maneira informal, observe que pela definição de \mathbf{F} , a variável aleatória $\sum_{N=1}^t L_N^\alpha$ descreve o número de novos uns em $\mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}^t$. Logo, (4.2) implica que a quantidade de uns vai para infinito quase certamente e isso acontece unicamente quando $\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t$ tende para δ_1 quando $t \rightarrow \infty$.

De forma análoga, a variável aleatória $\sum_{N=1}^t L_N^{1-\beta}$ descreve o número de zeros que aparece em $\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}^t$. O número de zeros tende para infinito quase certamente. Isto conclui a prova do item (i).

A prova do item (ii) segue de forma análoga à prova do item (i). Basta observar que para cada $t \geq 0$

$$\mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) \geq \mathcal{S}_{10}^i \mathbf{F}_{(-1,0)}^t(1) \text{ e } \mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}_{(p,q)}^t(1) \leq \mathcal{S}_{01}^i \mathbf{F}_{(-1,0)}^t(1).$$

■

4.3 O Processo de Nascimento e Morte, X

Sejam $X = \{X_t\}_{t=0}^\infty$ um processo de nascimento e morte, $X_0 = n$ e para $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 0 | X_t = 0) = 1.$$

Seja $a > 0$

$$P(X_{t+1} = b | X_t = a) = \begin{cases} \alpha\beta, & \text{se } b = a + 1; \\ (1 - \alpha)(1 - \beta), & \text{se } b = a - 1; \\ 1 - \alpha\beta - (1 - \alpha)(1 - \beta), & \text{se } b = a; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O diagrama na figura 4.3.1 ilustra as possíveis transições do processo X . Consideramos $u = \alpha\beta$ e $w = (1 - \alpha)(1 - \beta)$.

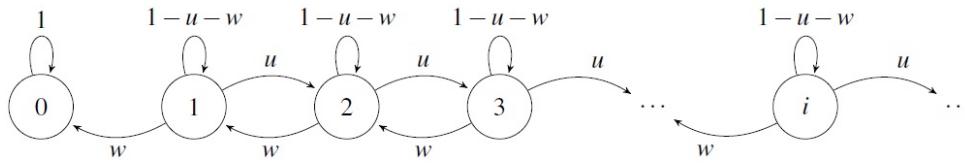


Figura 4.3.1 – Diagrama do Processo de Nascimento e Morte.

Imaginando o espaço geométrico descrito pelos parâmetros α e β , um quadrado unitário, nós descrevemos o que ocorre ao nosso processo quando os parâmetros estão na borda do quadrado unitário. Note que:

- Se $\alpha = 0$ e $0 \leq \beta < 1$ ou $\beta = 0$ e $0 < \alpha < 1$, então dado $X_0 = a$, para todo $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(X_t > \epsilon) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \infty$;
- Se $\alpha = 1$ e $0 < \beta \leq 1$ ou $\beta = 1$ e $0 < \alpha < 1$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(X_t \geq \epsilon | X_0) > 0$;
- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ ou $\beta = 0$ e $\alpha = 1$, então $X_t = X_0$, para todo $t > 0$.

Como consequência dessas observações, de agora em diante, somente necessitamos estudar os casos em que $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$, no interior desse quadrado unitário.

Utilizamos a notação h_i para denotar a *probabilidade de absorção* do nosso processo no estado 0, dado que ele iniciou no estado i . Agora, observe que $h_0 = 1$. A relação fundamental entre os h_i 's é a que segue (ver (NORRIS, 1997)):

$$uh_{i+1} - (w + u)h_i + wh_{i-1} = 0, \text{ para } i \geq 1 \quad (4.3)$$

onde $u = \alpha\beta$ e $w = (1 - \alpha)(1 - \beta)$. Para $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ definimos

$$\gamma = \frac{w}{u}. \quad (4.4)$$

Lema 12. (a) Se $\alpha \leq 1 - \beta$, então $h_i = 1$ para todo i ;
 (b) Se $\alpha > 1 - \beta$, então $h_i = \gamma^i$ para todo i .

Prova. A expressão (4.3) pode ser resolvida utilizando o lema 16, no apêndice A, considerando $u = \alpha\beta$ e $w = (1 - \alpha)(1 - \beta)$. A solução obtida é dada por

$$h_i = \begin{cases} A + B\gamma^i, & \text{se } \alpha \neq 1 - \beta, \\ A + iB, & \text{se } \alpha = 1 - \beta. \end{cases} \quad (4.5)$$

onde A e B são constantes, $B = 1 - A$, e γ é definido como em (4.4). Veremos o fato que $h_0 = 1$, $0 \leq h_i \leq 1$. De fato, vejamos a prova para o item (a).

Primeiro considere $\alpha < 1 - \beta$. Então

$$\alpha < 1 - \beta \text{ e } \beta < 1 - \alpha \implies \alpha\beta < (1 - \alpha)(1 - \beta) \implies 1 < \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{\alpha\beta} = \gamma.$$

Logo, $\gamma^i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ e como $h_i \in [0, 1]$, voltando a (4.5) devemos ter $B = 0$, fazendo com que $A = 1$ e portanto $h_i = 1$.

Considere agora $\alpha = 1 - \beta$. Então devemos ter que $B = 0$, pois caso $B \neq 0$ temos $h_i \rightarrow \infty$, contrariando a definição de h_i . Assim, $A = 1$ e consequentemente $h_i = 1$. Portanto o item (a) está provado.

Vejamos agora a prova para o item (b). Tomando $\alpha > 1 - \beta$. Então a solução para h_i é

$$h_i = A + B\gamma^i \implies h_i = A + (1 - A)\gamma^i = \gamma^i + A(1 - \gamma^i).$$

A solução de h_i é minimal quando $A = 0$. Portanto, $h_i = \gamma^i$.

■

Definimos o *tempo de alcance* para o estado zero, dado que iniciamos o processo no estado i , por

$$H_i = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0 \text{ e } X_0 = i\},$$

onde o ínfimo do conjunto vazio é ∞ . Também definimos o tempo esperado até que o processo X atinja o estado zero, sabendo que ele iniciou no estado i , por $\mathbb{E}(H_i)$.

Lema 13. *Sejam $\beta < 1$ e γ como definido em (4.4).*

(a) *Se $\alpha < 1 - \beta$, então*

$$\mathbb{E}(H_i) = \begin{cases} \frac{1}{w} + \frac{\gamma^{-2}}{u(1 - \gamma^{-1})}, & \text{se } i = 1; \\ \mathbb{E}(H_1) + \frac{\gamma^{-1}(i - 1)}{u(1 - \gamma^{-1})}, & \text{se } i > 1. \end{cases}$$

(b) *Se $\alpha \geq 1 - \beta$, então $\mathbb{E}(H_i) = \infty$, para todo $i \geq 1$.*

Prova. Primeiro observe que nosso processo é um processo de nascimento e morte em que $u = \alpha\beta = u_i$ e $w = (1 - \alpha)(1 - \beta) = w_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots$. Usando o lema 17, no apêndice B, temos

$$\mathbb{E}(H_i) = \begin{cases} \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{u}{w}\right)^k, & \text{se } i = 1; \\ \mathbb{E}(H_1) + \sum_{k=1}^{i-1} \left[\left(\frac{w}{u}\right)^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{u^{i-1}}{w^i} \right], & \text{se } i > 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Suponha que $\alpha < 1 - \beta$, então

$$\beta < 1 - \alpha \implies \alpha\beta < (1 - \alpha)(1 - \beta) \implies 1 < \gamma = \frac{w}{u}.$$

Nessas condições, se $i = 1$, então

$$\mathbb{E}(H_1) = \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{u}{w}\right)^k.$$

Note que a série $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{u}{w}\right)^k$ converge, pois $\left(\frac{u}{w}\right)^k$ é uma progressão geométrica de razão menor que 1. Daí

$$\mathbb{E}(H_1) = \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \left[\frac{\left(\frac{u}{w}\right)^2}{1 - \left(\frac{u}{w}\right)} \right] = \frac{1}{w} + \frac{\gamma^{-2}}{u(1 - \gamma^{-1})}.$$

Se $i > 1$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_i) &= \mathbb{E}(H_1) + \sum_{k=1}^{i-1} \left[\left(\frac{w}{u}\right)^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{u^{i-1}}{w^i} \right] \\ &= \mathbb{E}(H_1) + \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{i-1} \left[\left(\frac{w}{u}\right)^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{u^i}{w^i} \right], \end{aligned}$$

e como $\sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{u}{w}\right)^i$ é uma progressão geométrica com $|u/w| < 1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_i) &= \mathbb{E}(H_1) + \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{\left(\frac{w}{u}\right)^k \left(\frac{u}{w}\right)^{k+1}}{1 - \frac{u}{w}} \right], \\ &= \mathbb{E}(H_1) + \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{\left(\frac{u}{w}\right)^k}{1 - \left(\frac{u}{w}\right)} \right], \\ &= \mathbb{E}(H_1) + \frac{1}{u} (i-1) \left[\frac{\left(\frac{u}{w}\right)^{i-1}}{1 - \left(\frac{u}{w}\right)} \right], \\ &= \mathbb{E}(H_1) + \frac{1}{u} (i-1) \frac{\gamma^{-1}}{1 - \gamma^{-1}}. \end{aligned}$$

Com isso concluímos a prova do item (a).

Para mostrar o item (b), observe que,

$$1 - \beta < \alpha \text{ e } 1 - \alpha < \beta \implies (1 - \alpha)(1 - \beta) < \alpha\beta \implies \frac{w}{u} = \gamma < 1.$$

Resolvendo $\mathbb{E}(H_1)$, em (4.6), temos que $\mathbb{E}(H_1) = \infty$, o que implica $\mathbb{E}(H_i) = \infty$ para todo i e, portanto, concluímos o item (b). ■

4.4 O Processo X e o Operador F

Dado $x \in \Delta$, nós denotamos i_{min} , o mínimo das posições i tal que $x_i = 1$. Denotamos i_{max} , o máximo das posições i tal que $x_i = 1$. Definimos:

$$(\underline{x})_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = i_{max}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e } (\bar{x})_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i_{min} \leq i \leq i_{max}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\underline{x}, \bar{x} \in \Delta$ e $\underline{x} < x < \bar{x}$.

Iremos considerar uma ilha de uns quando $x = \bar{x}$. Neste caso, existem posições $i < j$ tal que $x_k = 1$ se $i < k < j$ e $x_k = 0$ nos outros casos. Nós definimos $\text{comprimento}(x) = j - i - 1$. Se $n = 1$, então $\underline{x} = x = \bar{x}$. Agora, nossa tarefa é associar nosso operador F atuando em δ_x com o processo X .

Dada uma ilha de uns, x , em que $x = \bar{x}$ e sua medida normalizada concentrada em x , δ_x , existem posições $i_0 < j_0$, tais que $x_{i_0} = x_{j_0} = 0$ e $x_k = 1$ somente se $i_0 < k < j_0$. Assumindo $X_0 = j_0 - i_0 - 1$, note que $X_0 = \text{comprimento}(x)$, isto é, o número consecutivo de uns entre as posições i_0 e j_0 . Observe que $\delta_x F^t$ representa a t -ésima medida obtida da ilha de uns para cada valor t . Note que δ_x pode ser descrita como a transição das variáveis aleatórias $(i_{t-1}, j_{t-1}) \rightarrow (i_t, j_t)$.

As variáveis aleatórias i_t e j_t são definidas por (ver figura 4.4.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i_t = i_{t-1} - 1, j_t = j_{t-1}) &= \begin{cases} 0, & \text{se } j_{t-1} = i_{t-1} + 1; \\ \theta(1|01)\theta(1|10), & \text{outros casos.} \end{cases} \\ \mathbb{P}(i_t = i_{t-1} - 1, j_t = j_{t-1} - 1) &= \begin{cases} 0, & \text{se } j_{t-1} = i_{t-1} + 1; \\ \theta(1|01)\theta(0|10), & \text{outros casos.} \end{cases} \\ \mathbb{P}(i_t = i_{t-1}, j_t = j_{t-1}) &= \begin{cases} 1, & \text{se } j_{t-1} = i_{t-1} + 1; \\ \theta(0|01)\theta(1|10), & \text{outros casos.} \end{cases} \\ \mathbb{P}(i_t = i_{t-1}, j_t = j_{t-1} - 1) &= \begin{cases} 0, & \text{se } j_{t-1} = i_{t-1} + 1; \\ \theta(0|01)\theta(0|10), & \text{outros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\theta(\cdot|\cdot)$ é a probabilidade de transição do nosso processo (2.2).

Definindo agora $X_t = j_t - i_t - 1$, observe que a variável aleatória X_t representa o comprimento da ilha x no instante t .

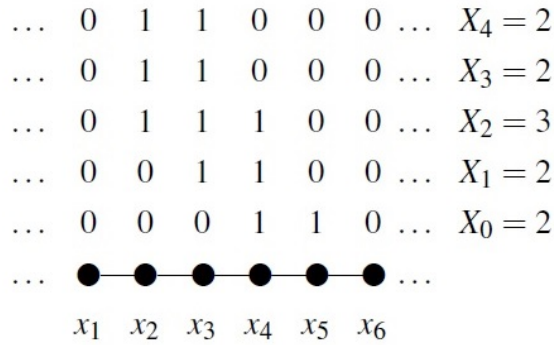


Figura 4.4.1 – Ilustração de um fragmento do nosso processo, o qual ocorre com probabilidade positiva. Do lado direito são descritos os valores correspondentes de X_t

A figura 4.4.1 mostra uma ilustração em que a configuração inicial é uma ilha de uns, x , onde $x = \bar{x}$, $\text{comprimento}(x) = 2$, $i_{\min} = 4$ e $i_{\max} = 5$. Além disso, $i_0 = 3$ e $j_0 = 6$; $i_1 = 2$ e $j_1 = 5$; $i_2 = 1$ e $j_2 = 5$; $i_3 = 1$ e $j_3 = 4$; $i_4 = 1$ e $j_4 = 4$. No lado direito são dispostos os valores que o processo X assume.

Note que i_t e j_t descrevem a probabilidade de que o comprimento da ilha de uns aumente em uma unidade, diminua em uma unidade ou continue o mesmo. Assim, concluímos que:

$$\mathbb{P}(X_t = a + 1 | X_{t-1} = a) = \mathbb{P}(i_t = i_{t-1} - 1, j_t = j_{t-1});$$

$$\mathbb{P}(X_t = a - 1 | X_{t-1} = a) = \mathbb{P}(i_t = i_{t-1}, j_t = j_{t-1} - 1);$$

$$\mathbb{P}(X_t = a | X_{t-1} = a) = \mathbb{P}(i_t = i_{t-1}, j_t = j_{t-1}) + \mathbb{P}(i_t = i_{t-1} - 1, j_t = j_{t-1} - 1).$$

Onde $a = j_{t-1} - i_{t-1} - 1$. Finalizamos a tarefa de associar nosso processo atuando em \bar{x} com X .

4.5 Prova do item (A.2) do Teorema 2

Se μ é uma medida concentrada em $x \in \Delta$, denotamos $\tau_\mu^{(p,q)}$ por $\tau_x^{(p,q)}$. Por simplicidade, quando $p = 0$ e $q = 1$, denotaremos $\tau_x^{(p,q)}$ por τ_x .

Lema 14. *Seja $x \in \Delta$ tal que $x = \underline{x}$. Se $\alpha \geq 1 - \beta$, então $\mathbb{E}(\tau_x^{(p,q)}) = \infty$.*

Prova. Usaremos o fato que

$$\delta_x \mathbf{F}_{(p,q)} = \delta_x (\mathbf{F}_{(0,q-p)} \mathbf{T}_p).$$

Consideremos $q - p > 0$. O caso em que $q - p < 0$ é análogo.

Note que

$$\delta_x (\mathbf{F}_{(0,q-p)} \mathbf{T}_p) (1) = \delta_x \mathbf{F}_{(0,q-p)} (1).$$

Considere o processo X (nascimento e morte) que definimos na seção (4.3).

É fácil ver que existe uma correspondência entre a ação do operador $\mathbf{F}_{(0,q-p)}$ agindo em δ_x e o processo X onde X_t , neste caso, indica a quantidade de uns existentes no tempo t , dado que $X_0 = 1$. Logo,

$$\mathbb{E} (\tau_x^{(p,q)}) = \mathbb{E} (\tau_x^{(0,q-p)}) = \mathbb{E}(H_1).$$

Segue do lema 13, que $\mathbb{E} (\tau_x^{(p,q)}) = \infty$.

■

Seja $\mu \in \mathcal{A}$. Logo

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \delta_{x^i}.$$

Tomemos $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots$. Logo, denotamos

$$\underline{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \delta_{\underline{x}^i}.$$

Claro que $\underline{\mu} \in \mathcal{A}$. Além disso, vemos que

$$\delta_{\underline{x}^i} < \delta_{x^i}, \forall i = 1, 2, \dots$$

Logo, $k_i \delta_{\underline{x}^i} < k_i \delta_{x^i}$. Daí

$$\underline{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \delta_{\underline{x}^i} < \sum_{i=1}^{\infty} k_i \delta_{x^i} = \mu.$$

Prova do item (A.2) do Teorema 2. Pela monotonicidade de $\mathbf{F}_{(p,q)}$ é suficiente mostrar que $\mathbb{E} (\tau_{\underline{\mu}}^{(p,q)}) = \infty$.

Pela definição

$$\tau_{\underline{\mu}}^{(p,q)} = \inf\{t \geq 0 : \delta_{\underline{x}^1} \mathbf{F}_{(p,q)}^t (1) = \delta_{\underline{x}^2} \mathbf{F}_{(p,q)}^t (1) = \dots = 0\} = \inf\{t \geq 0 : \delta_{\underline{x}^1} \mathbf{F}_{(p,q)}^t (1) = 0\} = \tau_{\underline{x}^1}^{(p,q)}.$$

A penúltima igualdade é válida, pois para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\underline{x}^i = \underline{x}^j \mathbf{T}_k \implies \delta_{\underline{x}^i} = \delta_{\underline{x}^j \mathbf{T}_k}.$$

Usando o lema 14 temos que $\mathbb{E} (\tau_{\underline{x}^1}^{(p,q)}) = \mathbb{E}(H_1) = \infty$. Logo, $\mathbb{E} (\tau_{\underline{\mu}}^{(p,q)}) = \infty$

■

4.6 Prova do item (B.2) do Teorema 2

Lema 15. *Seja γ como definido em (4.4). Dados α e β , existem constantes k_1 e k_2 tais que $\beta \in (0, 1)$, se $\alpha < 1 - \beta$, então*

$$k_1 + k_2\gamma \leq \mathbb{E}(\tau_x) \leq k_1 + (\text{comprimento}(x) - 1)k_2 \text{ para todo } x \in \Delta.$$

Prova. Segue do lema 13 que

$$\mathbb{E}(H_n) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} + \frac{\gamma^{-2}}{\alpha\beta(1-\gamma^{-1})}, & \text{para } n = 1; \\ \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} + \frac{(n-1)\gamma^{-1}}{\alpha\beta(1-\gamma^{-1})}, & \text{para } n > 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\mathbb{E}(H_1) = k_1 + \gamma k_2 \text{ e } \mathbb{E}(H_n) = k_1 + (n-1)k_2 \quad (4.7)$$

onde $k_1 = ((1-\beta)(1-\alpha))^{-1}$ e $k_2 = \gamma^{-1}/(\alpha\beta(1-\gamma^{-1}))$.

Agora vamos considerar x uma ilha de uns, e como consequência x e \bar{x} são ilhas com mesmo comprimento. Usando que

$$\mathbb{E}(\tau_{\underline{x}}) \leq \mathbb{E}(\tau_x) \leq \mathbb{E}(\tau_{\bar{x}}), \mathbb{E}(\tau_{\underline{x}}) = \mathbb{E}(H_1), \text{ o comprimento}(\bar{x}) = n \text{ e que } \mathbb{E}(\tau_{\bar{x}}) = \mathbb{E}(H_n),$$

a qual é dada em (4.7). ■

No teorema 2, item (B.2), iremos provar para o caso em que μ é uma combinação convexa finita de δ -medidas. O caso em que μ é uma combinação convexa contável é análogo.

Prova do item (B.2) do Teorema 2. Se μ é um arquipélago de uns, então

$$\mu = \sum_{i=1}^N k_i \delta_{x^i},$$

onde $\sum_{i=1}^N k_i = 1$; k_1, \dots, k_N são positivos e x^1, \dots, x^N são ilhas de uns. Pelo teorema 1 e a definição de μ , temos

$$\tau_\mu = \inf\{t \geq 0 : \mu \mathbf{F}^t(1)\} = \inf\{t \geq 0 : (\delta_{x^1} \mathbf{F}^t)(1) = \dots = (\delta_{x^N} \mathbf{F}^t)(1) = 0\}.$$

logo

$$\mathbb{E}(\tau_\mu) \leq \max\{\mathbb{E}(\tau_{x^i}) : i = 1, \dots, N\}.$$

Usando o lema 15 e a definição de eroder linear, dados α e β , tais que $\alpha < 1 - \beta$, para $i = 1, \dots, N$, temos

$$\mathbb{E}(\tau_{x^i}) \leq k_1 + k_2(\text{comprimento}(x^i) - 1) \leq k_1 + k_2 \text{comprimento}(x^i) \leq k(\text{comprimento}(x^i) + 1),$$

onde $k = \max\{k_1, k_2\}$. Dessa forma, para essa constante k

$$\max\{\mathbb{E}(\tau_{x^i}), i = 1, \dots, N\} \leq k(1 + \max\{\text{comprimento}(x^i) : i = 1, \dots, N\}) = k(1 + \text{gigante}(\mu)).$$

Assim, o item (B.2), do teorema 2 está provado.

■

5 ESTUDO NUMÉRICO

5.1 Aproximação de Campo Médio

Uma das ferramentas largamente utilizadas no estudo de processos estocásticos é o uso de aproximação de campo médio, ACM por simplicidade. ACM visa oferecer uma representação determinística para a evolução da densidade de cada tipo de estado, em nosso caso *zero* ou *um*.

Em nosso estudo, ao estimar a densidade de zeros e uns na evolução temporal do processo, a ACM pode dar indícios da convergência do nosso processo, sendo adotada uma medida inicial μ .

Como em (RAMOS; LEITE, 2017), o *operador de campo médio* será definido como o operador $\mathcal{C} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Dada uma medida $\nu \in \mathcal{M}$, a medida $\nu\mathcal{C}$ é uma medida produto com a mesma densidade de zeros e uns que ν possui. Podemos utilizar o operador de campo médio para aproximar o processo $\nu\mathbf{P}^t$ definido no espaço de configuração $\Omega^{\mathbb{Z}}$ pelo processo $\nu\mathcal{C}\mathbf{P}$ que é definido no mesmo espaço. Esse novo processo nos dá uma aproximação do comportamento do processo original e é mais viável para análise, tendo em vista que nos concentramos em estudar a evolução das densidades de zeros e uns.

Iremos mostrar que nosso processo tem ACM dada por

$$x_1^{t+1} = (\alpha + \beta)x_1^t + (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 \quad (5.1)$$

onde x_1^t é a densidade de uns no tempo t .

Provando a aproximação (5.1):

Em (DEUTSCH; DORMANN, 2007) é apresentada uma expressão geral para a ACM, a qual nós escrevemos por:

$$x_j^{t+1} = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega^n} \theta(b_j | a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n \sum_{l=0}^{|\Omega|-1} \delta_{a_i, b_l} x_l^t, \quad (5.2)$$

onde (a_1, \dots, a_n) é a vizinhança da componente de interesse, $|\Omega|$ é o número de estados possíveis e δ_{a_i, b_l} é 1, se $a_i = b_l$, e 0 caso contrário.

Para o operador $\mathbf{F}_{(p,q)}$ temos uma vizinhança composta por dois elementos e dois estados possíveis para cada uma destas componentes, então tomando $b_j = j$, para $j = 0, 1$, a expressão (5.2) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned}
x_1^{t+1} &= \sum_{(a_1, a_2) \in \{0,1\}^2} \theta(j|a_1, a_2) \prod_{i=1}^2 \sum_{l=0}^1 \delta_{a_i, l} x_l^t \\
&= \theta(1|00)[\delta_{0,0}x_0^t + \delta_{0,1}x_1^t][\delta_{0,0}x_0^t + \delta_{0,1}x_1^t] \\
&\quad + \theta(1|10)[\delta_{1,0}x_0^t + \delta_{1,1}x_1^t][\delta_{0,0}x_0^t + \delta_{0,1}x_1^t] \\
&\quad + \theta(1|01)[\delta_{0,0}x_0^t + \delta_{0,1}x_1^t][\delta_{1,0}x_0^t + \delta_{1,1}x_1^t] \\
&\quad + \theta(1|11)[\delta_{1,0}x_0^t + \delta_{1,1}x_1^t][\delta_{1,0}x_0^t + \delta_{1,1}x_1^t] \\
&= \theta(1|00)(x_0^t)^2 + \theta(1|10)x_1^t x_0^t + \theta(1|01)x_0^t x_1^t + \theta(1|11)x_1^t \\
&= \theta(1|00)x_0^t + \theta(1|11)x_1^t + [\theta(1|01) + \theta(1|10)]x_0^t x_1^t,
\end{aligned}$$

e usando as probabilidades de transição do operador $\mathbf{F}_{(p,q)}$ em (2.2), temos

$$x_1^{t+1} = (x_1^t)^2 [1 - \alpha - \beta] + [\alpha + \beta]x_0^t x_1^t. \quad (5.3)$$

Usando $x_0^t = 1 - x_1^t$, reescrevemos (5.3) como

$$x_1^{t+1} = (\alpha + \beta)x_1^t + (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 \quad (5.4)$$

■

Dados $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$, note que se $x_1^0 \in \{0, 1\}$ temos $x_1^t = x_1^0, \forall t \in \mathbb{N}$, o que concorda com o processo original. Consideramos os casos em que $x_1^0 \in (0, 1)$. Note que

$$x_1^{t+1} = x_1^t \iff x_1^t = \{0, 1\}.$$

Como $x_1^{t+1} = x_1^t$ é uma equação do segundo grau em relação a $(x_1^t)^2$ e suas raízes são 0 e 1, há apenas duas possibilidades: (A) $x_1^{t+1} > x_1^t$ e (B) $x_1^{t+1} < x_1^t$. Provamos sob quais condições (A) e (B) são satisfeitas.

$$(A) \quad x_1^{t+1} > x_1^t$$

Observe que se $x_1^{t+1} > x_1^t$, então

$$(\alpha + \beta)x_1^t + (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 > x_1^t \implies (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 - (1 - \alpha - \beta)x_1^t > 0,$$

a qual assume valores positivos em $(0, 1)$ quando $(1 - \alpha - \beta) < 0$, implicando que $\alpha > 1 - \beta$.

(B) $x_1^{t+1} < x_1^t$, o que implica

$$(\alpha + \beta)x_1^t + (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 < x_1^t \implies (1 - \alpha - \beta)(x_1^t)^2 - (1 - \alpha - \beta)x_1^t < 0$$

que assume valores negativos em $(0, 1)$ quando $(1 - \alpha - \beta) > 0$, implicando que $\alpha < 1 - \beta$.

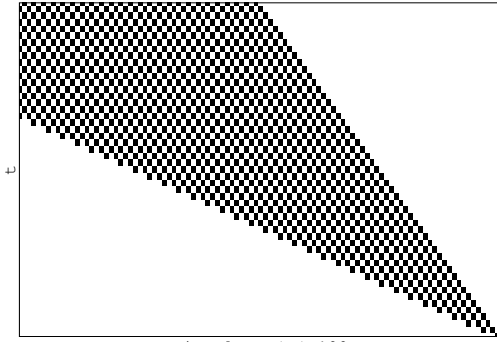
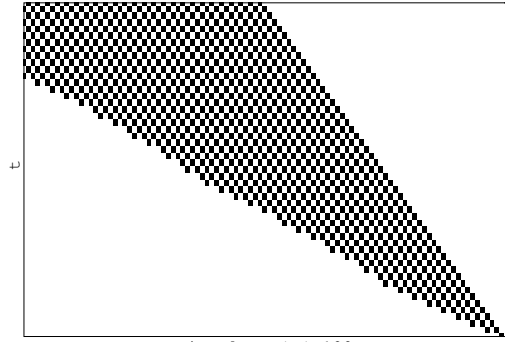
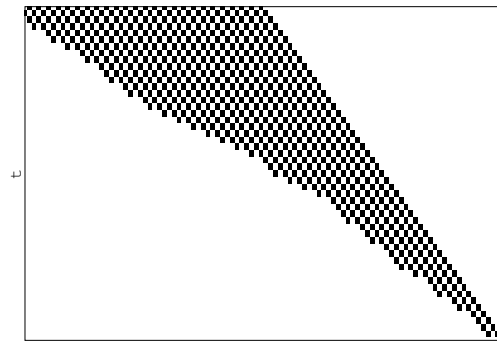
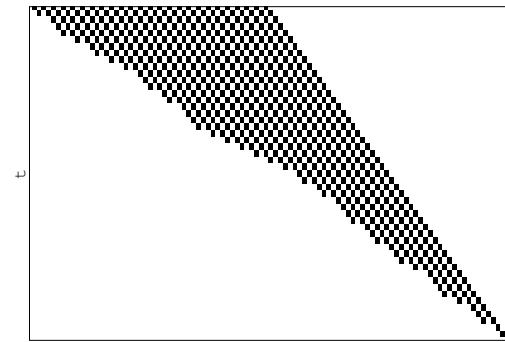
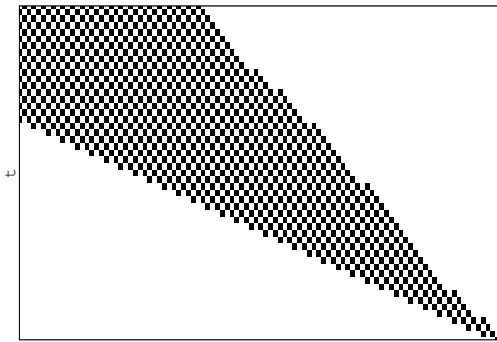
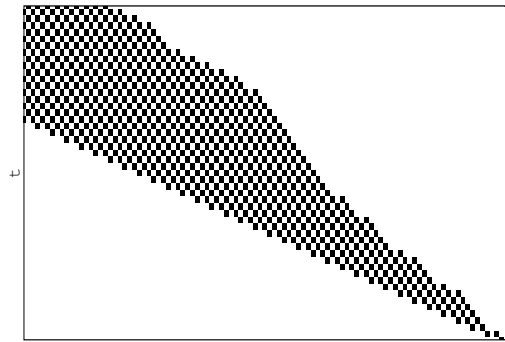
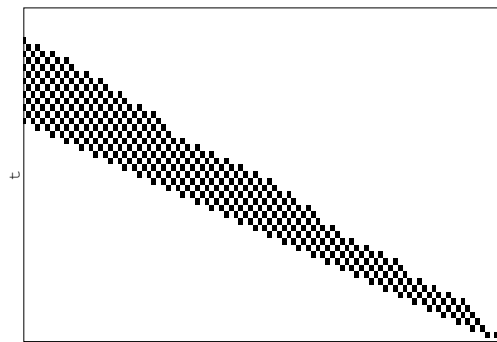
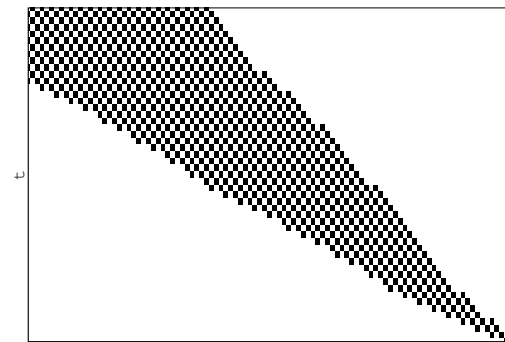
(A) e (B) juntas implicam que se $\alpha > 1 - \beta$, então para qualquer $x_1^0 \in (0, 1)$ teremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1^t = 1$ e se $\alpha < 1 - \beta$ então para qualquer $x_1^0 \in (0, 1)$ teremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1^t = 0$.

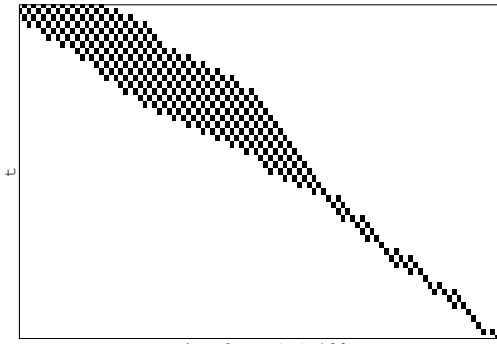
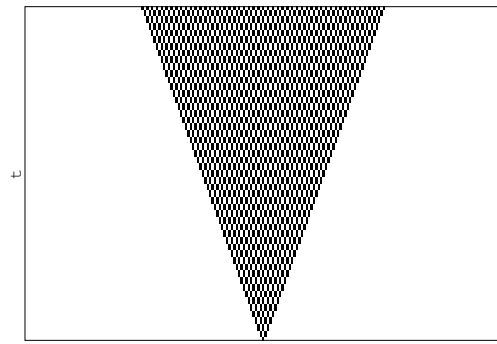
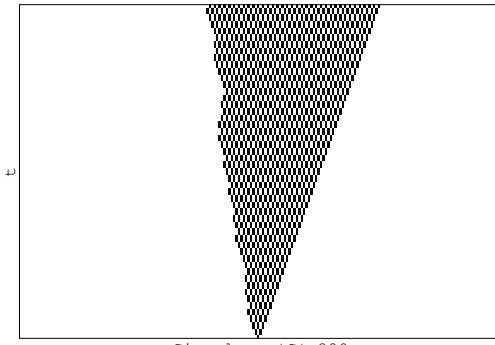
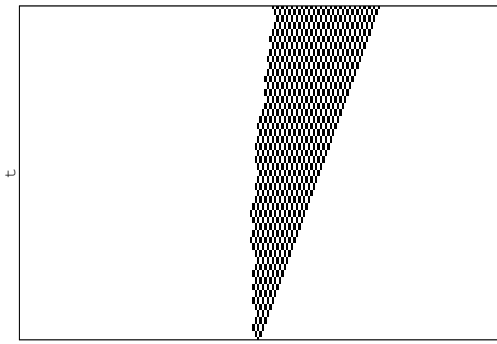
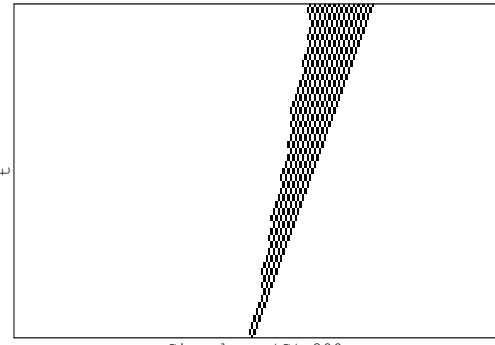
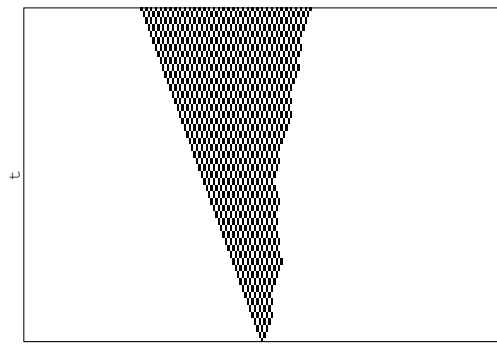
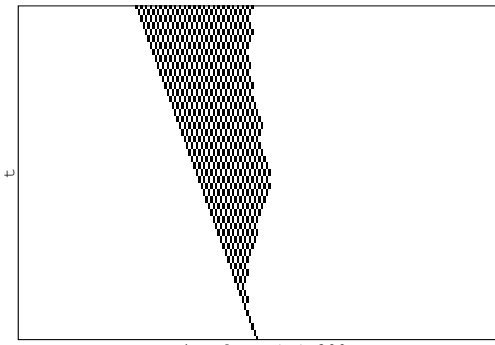
Qualitativamente, a ACM concorda com nossos resultados sob a existência de uma tipo de transição de fase; diverge ao afirmar que se $\alpha > 1 - \beta$, $\forall x_1^0 \in (0, 1)$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1^t = 1$. O que não é verdade ao vermos nosso teorema 1.

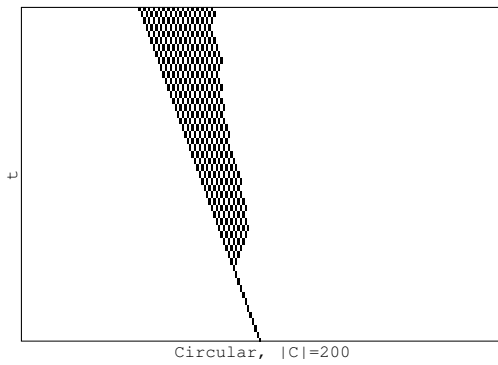
Esta aproximação não considera as posições dos vizinhos, o que certamente melhoraria sua estimação.

5.2 Visualização Computacional do Processo $F_{(p,q)}$

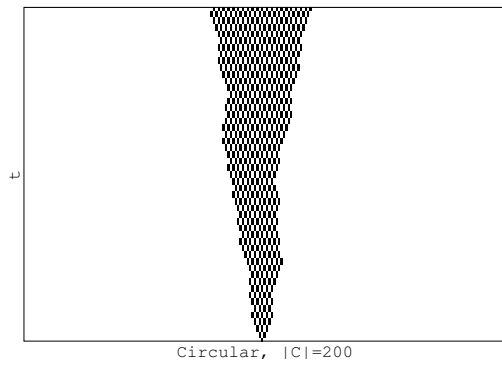
Para ilustrar o nosso processo, nós fizemos a simulação computacional do nosso processo em dois casos: No primeiro caso, assumimos $p = 1$ e $q = 3$ (figuras (A) a (J)) e um sistema contendo 100 componentes, $|C| = 100$, sendo que apenas a componente de posição 99 está no estado 1. No segundo caso, assumimos $p = -1$ e $q = 1$ (Figuras (K) a (T)) e um sistema contendo 200 componentes, $|C| = 200$, sendo que apenas a componente de posição 100 está no estado 1. Em ambos os casos, fixamos $\alpha, \beta \in \{1, 0.8, 0.5, 0.3, \}$ e o tempo t variando de 0 à 50. Após obtidos os dados, geramos os gráficos contendo as sequências de zeros e uns obtidas em cada passo de tempo. Usamos a linguagem C para a simulação. Componentes no estado um estão representadas pela cor preta. Componentes no estado zero estão representadas pela cor branca.

(A) $\alpha = 1, \beta = 1$ (B) $\alpha = 0.8, \beta = 1$ (C) $\alpha = 0.5, \beta = 1$ (D) $\alpha = 0.3, \beta = 1$ (E) $\alpha = 1, \beta = 0.8$ (F) $\alpha = 1, \beta = 0.5$ (G) $\alpha = 1, \beta = 0.3$ (H) $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$

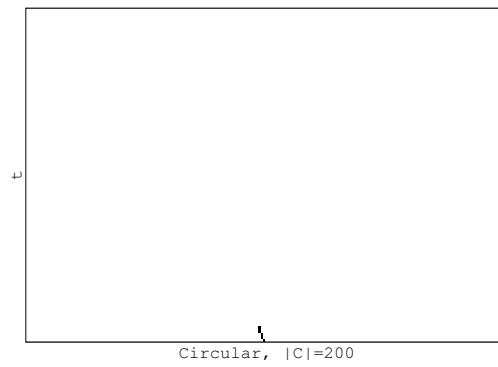
(I) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ (J) $\alpha = 0.3, \beta = 0.3$ (K) $\alpha = 1, \beta = 1$ (L) $\alpha = 0.8, \beta = 1$ (M) $\alpha = 0.5, \beta = 1$ (N) $\alpha = 0.3, \beta = 1$ (O) $\alpha = 1, \beta = 0.8$ (P) $\alpha = 1, \beta = 0.5$



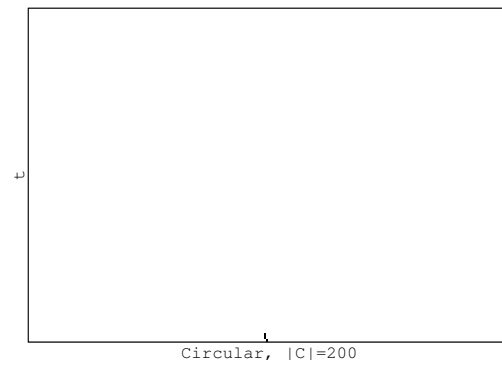
(Q) $\alpha = 1, \beta = 0.3$



(R) $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$



(S) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$



(T) $\alpha = 0.3, \beta = 0.3$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação estudamos uma classe de autômatos celulares probabilísticos unidimensional com interação não local, isto é, a evolução do processo é feita com base na interação entre as partículas, não necessariamente as mais próximas. Para cada componente em uma configuração, associamos uma vizinhança que é composta por duas componentes.

Para qualquer medida inicial que consideramos, provamos que o processo sempre converge fracamente para a medida concentrada na configuração em que todas as componentes estão no estado zero. Mostramos que o tempo médio dessa convergência apresenta um tipo de transição de fase: por um lado, se $\alpha \geq 1 - \beta$, então esse tempo médio é infinito, quaisquer que sejam os vizinhos, por outro lado, quando $\alpha < 1 - \beta$ e a distância entre os vizinhos é de uma unidade, então o tempo médio é finito. Neste caso, obtivemos um limite superior para o tempo médio de convergência, o qual é uma função linear da medida inicial. Por fim, realizamos algumas análises numéricas do nosso processo.

Os resultados apresentados nesta dissertação foram obtidos com base na interação não local com dois vizinhos. Um questionamento natural se refere a interação não local com pelo menos três vizinhos.

Observando as simulações computacionais que desenvolvemos, começamos a nos questionar sobre a existência de uma outra medida invariante em nosso processo, a qual não seria uma combinação convexa das medidas concentradas nas configurações onde todas as componentes tem o mesmo estado.

O processo estudado aqui é unidimensional, isto é, as componentes tem suas posições nos inteiros. Supondo que as componentes tenham suas posições em \mathbb{Z}^2 , então o sistema é bidimensional. De maneira mais geral, podemos pensar em processos com interação não local com dimensão d .

Por fim, vislumbramos a possibilidade de obter aproximações de campo médio que considerem a posição dos vizinhos.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, D. F. *Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences*. University of Wisconsin at Madison, 2013. **Available at:** <http://www.math.wisc.edu/anderson/605F13/Notes/StochBio.pdf>
- DEPOORTER, J.; MAES, C. *Stavskaya's measure is weakly Gibbsian*. *Markov Process and related fields*, v. 12, n. 176, p. 791-804, 2006.
- DEUTSCH, A.; DORMANN, S. *Cellular automaton modeling of biological pattern formation: characterization, applications, and analysis*. Springer Scienc & Business Media, 2007.
- FELLER, W. "The strong law of large numbers." 10.7 in *An introduction to probability theory and its applications*. New York: v. 1, 3^a ed. Wiley, p. 243-245, 1968.
- GALPERIN, G. A. *Homogeneous local monotone operators with memory*. *Soviet Math. Doklady*, v. 228, p. 277-280, 1976.
- LI, W. *Non-Local cellular automata*. *Lectures in Complex Systems*, Ed. by L. Nadel and D. Stein, Addison Wesley, 1992, v. 4, p. 317-327, 1991.
- LI, W. *Phenomenology of nonlocal cellular automata*. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 68, n. 5, p. 829-882, 1992.
- LIGGETT, T. M. *Interacting Particle Systems*. Springer, 1985.
- NORRIS, J. R. *Markov Chains*. Cambridge: university press, v. 2, 1997.
- PETRI, N. *Unsolvability of the recognition problem for annihilating iterative networks*. *Selecta Mathematica Sovietica*, v. 6, n. 4. p. 354-363, 1987.
- RAMOS, A. D.; LEITE, A. *Convergence Time and Phase Transition in a Non-monotonic Family of Probabilistic Cellular Automata*. *Journal of Statistical Physics*, v. 168, n. 3, 573-594, 2017.
- SA. P. G. de; MAES, C. *The Gacs-kurdyumov-levin automaton revisited*. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 67, p. 507-522, 1992.
- STAVSKAYA, O.; PIATETSKI-SHAPIRO, I. *On homogeneous nets of spontaneously active elements*. *Systems Theory Res*, v. 20, p. 75-88, 1971.
- TAGGI, L. *Critical probabilities and convergence time of percolation probabilistic cellular automata*. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 159, n. 4, p. 853-892, 2015.
- TOOM, A. *Stable and attractive trajectories in multicomponent systems*. *Multicomponent Random Systems*, ed. by R. Dobrushin and Ya. Sinai. *Advances in Probability and Related Topics*, Dekker, v. 6, n. 1, p. 549-575, 1980.

TOOM, A. *Cellular automata with errors: problems for students of probability*. Topics in contemporary probability and its applications, Series Probability and Stochastics, R. Durrett and M. Pinsky, eds.(CRC Press, 1995), p. 117-157, 1995.

TOOM, A. *Simple one-dimensional interaction systems with superexponential relaxation times*. Journal of Statistical Physics, Springer, v. 80, n. 3-4, p. 545-563, 1995.

TOOM, A. *Contornos, conjuntos convexos e autômatos celulares*. (In Portuguese) 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

TOOM, A. *Ergodicity of cellular automata*. Tartu University, Estonia as a part of the graduate program, 2013.

TOOM, A. *A family of uniform nets of formal neurons*. Soviet Math. Dokl., v. 9, n. 6, p. 49, 1968.

TOOM, A.; VASILYEV, N.; STAVSKAYA, O.; MITYUSHIN, L.; KURDYUMOV, G.; PIROGOV, S. *Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications. Manchester University Press, 1990.

APÊNDICE A - UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Lema 16. *Sejam u, w positivos e $u + w \leq 1$. A solução geral para a relação*

$$uh_{i+1} - (u + w)h_i + wh_{i-1} = 0$$

é dada por

$$h_i = \begin{cases} A + B \left(\frac{w}{u}\right)^i, & \text{se } u \neq w, \\ A + iB, & \text{se } u = w. \end{cases}$$

Prova. Dada a relação $uh_{i+1} - (u + w)h_i + wh_{i-1} = 0$, tome uma solução do tipo $h_i = \lambda^i$. Em particular, para $i = 1$,

$$uh_2 - (u + w)h_1 + wh_0 = 0 \implies u\lambda^2 - (u + w)\lambda + w = 0.$$

Então as soluções possíveis para λ são as raízes do polinômio acima e são dadas por:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \frac{w}{u}.$$

Note que $h_i = \lambda_1^i + \lambda_2^i$ também é solução. De modo mais geral temos que $h_i = A\lambda_1^i + B\lambda_2^i$ é solução, onde A e B são valores reais fixos.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, isto é, $u \neq w$, então $h_0 = A + B$. Mas, $h_0 = 1$, o que implica que $A + B = 1$.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, isto é, $u = w$, então $h_n = (A + nB)\lambda_1^n$ é outra solução.

Uma solução geral para h_i é dada por

$$h_i = \begin{cases} A\lambda_1^i + B\lambda_2^i, & \text{se } u \neq w, \\ (A + iB)\lambda_1^i, & \text{se } u = w. \end{cases}$$

que pode ser simplificada por

$$h_i = \begin{cases} A + B \left(\frac{w}{u}\right)^i, & \text{se } u \neq w, \\ A + iB, & \text{se } u = w. \end{cases}$$

■

APÊNDICE B - PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE

Seja $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ assumindo valores em $\{0, 1, \dots\}$, com $Y_0 = n$ e para $t \geq 0$ e $a > 0$ as probabilidades de transição são dadas por

$$\mathbb{P}(Y_{t+1} = b | Y_t = a) = \begin{cases} u_i, & \text{se } b = a + 1; \\ w_i, & \text{se } b = a - 1; \\ 1 - u_i - w_i, & \text{se } b = a; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Utilizaremos, por convenção, $w_0 = 0$, pois nesse caso não existe nenhum estado anterior ao estado 0. Dizemos que Y é um processo de nascimento e morte. A matriz de transição desse processo é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 - u_0 & u_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ w_1 & 1 - u_1 - w_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & w_2 & 1 - u_2 - w_2 & u_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & w_3 & 1 - u_3 - w_3 & u_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_4 & 1 - u_4 - w_4 & u_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

B.1 - Tempo esperado até a extinção

Considere um processo de nascimento e morte de tal modo que o estado 0 seja absorvente.

O lema 17 é provado em (ANDERSON, 2013). Nós descrevemos sua prova para deixar nossa dissertação mais independente.

Lema 17. *Sejam $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ um processo de nascimento e morte e k_i o tempo esperado até que o processo atinja o estado 0, dado que ele foi iniciado no estado i . Então*

$$k_i = \begin{cases} \frac{1}{w_1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{u_0 u_1 \dots u_{m-1}}{w_1 \dots w_m}, & \text{se } i = 1; \\ k_1 + \mathbb{E} \left(\sum_{m=1}^{i-1} \frac{w_1 \dots w_m}{u_1 \dots u_m} \left[\sum_{i=2}^m \frac{u_1 \dots u_{i-1}}{w_1 \dots w_i} \right] \right), & \text{se } i \neq 1. \end{cases}$$

Prova. Segue da definição de k_m que $k_0 = 0$ e para $m \geq 1$

$$k_m = u_m(1 + k_{m+1}) + w_m(1 + k_{m-1}) + (1 - u_m - w_m)k_m,$$

e reorganizando,

$$k_{m+1} = k_m + \frac{w_m}{u_m} \left(k_m - k_{m-1} - \frac{1}{w_m} \right).$$

Para $m = 1$ obtemos

$$k_2 = k_1 + \frac{w_1}{u_1} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} \right),$$

pois $k_0 = 0$.

Observe que, para $m = 2$,

$$\begin{aligned} k_3 &= k_2 + \frac{w_2}{u_2} \left(k_2 - k_1 - \frac{1}{w_2} \right) \\ &= k_2 + \frac{w_2}{u_2} \left[k_1 + \frac{w_1}{u_1} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} \right) - k_1 - \frac{1}{w_2} \right] \\ &= k_2 + \frac{w_2}{u_2} \left[\frac{w_1}{u_1} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} \right) - \frac{1}{w_2} \right] \\ &= k_1 + \frac{w_1}{u_1} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} \right) + \frac{w_1 w_2}{u_1 u_2} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} - \frac{u_1}{w_1 w_2} \right). \end{aligned}$$

Podemos fazer essa análise para $m = 3$. Então,

$$k_4 = k_3 + \frac{w_3}{u_3} \left(k_3 - k_2 - \frac{1}{w_3} \right).$$

Como já conhecemos k_3 , podemos reescrever k_4 em termos de k_1 . Para isso, note que

$$\begin{aligned} \frac{w_3}{u_3} \left(k_3 - k_2 - \frac{1}{w_3} \right) &= \frac{w_3}{u_3} \left[k_2 + \frac{w_1 w_2}{u_1 u_2} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} - \frac{u_1}{w_1 w_2} \right) - k_2 - \frac{1}{w_3} \right] \\ &= \frac{w_3}{u_3} \left[\frac{w_1 w_2}{u_1 u_2} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} - \frac{u_1}{w_1 w_2} \right) - \frac{1}{w_3} \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$k_4 = k_1 + \frac{w_1}{u_1} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} \right) + \frac{w_1 w_2}{u_1 u_2} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} - \frac{u_1}{w_1 w_2} \right) + \frac{w_3}{u_3} \left[\frac{w_1 w_2}{u_1 u_2} \left(k_1 - \frac{1}{w_1} - \frac{u_1}{w_1 w_2} \right) - \frac{1}{w_3} \right].$$

A escrita dos quatro primeiros termos em função de k_1 surge na busca por um padrão, que de fato acontece se observarmos o termo geral

$$k_m = k_1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{w_1 \dots w_m}{u_1 \dots u_m} \left[k_1 - \frac{1}{w_1} - \sum_{i=2}^{m-1} \frac{u_1 \dots u_{i-1}}{w_1 \dots w_i} \right], \text{ com } n \geq 1, \quad (1)$$

onde o segundo somatório assume valor zero se $i < 2$.

Diante de uma expressão geral para k_m , nosso interesse se restringe agora em determinar k_1 e solucionaremos o problema. Para isso faremos uma modificação no modelo proposto e supomos que, no estado zero, o novo modelo possui $u_0 = 1$. Isso nos permite pensar em uma distribuição limitante que ajude a encontrar k_1 .

Seja T_0 o primeiro tempo de retorno ao estado zero, para a nova cadeia, e observe que $\mathbb{E}(T_0) = k_1 + 1$. A distribuição limitante $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \dots)$ permite que encontremos $\mathbb{E}(T_0)$ como $1/\tilde{\pi}_0$, onde $\tilde{\pi}_0$ é a distribuição limitante da cadeia modificada.

Se a cadeia original é nula recorrente, então a cadeia modificada também será, de modo que nesse caso, $k_1 = \infty$ e como consequência, $k_m = \infty$ para todo $m \geq 1$.

Observando o caso em que a cadeia é recorrente positiva, temos a relação para $\tilde{\pi}_0$ dada por

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_0 u_1 \dots u_{m-1}}{w_1 \dots w_m}}.$$

Pela relação

$$\tau_1 = \mathbb{E}(T_0) - 1$$

encontramos uma solução para k_1 em termos de $\tilde{\pi}_0$ como sendo

$$\begin{aligned} k_1 &= \tilde{\pi}_0^{-1} - 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_1 u_2 \dots u_{m-1}}{w_1 \dots w_m} \\ &= \frac{1}{w_1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{u_1 u_2 \dots u_{m-1}}{w_1 \dots w_m}. \end{aligned}$$

e substituindo na equação para k_m , temos

$$k_m = k_1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{w_1 \dots w_m}{u_1 \dots u_m} \left[\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{u_1 \dots u_{i-1}}{w_1 \dots w_i} \right].$$

■