

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CARLOS EDUARDO CORREIA DE SOUZA

**SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS
EM ATRADORES CAÓTICOS**

VIRTUS IMPAVIDA

Recife

2018

CARLOS EDUARDO CORREIA DE SOUZA

**SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS
EM ATRADORES CAÓTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Comunicações

Orientador: Prof^o. Dr. Cecilio José Lins Pimentel

Coorientador: Prof^o. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

S729s Souza, Carlos Eduardo Correia de.
Sistemas de comunicação digital baseados em atratores caóticos / Carlos Eduardo Correia de Souza - 2018.
135 folhas, il. abr.

Orientador: Prof. Dr. Cecilio José Lins Pimentel.
Coorientador: Prof. Dr. Daniel Pedro Bezerra Chaves.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2018.
Inclui Referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Comunicação caótica. 3. Mapas iterativos. 4. Sistemas dinâmicos caóticos. 5. Topologia de atratores caóticos. I. Pimentel, Cecilio José Lins (Orientador). II. Chaves, Daniel Pedro Bezerra (Coorientador). III. Título.

UFPE

621.3 CDD (22. ed.)

BCTG/2018-475



Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO DE

CARLOS EDUARDO CORREIA DE SOUZA

TÍTULO

**“SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL
BASEADOS EM ATRADORES CAÓTICOS”**

A comissão examinadora composta pelos professores: CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL, DES/UFPE; DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES, DES/UFPE; JULIANO BANDEIRA LIMA, DES/UFPE, GILSON JERÔNIMO DA SILVA JÚNIOR, DES/UFPE; JOSÉ ROBERTO RIOS LEITE, DF/UFPE e RENATO MARIZ DE MORAES, CIN/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **CARLOS EDUARDO CORREIA DE SOUZA APROVADO.**

Recife, 23 de fevereiro de 2018.

MARCELO CABRAL CAVALCANTI
Coordenador do PPGE

CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL
Orientador e Membro Titular Interno

GILSON JERÔNIMO DA SILVA JÚNIOR
Membro Titular Externo

DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES
Coorientador e Membro Titular Interno

JOSÉ ROBERTO RIOS LEITE
Membro Titular Externo

JULIANO BANDEIRA LIMA
Membro Titular Interno

RENATO MARIZ DE MORAES
Membro Titular Externo

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho não é apenas resultado do esforço individual, é a soma das contribuições das várias pessoas que de alguma forma levaram este trabalho adiante. Portanto, deixo aqui os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que fazem parte desta realização.

- ▷ Primeiramente, agradeço à minha família.
- ▷ A todos os amigos com quem tive oportunidade de debater, conversar e discutir durante os anos de convívio no Departamento de Eletrônica e Sistemas. Como às vezes podemos esquecer de alguém que contribuiu direta ou indiretamente, agradeço de forma geral para que todos com quem convivi façam parte deste agradecimento.
- ▷ A todos os professores do Departamento de Eletrônica e Sistemas com os quais tive a oportunidade de cursar disciplinas e debater sobre diversos temas e que foram de grande importância na minha formação e no desenvolvimento deste trabalho.
- ▷ A todos os funcionários do Departamento de Eletrônica e Sistemas, sem os quais não seria possível o bom funcionamento do mesmo.
- ▷ À Facepe pelo suporte financeiro.
- ▷ Por fim, agradeço aos meus orientadores, Prof. Cecilio Pimentel e Prof. Daniel Chaves, pela oportunidade concedida e pela profunda dedicação com que conduziram a realização deste trabalho. Registro aqui a minha eterna gratidão.

RESUMO

Esta tese apresenta uma proposta de sistemas de comunicação digital baseados na topologia de atratores caóticos. Inicialmente, é apresentado um novo mapa caótico unidimensional baseado na função tangente hiperbólica. Analisa-se suas propriedades caóticas e o desempenho deste mapa quando utilizado como um modulador caótico em um canal com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN, *aditive white Gaussian noise*). As propriedades espectrais de sinais caóticos gerados por este mapa também são investigadas. Em seguida, apresenta-se uma metodologia para a construção de sistemas de comunicação baseados em atratores caóticos tridimensionais. É proposta uma associação entre o fluxo caótico gerado pelas equações diferenciais que definem o atrator e um diagrama de estados, construído a partir de um particionamento de uma seção de Poincaré do atrator caótico. Este diagrama é usado na decodificação com a finalidade de explorar a memória existente no processo de transmissão. É feita uma análise de desempenho do sistema proposto em um canal AWGN. Em seguida, são introduzidas restrições de visitação na seção de Poincaré, visando melhoria de desempenho do sistema. Estas restrições, que modificam a dinâmica do sistema, são representadas por grafos rotulados construídos a partir dos conjuntos de sequências proibidas no fluxo caótico. A partir destes grafos, calcula-se a entropia do sistema com restrições de visitação e são construídos codificadores para gerar sequências simbólicas permitidas de acordo com a dinâmica das trajetórias caóticas.

Palavras-chave: Comunicação caótica. Mapas iterativos. Sistemas dinâmicos caóticos. Topologia de atratores caóticos.

ABSTRACT

In this thesis, we propose a digital communication system based on the topology of chaotic attractors. First, we define a new unidimensional chaotic map based on the hyperbolic tangent function. The chaotic properties of the map are studied and the performance of the system that employs this map as a chaotic modulator in an additive white Gaussian noise (AWGN) channel is analyzed. The spectral properties of the chaotic signals generated by this map are evaluated. In the sequel, we propose a methodology to construct communication systems based on tridimensional chaotic attractors. We associate the chaotic flow generated by the differential equations that define the attractor to a state diagram, by labeling a partition of a Poincaré section of the attractor. This state diagram is used in the demodulator, in order to exploit the memory of the transmission process. We analyze the performance of this system in an AWGN channel. Finally, we introduce visitation restrictions in the Poincaré section to obtain performance gains. These restrictions modify the system dynamics and are represented by labeled graphs defined from the set of forbidden sequences of the chaotic flow. We calculate the entropy of the system with restriction represented by these graphs and construct finite-state codes to generate the restricted sequences.

Keywords: Chaos communication. Iterative maps. Chaotic dynamical systems. Chaos topology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico do mapa logístico com o parâmetro $r = 4$ (esquerda). À direita são mostradas duas séries temporais obtidas pela iteração do mapa logístico com $r = 4$, uma para a condição inicial $x_0 = 0,1$ (linha cheia) e a outra para $x_0 = 0,1000001$ (linha pontilhada).	28
Figura 2 – Mapa de Bernoulli modificado. A região central é a região de guarda, com extensão controlada pelo parâmetro p	31
Figura 3 – O mapa e-tanh e suas órbitas para três valores de r , $r = 0,1; 3; 8$	33
Figura 4 – O mapa o-tanh e suas órbitas para três valores de r , $r = 0,1; 3; 8$	33
Figura 5 – Cluster de histogramas do mapa e-tanh utilizando 10000 iterações para cada valor de r . À esquerda, o histograma 3D para $0,01 \leq r \leq 10$. À direita, uma seção transversal do histograma 3D para $r = 2$ (cima) e para $r = 9$ (baixo).	34
Figura 6 – Cluster de histogramas do mapa o-tanh utilizando 10000 iterações para cada valor de r . À esquerda, o histograma 3D para $0,01 \leq r \leq 10$. À direita, uma seção transversal do histograma 3D para $r = 2$ (cima) e para $r = 9$ (baixo).	35
Figura 7 – Distribuição invariante para o mapa e-tanh para $r = 2$ e $r = 9$	36
Figura 8 – Distribuição invariante para o mapa o-tanh para $r = 2$ e $r = 9$	36
Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema de comunicação caótica baseado no mapa tanh.	37
Figura 10 – Seção da treliça utilizada pelo algoritmo de Viterbi para decodificar a sequência caótica.	38
Figura 11 – BER versus SNR para a iteração reversa do mapa caótico e-tanh para $r = 8, 10, 12$	39
Figura 12 – Expoente de Lyapunov versus o parâmetro r para o mapa e-tanh.	42
Figura 13 – BER versus SNR para a iteração reversa do mapa de Bernoulli modificado com $p = 0,8$ e $p = 0,9$ e para o mapa caótico e-tanh para $r = 12$	43
Figura 14 – Diagrama de órbitas em relação ao parâmetro r para o mapa the e-tanh.	44

Figura 15 – \mathcal{SR} versus r para o mapa tanh com N igual a 10^4 , 5×10^4 e 10^5	49
Figura 16 – \mathcal{CF} versus r para o mapa tanh map com N igual 10^4 , 5×10^4 e 10^5	51
Figura 17 – \mathcal{SR} para o mapa de Bernoulli modificado em função do parâmetro p	52
Figura 18 – \mathcal{CF} para o mapa de Bernoulli modificado em função do parâmetro p	53
Figura 19 – Concentração conjunta ($\mathcal{SR} \times \mathcal{CF}$) para o mapa de Bernoulli modificado com $0 < p < 1$	54
Figura 20 – Concentração conjunta ($\mathcal{SR} \times \mathcal{CF}$) versus r para o mapa tanh.	55
Figura 21 – PSD de sinais caóticos gerados pelo mapa e-tanh, para $r = 0,1; 2; 5; 8$	56
Figura 22 – PSD de sinais caóticos gerados pelo mapa o-tanh, para $r = 0,1; 2; 5; 8$	57
Figura 23 – Mapa e-stanh ($b = 0$) para três valores de α ($\alpha = 0; 0,3; -0,8$) com parâmetro $r = 3$	59
Figura 24 – Mapa o-stanh ($b = 1$) para três valores de α ($\alpha = 0; 0,3; -0,8$) com parâmetro $r = 3$	60
Figura 25 – Expoente de Lyapunov λ versus α para o mapa o-stanh para $r = 0,1; 2; 5$	61
Figura 26 – Expoente de Lyapunov λ versus r para o mapa e-stanh para $\alpha = 0,2; 0,5; 0,9$	62
Figura 27 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = 0$	63
Figura 28 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = -0,9$	63
Figura 29 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = 0,9$	64
Figura 30 – Gráfico de cobweb do mapa o-stanh para $r = 5$ e $\alpha = 0$	64
Figura 31 – PSD do mapa e-stanh para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = -0,9$	66
Figura 32 – PSD do mapa e-stanh para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = 0,9$	66
Figura 33 – PSD do mapa o-stanh para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = 0,9$	67
Figura 34 – Atrator de Rössler com parâmetros de controle $a = 0,432$, $b = 2$ e $c = 4$ (esquerda) e sua projeção no plano xy com a seção de Poincaré com particionamento binário (direita).	76
Figura 35 – Mapa de Poincaré para o atrator de Rössler.	77
Figura 36 – Seção de Poincaré para o atrator de Rössler com particionamento em quatro regiões em projeção no plano xy	77
Figura 37 – Diagramas de estados do atrator de Rössler para os particionamentos em duas, quatro e oito regiões. As rotulações dos diagramas também são mostradas.	79
Figura 38 – Curvas de transição do atrator de Rössler com particionamento em duas regiões, em projeção no eixo xy	80
Figura 39 – Formas de onda caóticas $x(\theta)$ versus θ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Rössler com particionamento quaternário.	81

Figura 40 – Formas de onda caóticas $x(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Rössler com particionamento quaternário com inversão das transições associadas ao bit 0.	83
Figura 41 – Diagrama de blocos do sistema de comunicação baseado em atratores caóticos tridimensionais.	85
Figura 42 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Rössler com particionamento quaternário com variável x . Sistemas sem amplificação tem ganho unitário ($a=1$).	87
Figura 43 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Rössler com dois, quatro e oito estados, com as variáveis x e ρ . As curvas para a variável x são pontilhadas. Todos os sistemas utilizam inversão e amplificação (esta não é utilizada com 2 estados).	88
Figura 44 – Atrator de Lorenz (esquerda) e sua projeção no plano xz (direita).	89
Figura 45 – Curvas médias de transição do atrator de Lorenz em projeção no plano xz com particionamento quaternário. Também são mostrados os ângulos θ_1 e θ_2 , utilizados para definir o período angular.	90
Figura 46 – Diagrama de estados do atrator de Lorenz para o particionamento em duas, quatro e oito regiões. As rotulações dos diagramas também são mostradas.	91
Figura 47 – Sinais caóticos $x(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.	92
Figura 48 – Sinais caóticos $\rho(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.	92
Figura 49 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Lorenz com dois, quatro e oito estados, com as variáveis x e ρ . As curvas para a variável x são pontilhadas.	94
Figura 50 – BER versus SNR dos sistema de comunicação baseados na topologia do atrator caótico de Lorenz e Rössler com dois, quatro e oito estados, com a utilização da variável ρ . As curvas para o atrator de Rössler são pontilhadas	95
Figura 51 – Seção de Poincaré do atrator de Rössler em projeção no plano xy ilustrando as sub-regiões proibidas.	97
Figura 52 – BER vs SNR do sistema de comunicação baseado no atrator de Rössler com restrição de visitação na seção de Poincaré para o parâmetro de restrição $\eta = 10\%$ e $\eta = 40\%$. As curvas de desempenho são relativas à variável x . Também são mostradas as curvas de desempenho do sistema sem restrição de visitação e do sistema BPSK.	98

Figura 53 – Diagrama de estados do atrator de Rössler para o particionamento binário. A rotulação do diagrama também é mostrada.	101
Figura 54 – Segmentos de trajetórias caóticas geradas pelo fluxo caótico do atrator de Rössler com particionamento binário em projeção no plano xy codificadas em sequências simbólicas de comprimento $n = 3$. A posição inicial dos segmentos é indicada por um ponto.	103
Figura 55 – Grafo do atrator de Rössler com particionamento binário sobre o alfabeto \mathcal{A}_2 . Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	109
Figura 56 – Grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 10\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	110
Figura 57 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 10\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	111
Figura 58 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 20\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	111
Figura 59 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 30\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	112
Figura 60 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $r = 40\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$	112
Figura 61 – Entropia do fluxo caótico gerado pelo atrator de Rössler em função do parâmetro de restrição η	115
Figura 62 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$	116
Figura 63 – Grafo G^3 associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$	117
Figura 64 – Grafo associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$ após a divisão do estado I_0	118
Figura 65 – Codificador de estados finitos para o sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$	119
Figura 66 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$	119
Figura 67 – Codificador de estados finitos para sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$ e taxa $p/q = 4/5$. Uma possível codificação das sequências geradas é especificada na Tabela 2.	120
Figura 68 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$	122
Figura 69 – Grafo G^3 associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$	122

Figura 70 – Codificador de estados finitos para o sistema restrito $\eta = 40\%$ com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$ e taxa $p/q = 1/2$ 123

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Entropia do sistema em função do parâmetro de restrição r . Também são mostrados os conjuntos de proibições associados ao parâmetro r	114
Tabela 2 – Codificação das sequências de comprimento $n = 5$ possíveis.	120
Tabela 3 – Entropia do sistema em função do parâmetro de restrição η para os conjuntos \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Também são mostrados os conjuntos de proibições associados ao parâmetro r e a taxa do codificador.	122

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS	17
1.2	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM MAPAS CAÓTICOS UNIDIMENSIONAIS	19
1.3	APLICAÇÕES DE SINAIS CAÓTICOS EM COMUNICAÇÕES	20
1.4	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NA TOPOLOGIA DE ATRATORES CAÓTICOS	21
1.5	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA TESE	23
1.6	ORGANIZAÇÃO E ESTRUTURA DA TESE	25
2	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS EM MAPAS CAÓTICOS UNIDIMENSIONAIS	27
2.1	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM DINÂMICA SIMBÓLICA	27
2.1.1	Mapas Caóticos Unidimensionais	27
2.1.2	Modulação Caótica Baseada em Iteração Reversa	28
2.2	O MAPA $TANH$	31
2.2.1	Análise de Desempenho	37
2.3	ANÁLISE DO COMPORTAMENTO CAÓTICO E NOVAS MÉTRICAS	40
2.3.1	Expoente de Lyapunov e Diagrama de Órbitas	40
2.4	MÉTRICAS ESTUTURAIS	44
2.4.1	Métricas em Atratores	45
2.4.2	Taxa de Espalhamento	47
2.4.3	Fator de Contração	49
2.4.4	\mathcal{SR} e \mathcal{CF} para o Mapa de Bernoulli Modificado	51
2.5	ANÁLISE ESPECTRAL	54
2.6	O MAPA $STANH$	57
2.6.1	O Mapa Stanh	58
2.6.2	Comportamento Caótico	60

2.6.3	Gráficos de Cobweb	62
2.6.4	Comportamento Espectral	65
2.7	CONCLUSÕES	67
3	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS EM ATRA- TORES CAÓTICOS TRIDIMENSIONAIS	69
3.1	Descrição Topológica de Atratores Caóticos	69
3.1.1	Seção de Poincaré e Dinâmica Simbólica de Trajetórias	70
3.2	CONTROLE DE CAOS	72
3.3	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NO ATRATOR DE RÖS- SLER	74
3.3.1	O Atrator de Rössler	75
3.3.2	Particionamento da Seção de Poincaré e Diagrama de Estados	75
3.3.3	Curvas de Transição e Formas de Onda Caóticas	79
3.3.4	Modificações nas Formas de Onda Caóticas	82
3.3.5	O Sistema de Comunicação	84
3.3.6	Análise de Desempenho	86
3.4	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NO ATRATOR DE LO- RENZ	88
3.4.1	O Atrator Caótico de Lorenz	88
3.4.2	Curvas de Transição e Diagrama de Estados	90
3.4.3	Análise de Desempenho	93
3.5	RESTRICÇÕES DE VISITAÇÃO NA SEÇÃO DE POINCARÉ	94
3.5.1	Análise de Desempenho	96
3.6	CONCLUSÕES	97
4	DINÂMICA SIMBÓLICA E SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM ATRADORES CAÓTICOS TRIDIMENSIONAIS 100	100
4.1	DINÂMICA SIMBÓLICA DO FLUXO CAÓTICO EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NA TOPOLOGIA DE ATRADORES CAÓ- TICOS TRIDIMENSIONAIS	101
4.1.1	Representação Simbólica de Trajetórias Caóticas	102
4.2	REPRESENTAÇÃO DO FLUXO CAÓTICO POR GRAFOS	104
4.2.1	Preliminares	105
4.2.2	Representação do Sistema Por Um Conjunto de Restrições	106
4.2.3	Construção de Grafos a Partir de Um Conjunto de Restrições	108
4.3	DINÂMICA DOS SISTEMAS RESTRITOS	109
4.4	ENTROPIA	112

4.5	CODIFICADORES DE ESTADOS FINITOS	114
4.5.1	Algoritmo de Construção	115
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	124
5.1	TRABALHOS FUTUROS	126
5.2	PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA	127
5.2.1	Artigos Publicados em Congressos	127
5.2.2	Artigos Publicados em Periódicos	127
	REFERÊNCIAS	128

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é feita uma introdução aos conceitos fundamentais necessários ao entendimento geral desta tese. Inicialmente é feita uma introdução aos sistemas dinâmicos caóticos e suas aplicações, tanto na área de comunicações quanto em áreas correlatas. Em seguida, é introduzida a ideia de comunicação caótica, seu desenvolvimento histórico e as vantagens da utilização de sistemas dinâmicos caóticos definidos por mapas unidimensionais no projeto de sistemas de comunicação. A seção seguinte introduz os sistemas dinâmicos caóticos tridimensionais do ponto de vista topológico, cuja representação geométrica no espaço de fase é dada por atratores caóticos. Estes objetos são brevemente apresentados e suas propriedades topológicas são analisadas. Apresenta-se uma metodologia para a utilização de atratores caóticos tridimensionais no projeto de sistemas de comunicação digital. Por fim, especifica-se os objetivos desta tese.

1.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

Sistemas dinâmicos são modelos matemáticos determinísticos que descrevem a evolução temporal dos estados de um sistema. Estes podem ser classificados em relação à variável tempo como discretos ou contínuos, sendo o primeiro caso descrito por equações de diferenças e o segundo por equações diferenciais ordinárias. Quando as equações que definem o sistema dinâmico são não lineares, as trajetórias definidas pelas soluções das equações podem apresentar caos, que é o fenômeno caracterizado pelas seguintes propriedades [1]:

- ▷ evolução determinística;
- ▷ comportamento recorrente e não periódico;
- ▷ sensibilidade às condições iniciais;

Os conceitos iniciais da teoria do caos surgiram com os trabalhos pioneiros de Henri Poincaré no final do século XIX, nos seus estudos sobre a estabilidade do sistema solar [2]. Atualmente, um vasto conjunto de sistemas, desde sistemas biológicos até circuitos eletrônicos são descritos por equações diferenciais não lineares e podem apresentar comportamento caótico. O entendimento da dinâmica caótica ganhou impulso no ano de 1963, quando Edward Lorenz derivou um conjunto de três equações diferenciais ordinárias não lineares, que descrevem o movimento de convecção na atmosfera [3]. A descoberta de Lorenz impactou o desenvolvimento científico ao mostrar que um conjunto simples de equações diferenciais pode dar origem a um comportamento altamente complexo, que evolui no tempo oscilando de forma irregular, nunca se repetindo, mas ao mesmo tempo limitado em uma sub-região do espaço definido pelas variáveis do sistema, denominado espaço de fase [2].

A principal característica do comportamento caótico é a sensibilidade às condições iniciais. Esta propriedade significa que condições iniciais próximas se afastam com taxa exponencial em função do tempo. Uma forma de avaliar o comportamento caótico é pela taxa de separação de trajetórias próximas, dada pelo expoente de Lyapunov, que assume valores positivos quando um sistema apresenta caos [2]. A sensibilidade às condições iniciais tem um impacto direto na análise da estabilidade de sistemas caóticos, pois uma perturbação mínima pode levar a uma evolução dinâmica completamente diferente, impossibilitando o funcionamento estável de determinadas classes de sistemas.

Em particular, sistemas dinâmicos caóticos possuem aplicação na área de comunicações, na qual os moduladores são constituídos por sistemas caóticos e a transmissão de informação é realizada pelo mapeamento de símbolos de informação em formas de onda caóticas [4].

1.2 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM MAPAS CAÓTICOS UNIDIMENSIONAIS

A utilização de sistema dinâmicos caóticos no projeto de sistemas de comunicação surgiu no início da década de 90, após a publicação de dois trabalhos fundamentais que estabeleceram os princípios básicos para a construção de sistemas de comunicação baseados em caos. Inicialmente, Ott, Grebogi e York [5] propuseram o conceito de controle de caos, que consiste em aplicar pequenas perturbações controladas por um parâmetro externo adicionado às equações que definem o sistema, para alterar a evolução dinâmica natural das trajetórias caóticas. Os mesmos autores propuseram em [6] um procedimento para mapear sequências binárias de informação em sequências caóticas, mostrando que um sinal caótico pode ser empregado como uma forma de onda transmissora de informação. Neste procedimento é definido um particionamento binário e uma rotulação binária nas regiões da partição, e as trajetórias caóticas são modificadas por ações de controle para forçá-las a atravessar a região associada ao símbolo de informação que se deseja transmitir. Esta ideia é o fundamento do conceito de controle de caos para comunicações.

Em outro trabalho, desenvolvido por Pecora e Carrol [7], propõe-se uma estratégia de transmissão de informação utilizando o sincronismo entre osciladores caóticos, um no transmissor e o outro no receptor, para a construção de sistemas de comunicação. Neste método, o oscilador caótico no receptor é forçado a seguir a mesma evolução dinâmica que o oscilador do transmissor, replicando a informação contida na evolução dinâmica das trajetórias caóticas geradas no transmissor. O sincronismo de osciladores e o controle de caos compõem as duas principais formas de modulação de símbolos de informação em formas de onda geradas por sinais caóticos.

1.3 APLICAÇÕES DE SINAIS CAÓTICOS EM COMUNICAÇÕES

Sinais caóticos são conhecidos por sua irregularidade, aperiodicidade, descorrelação e espectro faixa larga [1]. Apesar disso, podem ser gerados por sistemas dinâmicos determinísticos simples [8], o que motiva sua aplicação em diversos cenários como criptografia [9–16], geração de números aleatórios [17–19], marca d'água [20] e comunicações [21–28].

A reconhecida propriedade de descorrelação e larga faixa espectral os torna candidatos potenciais para implementação de sistemas de comunicação com espalhamento espectral [1, 8]. Tais sistemas oferecem vantagens como robustez a múltiplos percursos e baixa probabilidade de interceptação [29]. Além disso, o comportamento errático do sinal caótico propicia segurança à informação na camada física do sistema. Como há uma gama de sistemas caóticos de fácil construção, inclusive através de circuitos eletrônicos, pode-se considerá-los para implementação de sistemas de baixo custo [11, 21].

Vários esquemas de modulação caótica coerentes e não coerentes têm sido propostos na literatura. No caso da modulação coerente, o sistema requer um conhecimento exato da sequência caótica para demodular o sinal recebido. A detecção é realizada por correlatores no receptor, o que implica em uma estrutura mais complexa do sistema de comunicação. Alguns esquemas de modulação coerente bem conhecidos são o *chaos shift keying* (CSK) [29] e o *chaos based DS-CDMA* [30], em que sequências caóticas são utilizadas para espalhar sinais modulados. Por outro lado, a modulação não coerente evita problemas relacionados à sincronização de osciladores no receptor. Devido a esta estrutura menos complexa, o estudo deste tipo de modulação se intensificou, como nos sistemas do tipo *differential chaos shift keying* (DCSK) [29]. Nos sistemas DCSK, cada símbolo transmitido é representado por dois sinais caóticos consecutivos. O primeiro é o sinal de referência e o segundo, que é o sinal portador de dados, é exatamente igual ao sinal de referência, ou o seu inverso, dependendo do sím-

bolo de informação a ser transmitido. Outros esquemas de modulação não coerente têm sido propostos para evitar a diminuição da taxa de dados e aumentar o desempenho do sistema. No esquema *quadratic chaos shift keying* (QCSK) [31], a informação digital é modulada empregando funções caóticas de base ortogonais. No *high efficiency* DCSK (HE-DCSK) [32], o receptor recicla cada sinal de referência para transportar dois bits de informação quando uma amostra de dados é modulada. A eficiência da largura de banda é aumentada e o sistema se torna mais robusto à interceptação. *Multi-carrier* DCSK (MC-DCSK) [33] é uma generalização do DCSK para sistemas multiusuário. Uma solução alternativa, denominada OFDM-DCSK, foi proposta em [34]. No esquema *Improved* DCSK (I-DCSK) [35], o sinal de referência é adicionado com inversão temporal ao sinal portador de dados para diminuir a duração do símbolo transmitido pela metade e melhorar a eficiência espectral. Outro esquema proposto recentemente é o *short reference* DCSK (SR-DCSK) [36], que utiliza sinais de referência de tamanho reduzido quando comparado ao DCSK para incrementar a taxa de dados e aumentar a eficiência energética do sistema.

1.4 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NA TOPOLOGIA DE ATRADORES CAÓTICOS

Sistemas dinâmicos caóticos são definidos por sistemas de equações diferenciais não lineares. Quando o sistema exibe caos, as soluções das equações dão origem a estruturas geométricas complexas denominadas atratores estranhos [1]. Estes objetos são formados pelas trajetórias determinadas pelas soluções das equações que definem o sistema representadas no espaço de fase, que, no caso de sistemas tridimensionais, é o espaço Euclidiano tridimensional. A denominação atrator significa que as trajetórias que se aproximam dessa região são atraídas e confinadas nesta região, e a denominação estranho se relaciona à estrutura fractal

inerente a esses conjuntos [37]. Como os atratores são conjuntos limitados, as trajetórias do atrator possuem vínculos relacionados à topologia do mesmo. Isto significa que apenas as sub-regiões do espaço Euclidiano contidas no atrator podem ser visitadas pelas trajetórias do sistema durante a sua evolução dinâmica.

A topologia do atrator é identificada pela organização topológica de suas órbitas periódicas instáveis [38], que são órbitas imersas no atrator com a propriedade de retornar arbitrariamente próximas da condição inicial após um determinado intervalo de tempo, isto é, o período da órbita. Estas órbitas formam um conjunto denso no atrator, de tal forma que qualquer órbita pode ser aproximada por elas. As órbitas periódicas instáveis podem ser analisadas de forma simples pela interseção do fluxo do atrator com uma superfície $(N - 1)$ -dimensional, em que N é a dimensão do espaço de fase. Esta superfície é denominada seção de Poincaré [1]. Os sucessivos cruzamentos do fluxo caótico com a seção de Poincaré são determinadas pelo mapa de Poincaré, e reduzem o estudo da dinâmica do atrator ao estudo de um mapa discreto com dimensão menor, porém com as mesmas informações dinâmicas essenciais à descrição topológica do atrator [38]. A aplicação do mapa de Poincaré, discretizando o sistema dinâmico, sugere uma ligação entre a evolução dinâmica de um sistema caótico com sistemas de transmissão de informação, pois uma codificação definida na seção de Poincaré transforma o fluxo contínuo numa sequência de símbolos definidos por um determinado alfabeto. Portanto, o sistema dinâmico pode ser visto como uma fonte discreta de informação.

Esta ideia é equivalente a estudar um sistema dinâmico por dinâmica simbólica [39], na qual o espaço de fase é particionado em diferentes regiões e a cada uma delas é atribuído um símbolo distinto. Este formalismo simplifica a análise do comportamento dinâmico das soluções das equações que definem o sistema. Neste caso, a evolução dinâmica das traje-

tórias é mapeada numa sequência de símbolos, que representa a sequência de visitação das trajetórias caóticas nas regiões definidas no particionamento. No caso do mapa de Poincaré, o particionamento é feito na seção de Poincaré e as órbitas do sistema dinâmico são descritas por sucessivos cruzamentos na seção [1].

O fato de atratores caóticos gerados por sistemas dinâmicos caóticos possuírem geometria com elevado grau de complexidade levou a novos mecanismos de descrição relacionados à sua topologia. Existem dois processos elementares que geram o comportamento caótico: expansão e contração. O primeiro deforma um conjunto de condições iniciais em uma direção, enquanto que o segundo contrai o conjunto em outra direção [38]. Este mecanismo foi descrito inicialmente por Smale [40] e contribuiu para o entendimento da dinâmica caótica com a descrição dos mecanismos que dão origem ao comportamento caótico, que até então eram desconhecidos. Em [38], foi apresentada uma classificação dos sistemas dinâmicos caóticos baseada em sua topologia. Esta descrição classifica os sistemas de acordo com os processos de expansão e contração, de forma que atratores resultantes dos mesmos processos são topologicamente equivalentes. Para classificar a topologia do sistema, o primeiro passo é construir algumas órbitas periódicas instáveis, formando o esqueleto do atrator e assim a evolução dinâmica das trajetórias fica bem definida em termos de características topológicas.

1.5 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Esta tese tem como objetivo empregar características topológicas dos atratores caóticos para modular sequências de símbolos de informação nas formas de onda caóticas geradas por um sistema dinâmico caótico. No caso de sistemas dinâmicos unidimensionais, o procedimento usual é utilizar dinâmica simbólica em conjunto com iteração reversa das órbitas para modular sequências binárias de informação [6]. Nesse contexto, um sistema baseado em

um mapa linear por partes foi proposto em [41], com um parâmetro de controle que permite alterar o comprimento de uma região de guarda, propiciando maior ou menor imunidade ao ruído. Outros sistemas de comunicação baseados em caos foram propostos baseados neste mapa, que possui uma região que nunca é visitada [42–44]. A existência de uma região de guarda restringe a dinâmica do sistema caótico em função do comprimento dessa região, o que induz inevitavelmente um compromisso entre desempenho e segurança.

Esta tese apresenta um novo mapa unidimensional baseado na função tangente hiperbólica, que pode ser utilizado em sistemas de comunicação e permite a indução de uma região de guarda natural que controla a relação entre desempenho e segurança sem interferir na dinâmica do sistema. As propriedades caóticas deste mapa são investigadas e é projetado um sistema de comunicação com modulação por iteração reversa. O desempenho do sistema é analisado em um canal AWGN. Para estudar a estrutura da dinâmica caótica do mapa, duas novas métricas são introduzidas, a taxa de espalhamento e o fator de contração. Na sequência, este mapa é generalizado com a introdução de um novo parâmetro de controle que possibilita uma melhor formatação do espectro dos sinais caóticos gerados pelo mapa.

No caso de sistemas dinâmicos caóticos tridimensionais, definidos por sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares, não existe um procedimento padrão para a modulação de sinais caóticos. Esta tese propõe a construção de sistemas de comunicação baseados em atratores caóticos tridimensionais, utilizando características topológicas dos atratores para transmitir sequências binárias de informação em um sistema de comunicação digital. Para tanto, é feita uma associação entre a evolução dinâmica de um atrator caótico tridimensional e um diagrama de estados definido a partir de uma seção de Poincaré do atrator caótico. A metodologia proposta utiliza o diagrama de estados para projetar um sistema de comunicação com um modulador bipolar, com a indução de transições no diagrama reali-

zada por controle de caos. As sequências de informação transmitidas são decodificadas com a utilização do algoritmo de Viterbi [45].

Para obter melhorias no sistema de comunicação proposto, são introduzidas restrições de visitação na seção de Poincaré, com o objetivo de atenuar o efeito do ruído presente nas formas de onda caóticas geradas pelo sistema. É feita uma análise da dinâmica simbólica do fluxo caótico associado ao sistema de comunicação com o objetivo de estabelecer ações de controle que possibilitem a utilização de restrições com pouca interferência na dinâmica natural do fluxo caótico. A partir da dinâmica simbólica das trajetórias caóticas, são construídos grafos que representam a dinâmica do fluxo, com os quais calcula-se a entropia do sistema. Finalmente, são construídos codificadores com o objetivo de mapear sequências simbólicas sem restrição em sequências restritas que obedecem à dinâmica estabelecida pelo fluxo caótico gerado por atratores tridimensionais.

1.6 ORGANIZAÇÃO E ESTRUTURA DA TESE

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- ▷ No capítulo 2, apresentam-se os sistemas caóticos unidimensionais, denominados mapas caóticos, e mostra-se como eles são empregados em sistemas de comunicação baseados em caos. Também é apresentado um novo mapa caótico unidimensional, baseado na função tangente hiperbólica, que possui vantagens em relação aos mapas normalmente utilizados na literatura.
- ▷ No capítulo 3, a construção de sistemas de comunicação baseados em caos é estendida para fluxos caóticos tridimensionais. Estes sistemas podem ser classificados de acordo com a topologia dos atratores gerados por sistemas de equações diferenciais. Investigam-se as propriedades topológicas dos atratores e é feito um estudo de caso para os atratores

de Rössler e Lorenz, mostrando como as características topológicas do atrator podem ser utilizadas para a construção de sistemas de comunicação e como a topologia do atrator se relaciona com o projeto do sistema.

- ▷ No capítulo 4 é feita uma representação em grafos da dinâmica simbólica das trajetórias caóticas geradas pelo atrator de Rössler, a partir dos quais se calcula a entropia do sistema. Em seguida, é feita uma análise dos efeitos da inclusão de restrições na seção de Poincaré na capacidade de transmissão de informação do sistema e são construídos codificadores para gerar as sequências com restrição.
- ▷ Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões derivadas do trabalho realizado nesta tese e são apresentadas propostas de continuidade deste trabalho.

2 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS EM MAPAS CAÓTICOS UNIDIMENSIONAIS

Neste capítulo, é proposto um novo mapa caótico unidimensional baseado na função tangente hiperbólica, denominado mapa tanh. Este mapa é utilizado na construção de um sistema de comunicação digital com modulação realizada por iteração reversa das órbitas. Em seguida, o mapa tanh é generalizado para garantir uma maior flexibilidade espectral, sendo denominado mapa stanh. As suas propriedades caóticas são investigadas pela análise do expoente de Lyapunov e do diagrama de órbitas. Além disso, são propostas duas novas métricas, denominadas taxa de espalhamento e fator de compressão, com o objetivo de caracterizar a estrutura local da dinâmica caótica de mapas unidimensionais. Finalmente, é feita uma análise espectral dos sinais caóticos gerados pelos mapas tanh e stanh.

2.1 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM DINÂMICA SIMBÓLICA

Nesta seção são introduzidos alguns mapas caóticos unidimensionais conhecidos e detalha-se o método de modulação caótica baseada em iteração reversa.

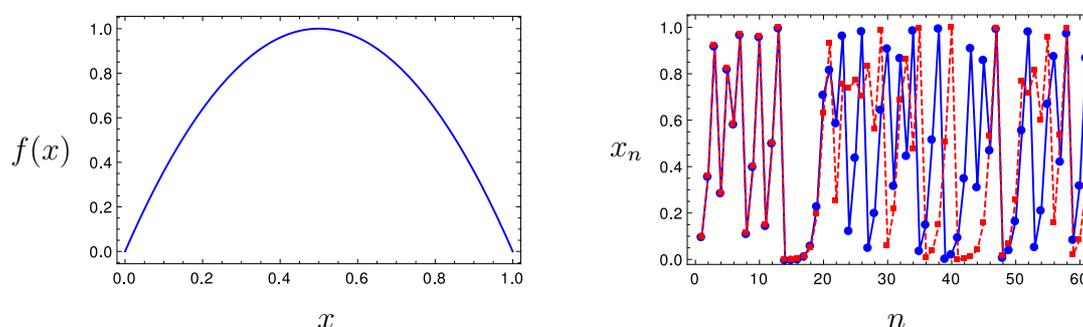
2.1.1 Mapas Caóticos Unidimensionais

Mapas caóticos unidimensionais são gerados pela aplicação iterativa de uma função não linear e não inversível $f(x)$, tal que

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Esta iteração gera uma série temporal discreta $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. Partindo de uma condição inicial x_0 , a aplicação iterativa gera a sequência $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$, em que $f^k(x)$ denota a k -ésima composição de $f(x)$. Esta sequência é denominada órbita de x_0 por $f(x)$. Por

Figura 1 – Gráfico do mapa logístico com o parâmetro $r = 4$ (esquerda). À direita são mostradas duas séries temporais obtidas pela iteração do mapa logístico com $r = 4$, uma para a condição inicial $x_0 = 0,1$ (linha cheia) e a outra para $x_0 = 0,1000001$ (linha pontilhada).



Fonte: O autor, 2018.

exemplo, um mapa unidimensional conhecido é o mapa logístico $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad (2.2)$$

em que r é um parâmetro real definido no intervalo $[0, 4]$. Quando $3,56995 \leq r \leq 4$, o mapa logístico apresenta intervalos de valores de r com comportamento caótico [1]. A Fig. 1 ilustra o gráfico do mapa logístico com o parâmetro dado por $r = 4$. Também são ilustradas duas séries temporais geradas pela iteração do mapa logístico com $r = 4$ com condições iniciais $x_0 = 0,1$ (linha cheia) e $x_0 = 0,1000001$ (linha pontilhada). Observe que apesar da proximidade entre os valores das condições iniciais, depois de aproximadamente 20 iterações as órbitas se descorrelacionam, indicando o comportamento de sensibilidade às condições iniciais.

2.1.2 Modulação Caótica Baseada em Iteração Reversa

Técnicas de modulação de sinais caóticos utilizando dinâmica simbólica foram propostas inicialmente em [6, 46]. O princípio básico consiste em criar um particionamento do espaço de fase do sistema dinâmico e atribuir um símbolo distinto a cada região da partição. Desta

forma, uma sequência de informação é transformada em uma sequência de símbolos que representa a dinâmica da visitação da órbita no espaço de fase. Por exemplo, no caso de sequências binárias, o particionamento é realizado em duas regiões: a uma delas é atribuído o símbolo 0 e à outra o símbolo 1 [46].

A utilização de mapas caóticos em sistemas de comunicação é realizada pela aplicação iterativa do mapa. Aplicações sucessivas do mapa estão associadas a sucessões de cruzamentos da órbita com uma seção de Poincaré adequada, cujas regiões do particionamento induzido são rotulados adequadamente, de forma a garantir às órbitas sequências únicas de símbolos, ou equivalentemente, sequências código únicas. Interpretando essas sequências como símbolos de informação, pode-se modulá-las em órbitas geradas pelo mapa caótico.

Para ilustrar esse método, vamos apresentar o mapa modificado de Bernoulli [41]. A função $f(x)$ é definida sobre um intervalo limitado \mathbb{H} tal que $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, de forma que \mathbb{H} é invariante por f . Este mapa é linear por partes e induz um particionamento de \mathbb{H} em três subintervalos I_0 , I_1 e I_2 , sendo definido por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+(1+p)}{1-p}, & -1 \leq x \leq -p \quad (I_0) \\ \frac{x}{p}, & -p \leq x \leq p \quad (I_2) \\ \frac{2x-(1+p)}{1-p}, & p \leq x \leq 1 \quad (I_1). \end{cases} \quad (2.3)$$

A modulação caótica baseada na iteração direta do mapa em (2.3) apresenta dois inconvenientes: amplificação de erro e erro de quantização [41]. Para contornar estes problemas é utilizada a iteração reversa, por meio do mapa de Bernoulli modificado inverso

$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{(1-p)x-(1+p)}{2}, & s = 0 \quad (I_0) \\ px, & s = 2, \quad (I_2) \\ \frac{(1-p)x+(1+p)}{2}, & s = 1, \quad (I_1), \end{cases} \quad (2.4)$$

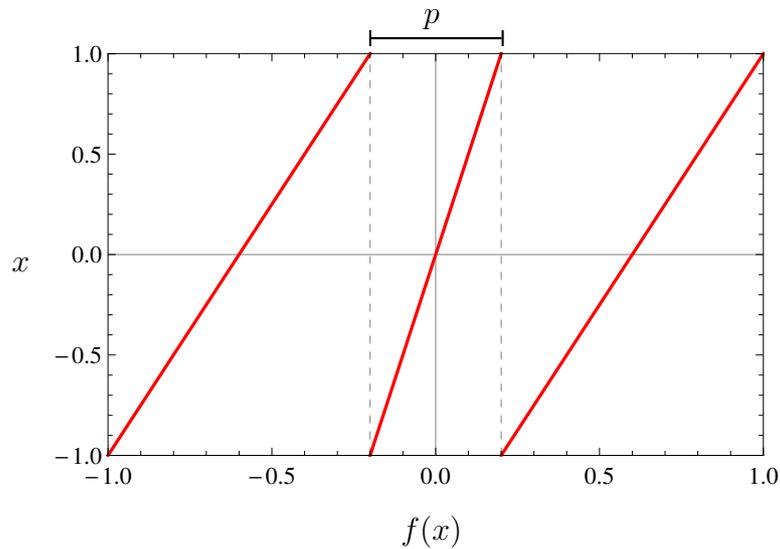
que é um conjunto de mapas de contração sobre \mathbb{H} . A modulação caótica de uma sequência finita de símbolos $s_n s_{n+1} \dots s_{M-1}$ é feita iterando (2.4) a partir de uma dada condição final

x_N . Essa abordagem é considerada em diversos cenários de comunicação caótica [41–43]. O procedimento é mapear o bit de informação 0 para $s = 0$ e o bit de informação 1 para $s = 1$. Desta forma, a região interna I_2 (para $s = 2$) nunca é visitada e é interpretada como uma região de guarda que garante uma distância mínima entre as sequências transmitidas. Por exemplo, seja a sequência de informação 010110 e $p = 0,3$. Escolhendo $x_N = 0,5$, o bit 0 é mapeado em $-0,475$, que corresponde à aplicação da primeira expressão em (2.4) sobre 0,5. O próximo bit é 1, logo a iteração é feita com a aplicação da terceira expressão em (2.4) sobre $-0,475$. Procedendo de forma análoga, a sequência caótica obtida é $-0,475; 0,48375; -0,480688; -0,481759; 0,818616; -0,363484$. Esta sequência caótica é a sequência modulada transmitida pelo sistema de comunicação.

A largura da região de guarda depende do parâmetro p , tornando o sistema mais robusto ao ruído quando p aumenta. Entretanto, o sistema se torna mais previsível, diminuindo a segurança para aplicações criptográficas. Outro inconveniente deste mapa é o enfraquecimento das propriedades caóticas ao diminuir os graus de liberdade do sistema a partir da proibição da ocorrência de valores na região I_2 . A Fig. 2 ilustra o mapa de Bernoulli modificado com região de guarda em função do parâmetro p .

Este problema é contornado com o mapa caótico denominado de mapa tanh. Este mapa tem um parâmetro de controle que pode ser convenientemente escolhido para manter uma região com pouca probabilidade de visitação (que pode ser interpretada como uma região de guarda) sem a necessidade de alterar a dinâmica do sistema com a proibição de visitação de regiões do mapa original. Na próxima seção é definido o mapa tanh e suas propriedades caóticas são estudadas.

Figura 2 – Mapa de Bernoulli modificado. A região central é a região de guarda, com extensão controlada pelo parâmetro p .



Fonte: O autor, 2018.

2.2 O MAPA TANH

O mapa \tanh é um mapa caótico unidimensional com dois parâmetros de controle, r e b , baseado na função tangente hiperbólica. O mapa \tanh é uma contribuição desta tese e é definido analiticamente por $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} e \cdot \tanh(r \cdot (x + 1)) - 1 & x < 0 \\ (-1)^b \cdot (e \cdot \tanh(-r \cdot (x - 1)) - 1) & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

O parâmetro e é um fator de escala utilizado para assegurar que a imagem do mapa esteja definida no intervalo $[-1, 1]$. Ele é definido pela expressão

$$e = \frac{2}{\tanh(r)}. \quad (2.6)$$

Os parâmetros de controle têm a função de alterar características do mapa. Neste caso, os parâmetros alteram a paridade e o formato do mapa. A paridade é controlada pelo parâmetro b , que pode assumir os valores $b = 0$ ou $b = 1$. Quando $b = 0$, o mapa tem paridade par e é

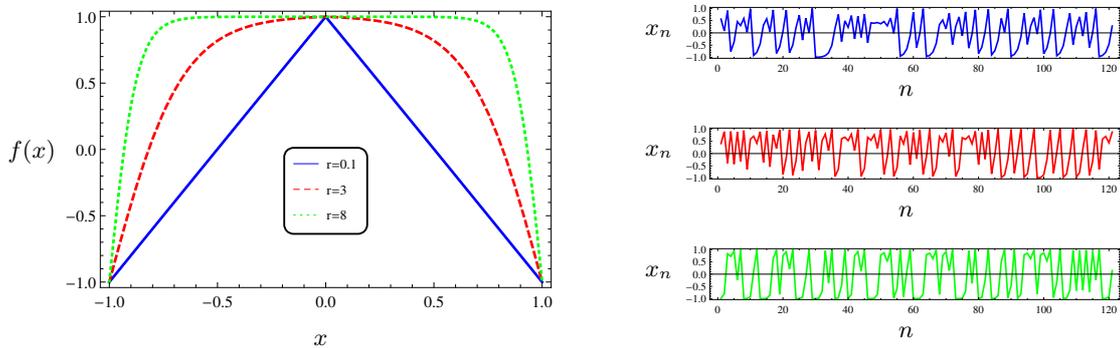
denominado mapa e-tanh. A simetria par implica que o mapa é simétrico em relação ao eixo $x = 0$. Quando $b = 1$, o mapa tem simetria ímpar e é denominado mapa o-tanh. Esta simetria torna o mapa o-tanh anti-simétrico em relação ao eixo $x = 0$. O outro parâmetro de controle é o parâmetro $r \in (0, 10]$, que controla o formato do mapa e a taxa de ocupação de pontos gerados pela iteração do mapa. Alterando o valor de r , o mapa é expandido na sua região central, sendo esta região mais ou menos extensa de acordo com o valor do parâmetro r . Este comportamento pode ser observado na Fig. 3, que mostra o mapa e-tanh para 3 valores de r , $r = 0,1; 3; 8$. Além disso, pode-se ver uma amostra da série temporal do mapa para cada um dos valores de r . Analogamente, a Fig. 4 mostra comportamento do mapa o-tanh. Também pode-se observar que quando o parâmetro r assume valores pequenos, como no caso de $r = 0,1$, o mapa e-tanh se aproxima do mapa da tenda e o mapa o-tanh se aproxima do mapa de Bernoulli. Este fato pode ser demonstrado analiticamente aplicando a expansão em série de Taylor na Equação (2.5). Fazendo a aproximação $\tanh(y) \approx y$, a Expressão (2.5) se reduz para

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ (-1)^b \cdot (-2x + 1), & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

A Equação (2.7) contém exatamente as expressões que definem o mapa da tenda, para $b = 0$ e o mapa de Bernoulli, no caso de $b = 1$. Portanto, os mapas da tenda e de Bernoulli são casos particulares do mapa tanh.

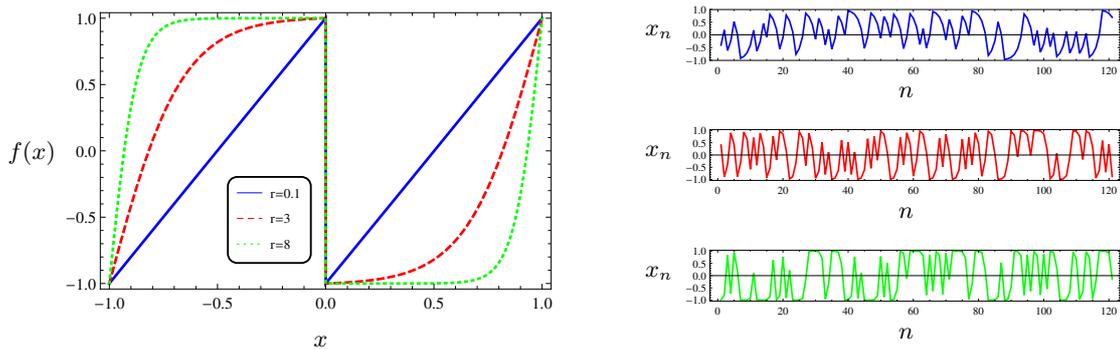
Para aplicações em sistemas de comunicação caótica, os valores do mapa são tomados pela aplicação iterativa, caracterizando o mapa tanh como um sistema dinâmico discreto. O processo de modulação é feito por iteração reversa, em que o bit de informação 0 é mapeado em $s = 0$ e o bit de informação 1 é mapeado em $s = 1$. Para o processo de iteração reversa,

Figura 3 – O mapa e-tanh e suas órbitas para três valores de r , $r = 0,1; 3; 8$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 4 – O mapa o-tanh e suas órbitas para três valores de r , $r = 0,1; 3; 8$.



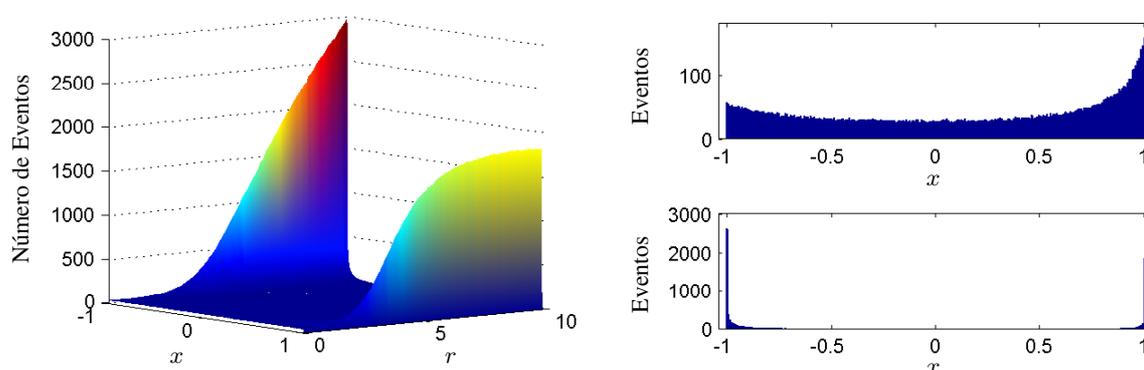
Fonte: O autor, 2018.

é utilizado o mapa tanh inverso, que é dado por

$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{r} \tanh^{-1} \left(\frac{x+1}{e} \right) - 1, & s = 0 \quad (I_0) \\ -\frac{1}{r} \tanh^{-1} \left(\frac{(-1)^b \cdot x + 1}{e} \right) + 1, & s = 1. \quad (I_1) \end{cases} \quad (2.8)$$

O parâmetro r também altera a distribuição espacial de pontos das órbitas geradas pelo mapa tanh. Este comportamento pode ser observado na Fig. 5 para o mapa e-tanh. O histograma mostra a distribuição de pontos de uma órbita com um total de 10000 pontos para cada valor de r . Pode-se ver que a distribuição é uniforme quando r tende a zero e se acumula nas extremidades do intervalo quando r aumenta. Também se pode perceber que as extremidades

Figura 5 – Cluster de histogramas do mapa e-tanh utilizando 10000 iterações para cada valor de r . À esquerda, o histograma 3D para $0,01 \leq r \leq 10$. À direita, uma seção transversal do histograma 3D para $r = 2$ (cima) e para $r = 9$ (baixo).

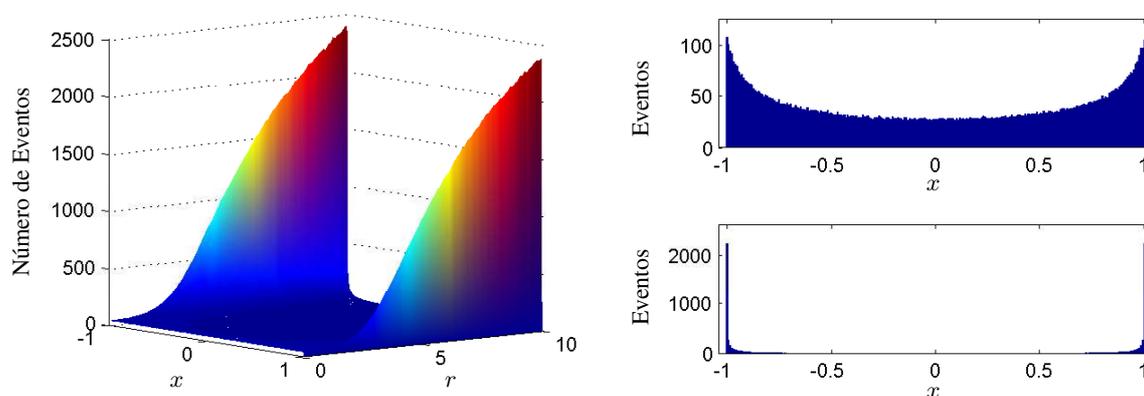


Fonte: O autor, 2018.

possuem uma assimetria na distribuição em relação a $x = 0$. Para $r < 7,1$, os pontos ficam mais concentrados na extremidade $x = 1$ e quando $r > 7,1$ este comportamento se inverte. A Fig. 5 também mostra uma seção transversal para $r = 2$ e para para $r = 9$, mostrando como a concentração dos pontos nas extremidades varia com o parâmetro r . A Fig. 6 mostra, analogamente, o comportamento do mapa o-tanh, que, ao contrário do mapa e-tanh, não possui assimetria de distribuição em relação a $x = 0$. Tanto o histograma 3D quanto as seções transversais ilustram a propriedade da simetria do mapa o-tanh na distribuição de pontos das órbitas.

Outra forma de analisar a distribuição de pontos é observar a distribuição invariante do mapa [47, 48]. As Figs. 7 e 8 mostram a distribuição invariante $\mu(x)$ para os mapas e-tanh e o-tanh, respectivamente, para dois valores de r . As curvas foram obtidas via simulação pelo método desenvolvido em [49]. Observa-se, assim como nos histogramas, uma assimetria na distribuição em torno de $x = 0$ para o mapa e-tanh, enquanto a distribuição é simétrica em torno de $x = 0$ para o mapa o-tanh. Uma característica comum do mapa tanh é o aumento

Figura 6 – Cluster de histogramas do mapa *o-tanh* utilizando 10000 iterações para cada valor de r . À esquerda, o histograma 3D para $0,01 \leq r \leq 10$. À direita, uma seção transversal do histograma 3D para $r = 2$ (cima) e para $r = 9$ (baixo).

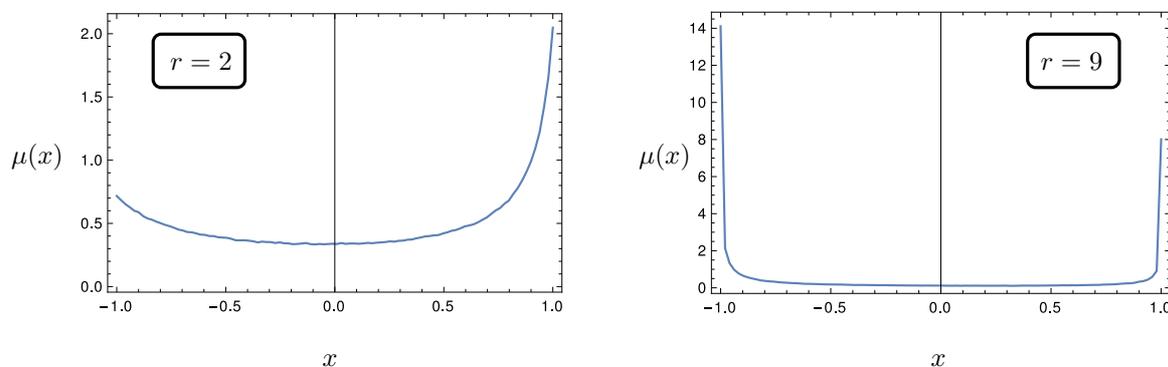


Fonte: O autor, 2018.

de pontos gerados nas proximidades dos valores extremos, que é devido à baixa ocorrência de valores próximos de $x = 0$. Pontos x_k nesta região (em torno de $x = 0$) são gerados com baixa probabilidade e, portanto, esta região pode ser interpretada como uma região de guarda, com largura controlada pelo parâmetro r .

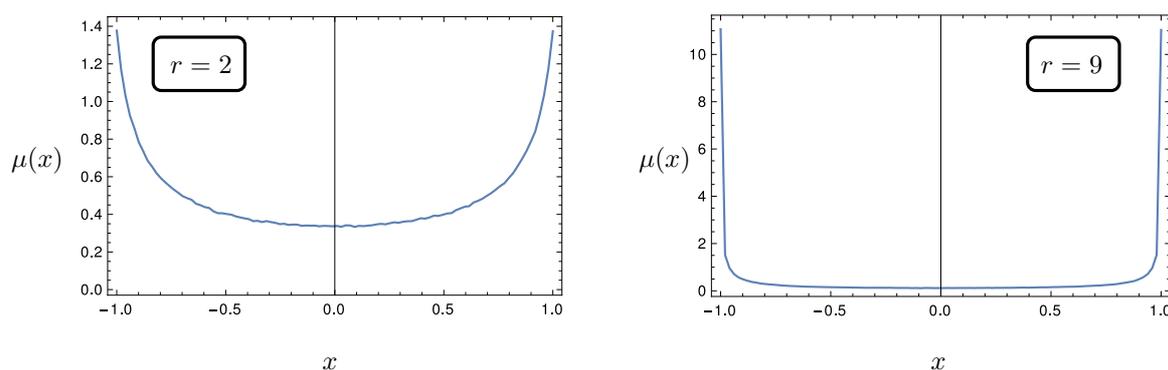
A existência de uma região de guarda natural é uma vantagem do mapa *tanh* em relação a outros mapas unidimensionais que são usualmente empregados em comunicação caótica. Em mapas lineares por partes, a região de guarda é introduzida artificialmente. Esta região, que é a região central, nunca é visitada e tem a largura controlada por um parâmetro. No processo de modulação, os bits de informação são mapeados nas regiões à esquerda e à direita da região de guarda. Isto melhora a imunidade ao ruído quando se separa consideravelmente as duas regiões. Por outro lado, faz com que o sistema seja mais previsível, pois é reduzido o intervalo de ocupação dos pontos das órbitas. Surge então um compromisso entre segurança e desempenho, de forma que o parâmetro deve ser escolhido de acordo com a necessidade da aplicação. Outra desvantagem desta abordagem é que a eliminação de pontos da órbita

Figura 7 – Distribuição invariante para o mapa e -tanh para $r = 2$ e $r = 9$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 8 – Distribuição invariante para o mapa o -tanh para $r = 2$ e $r = 9$.

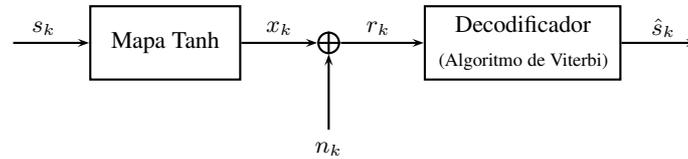


Fonte: O autor, 2018.

altera a dinâmica natural do sistema, que pode comprometer a dinâmica caótica do mapa. Eliminando os pontos da região de guarda, uma quantidade significativa de pontos das órbitas são descartados. No caso do mapa tanh, não é necessário eliminar nenhum dos pontos das órbitas, e isto mantém a dinâmica natural do mapa inalterada. Assim, surge uma relação entre compromisso e desempenho, que é ajustada pelo valor do parâmetro r .

Para avaliar o desempenho do mapa tanh, na próxima seção é analisado o comportamento

Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema de comunicação caótica baseado no mapa tanh.



Fonte: O autor, 2018.

de um sistema de comunicação baseado no mapa tanh em presença de ruído.

2.2.1 Análise de Desempenho

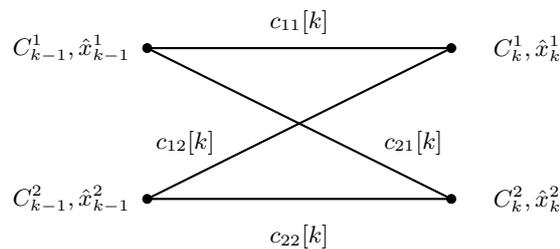
Um sistema de comunicação caótico proposto em [41] é composto de um modulador caótico baseado em dinâmica simbólica e na iteração reversa das órbitas do mapa modificado de Bernoulli e um canal de comunicação ruidoso. O decodificador utiliza o algoritmo de Viterbi sobre uma treliça de dois estados para estimar a sequência binária transmitida. A estrutura de blocos do sistema de comunicação é mostrada na Fig. 9. O mesmo sistema de comunicação foi considerado em vários outros cenários, como em [42–44]. Nestes trabalhos, é realizada uma análise do impacto do comprimento da região de guarda em relação ao parâmetro de controle do sistema por simulações computacionais. Nesta seção é realizada uma análise similar para o mapa tanh sobre um canal com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN, additive white Gaussian Noise).

Seja $[s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]$ uma sequência binária de informação, ou seja, $s_k \in \{0, 1\}$. A sequência caótica $[x_0, x_1, \dots, x_N]$ é gerada pela iteração reversa do mapa tanh, a partir de uma condição inicial conhecida x_N (obtida por (2.8) com os parâmetros b e r fixos), isto é

$$x_k = f_{s_k}^{-1}(x_{k+1}), \quad k = N - 1, \dots, 0.$$

Neste esquema de modulação caótica, se $s_k = 0$ a primeira equação de (2.8) é utilizada no

Figura 10 – Seção da treliça utilizada pelo algoritmo de Viterbi para decodificar a sequência caótica.



Fonte: O autor, 2018.

processo iterativo. Caso contrário, se $s_k = 1$ a segunda equação é utilizada. O sinal recebido no k -ésimo intervalo é dado por

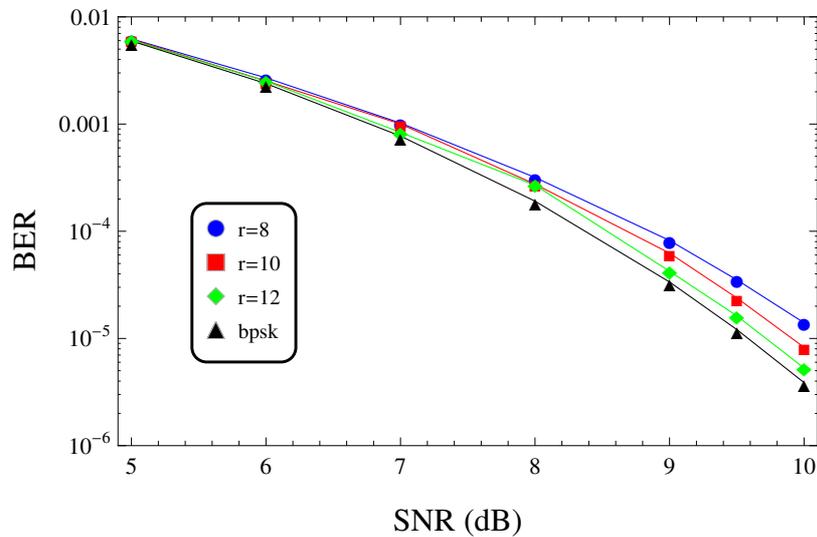
$$r_k = x_k + n_k, \quad (2.9)$$

em que n_k em (2.9) é uma variável aleatória Gaussiana de média zero e variância $N_0/2$. O decodificador implementa o algoritmo de Viterbi, denominado em [41] por *Viterbi decoding algorithm for chaotic signals* (VDAC). O decodificador utiliza uma treliça simplificada de dois estados e dois ramos partindo de cada um dos estados, correspondendo a cada um dos símbolos de informação. A estrutura da treliça no k -ésimo intervalo é mostrada na Fig. 10. No k -ésimo intervalo, o i -ésimo estado armazena a amostra caótica obtida pela iteração reversa do mapa iniciando por x_N e seguindo o caminho sobrevivente até esse estado, denotado por \hat{x}_k^i , e a métrica correspondente associada a esse estado, C_k^i . A métrica do ramo associado ao j -ésimo ramo iniciando do estado i é

$$c_{ij}[k] = |r_k - f_j^{-1}(\hat{x}_k^i)|^2.$$

O algoritmo de decodificação encontra a métrica no $(k - 1)$ -ésimo intervalo (C_{k-1}^i) e os caminhos sobreviventes correspondentes e processa a sequência recebida de forma recursiva para encontrar o caminho na treliça com a menor métrica.

Figura 11 – BER versus SNR para a iteração reversa do mapa caótico e-tanh para $r = 8, 10, 12$.



Fonte: O autor, 2018.

A relação sinal-ruído (SNR, *signal to noise rate*) é definida por

$$\text{SNR} = \frac{\bar{E}_x}{N_0},$$

em que a energia média da sequência transmitida \bar{E}_x é

$$\bar{E}_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2. \quad (2.10)$$

A Fig. 11 mostra a taxa de erro de bit (BER, *bit error rate*) em função da relação sinal-ruído (SNR) para o mapa e-tanh para $r = 8; 10; 12$. A curva de desempenho do sistema BPSK também é mostrada para referência. Quando r aumenta, o desempenho do mapa tanh fica muito próximo da curva BPSK, indicando que o mapa tanh cumpre o objetivo de prover uma região de guarda natural especificada pelo parâmetro r sem descartar pontos das órbitas. O mapa o-tanh apresenta o mesmo comportamento. A variação do parâmetro r tem um impacto importante no desempenho do sistema em relação à BER, porém esta variação não apresenta impacto significativo na dinâmica caótica do mapa. Para que seja possível fazer esta análise, é necessário utilizar ferramentas para analisar o comportamento caótico do sistema. Um dos

conceitos mais utilizados para esta tarefa é o expoente de Lyapunov. Na próxima seção, este conceito é introduzido e é feita uma análise do comportamento caótico do mapa tanh. Além disso, vamos introduzir duas novas métricas para estudar a dinâmica caótica de mapas unidimensionais.

2.3 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO CAÓTICO E NOVAS MÉTRICAS

Nesta seção, é feito um estudo do comportamento caótico do mapa tanh definido em (2.5). Esta análise é baseada em conceitos bem estabelecidos, como o expoente de Lyapunov e o diagrama de órbitas. Para uma melhor compreensão destes conceitos, ver as referências [2, 8, 48]. Esta análise é estendida com a introdução de duas novas métricas, que são contribuições desta tese, e são denominadas taxa de espalhamento e fator de contração.

2.3.1 Expoente de Lyapunov e Diagrama de Órbitas

O expoente de Lyapunov quantifica a taxa de separação de duas órbitas típicas inicialmente vizinhas. Um sistema que apresenta caos possui um valor positivo do expoente de Lyapunov. Desta forma, duas órbitas do atrator infinitesimalmente próximas tendem a se separar exponencialmente. Neste caso, dizemos que o sistema se expande na direção associada ao expoente de Lyapunov. Quando o expoente de Lyapunov é negativo, a separação entre as órbitas se contrai. Se o sistema for multidimensional, existe um expoente de Lyapunov para cada uma das direções e o conjunto de expoentes é denominado espectro de Lyapunov. Para sistemas multidimensionais, ocorrem ao mesmo tempo expansões e contrações nas direções de cada um dos expoentes. Neste caso, é o conjunto desses processos (expansões e contrações) que dá origem ao comportamento caótico.

Para sistemas discretos unidimensionais, o expoente de Lyapunov é definido por [1, 8]

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (2.11)$$

em que $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$ e os pontos $\{x_i\}$ formam uma órbita típica do mapa. O expoente de Lyapunov pode ser calculado exatamente quando o mapa é ergódico e a sua distribuição invariante $\mu(x)$ é conhecida. Neste caso, a propriedade da ergodicidade implica que médias temporais equivalem a médias espaciais no espaço de fase em relação à distribuição invariante sobre um domínio de integração X , e, portanto, o expoente de Lyapunov é dado por [47]

$$\lambda = \int_X \ln(|f'(x)|) \mu(x) dx. \quad (2.12)$$

O expoente de Lyapunov do mapa \tanh é invariante em relação ao parâmetro b , como é demonstrado a seguir. Sejam $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ duas órbitas geradas pelo mapa e - \tanh e pelo mapa o - \tanh , respectivamente. Suponha que $x_0 = y_0$ e $|x_\ell| \neq |y_\ell|$ para algum inteiro positivo ℓ . Então, existe um inteiro mínimo i , $0 < i < \ell$, tal que $|x_{i+1}| \neq |y_{i+1}|$. Pode-se ver de (2.5) que $|x_{i+1}|$ e $|y_{i+1}|$ são distintos apenas se $x_i \neq y_i$, mas como $|x_i| = |y_i|$, segue que $y_i = -x_i$. Sem perda de generalidade, suponha que $x_i \geq 0$, então

$$|x_{i+1}| = |f(x_i)| = |e \cdot \tanh(-r(x_i - 1)) - 1| \quad (2.13)$$

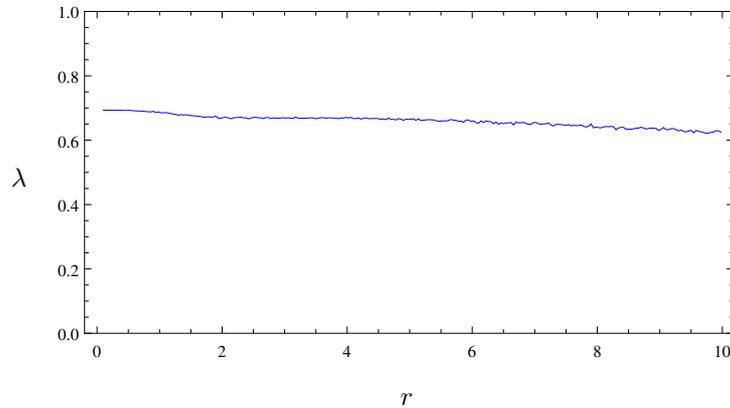
$$= |e \cdot \tanh(r(-x_i + 1)) - 1| \quad (2.14)$$

$$= |e \cdot \tanh(r(y_i + 1)) - 1| \quad (2.15)$$

$$= |f(y_i)| = |y_{i+1}|. \quad (2.16)$$

Consequentemente, iniciando das mesmas condições iniciais ($x_0 = y_0$), conclui-se que $\{|x_i|\}_{i=0}^{\ell} = \{|y_i|\}_{i=0}^{\ell}$ para todo $\ell > 0$. Agora, demonstra-se que o valor absoluto da derivada do mapa \tanh depende apenas do valor absoluto do argumento. Suponha novamente

Figura 12 – Expoente de Lyapunov versus o parâmetro r para o mapa e-tanh.



Fonte: O autor, 2018.

que $x_i \geq 0$ e que $f(x)$ é o mapa e-tanh, então

$$|f'(x_i)| = |e \cdot (-r) \cdot \operatorname{sech}^2(-r(x_i - 1))| \quad (2.17)$$

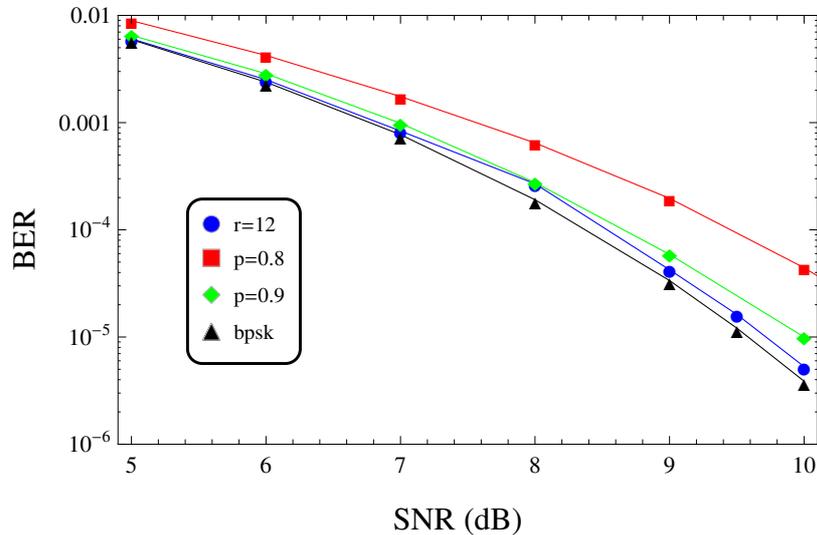
$$= |e \cdot r \cdot \operatorname{sech}^2(r(-x_i + 1))| = |f'(-x_i)|, \quad (2.18)$$

o que também é verdadeiro para o mapa o-tanh. Portanto, $\{|x_i|\}_{i=0}^{\ell} = \{|y_i|\}_{i=0}^{\ell}$ implica que $\{|f'(x_i)|\}_{i=0}^{\ell} = \{|f'(y_i)|\}_{i=0}^{\ell}$. Assim, conclui-se de (2.11) que o expoente de Lyapunov do mapa tanh é invariante em relação ao parâmetro b .

A Fig. 12 mostra que o expoente de Lyapunov do mapa tanh é positivo em todo o intervalo de valores considerados do parâmetro r . Neste gráfico, consideramos uma órbita finita com $N = 10.000$ pontos, sendo descartados os primeiros 200 pontos para eliminação do comportamento transitente. É importante observar que, quando r tende a zero, o valor do expoente de Lyapunov do mapa tanh é o mesmo do mapa da tenda, que é igual a 0,693, e ele diminui lentamente com o aumento de r .

Por outro lado, o expoente de Lyapunov do mapa de Bernoulli modificado definido em (2.3) depende fortemente do parâmetro p , e se comporta conforme mostrado em [50]. Neste caso, é possível expressar analiticamente o expoente de Lyapunov λ em função do parâmetro

Figura 13 – BER versus SNR para a iteração reversa do mapa de Bernoulli modificado com $p = 0,8$ e $p = 0,9$ e para o mapa caótico e-tanh para $r = 12$.



Fonte: O autor, 2018.

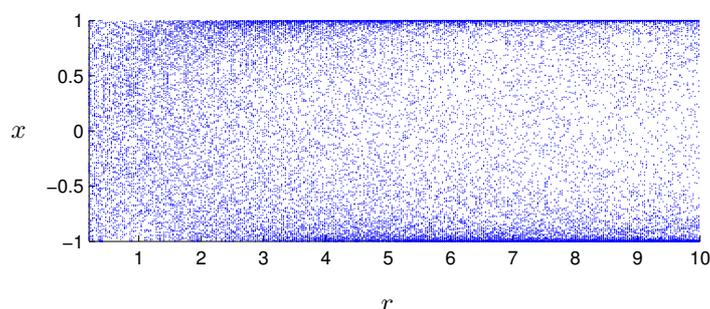
p , e a expressão para o mapa de Bernoulli modificado é dada por

$$\lambda = (1 - p) \ln \left(\frac{2}{1 - p} \right) + p \ln \left(\frac{1}{p} \right). \quad (2.19)$$

Por exemplo, $\lambda = 0,639$ para $p = 0,8$ e $\lambda = 0,394$ para $p = 0,9$. O expoente de Lyapunov do mapa de Bernoulli modificado para $p = 0,8$ é aproximadamente o mesmo que o valor do expoente do mapa tanh com $r = 12$. Para fazer um comparativo dos dois mapas, fixamos esses parâmetros, e comparamos as respectivas BER, como é mostrado na Fig. 13. Esta simulação foi realizada com o mesmo cenário de comunicação discutido na subseção anterior. Também pode ser visto na Fig. 13 que para $p = 0,9$, o desempenho é melhor que no caso de $p = 0,8$ com o custo de um menor valor do expoente de Lyapunov. As curvas na Fig. 13 também mostram que o mapa tanh com $r = 12$ supera o desempenho do mapa de Bernoulli para os dois valores de p considerados.

Um outro conceito que é utilizado para a análise do comportamento caótico de um sistema é o de diagrama de órbitas. O diagrama de órbitas mostra como é a distribuição de

Figura 14 – Diagrama de órbitas em relação ao parâmetro r para o mapa the e -tanh.



Fonte: O autor, 2018.

pontos das órbitas em função dos valores do parâmetro de controle do mapa. Quando o sistema possui comportamento caótico, existem regiões nas quais os pontos ocupam toda a faixa de definição do parâmetro, de forma aparentemente aleatória. O diagrama de órbitas do mapa e -tanh é mostrado na Fig. 14. Na próxima seção, são introduzidas duas novas métricas para avaliar o comportamento de mapas unidimensionais, denominadas *taxa de espalhamento* e *fator de contração*, que podem ser utilizadas para estudar a estrutura local da dinâmica caótica. Antes de introduzi-las, é feita uma revisão de algumas métricas importantes já estabelecidas na análise de mapas unidimensionais.

2.4 MÉTRICAS ESTRUTURAIIS

Um sistema dinâmico pode ser analisado por várias perspectivas, que é o objetivo das definições das métricas estruturais, tais como a dimensão do espaço de fase, dimensão topológica, dimensão fractal, dimensão de informação, entropia de informação e dimensão de embebedimento [51]. Nesta seção, são revisitadas três métricas generalizadas bem conhecidas que capturam a estrutura local do atrator [52, 53]. Em seguida, duas novas métricas são introduzidas, denominadas taxa de espalhamento e fator de contração, motivadas pelo ganho

de desempenho observados no sistema de comunicação caótico considerado na Seção 2.2.1. Este ganho é alcançado explorando a concentração de pontos observados na distribuição invariante do mapa tanh. Assim, a taxa de espalhamento mede a concentração de pontos no atrator como consequência do processo dinâmico do mapa caótico, enquanto o fator de contração quantifica como os pontos se acumulam nas regiões de alta concentração.

2.4.1 Métricas em Atratores

Seja $\{x_i\}_{i=0}^N$ uma órbita de um mapa caótico e considere uma cobertura do seu atrator por hipercubos com arestas de comprimento ℓ . O número de hipercubos que contém pontos do atrator é $M(\ell)$. O conjunto de medidas que associa a estrutura local fractal de atratores é baseado nestes conceitos. Como primeiro exemplo, considera-se a dimensão fractal, ou dimensão de Hausdorff-Besikovich, denotada por D [54], uma medida puramente geométrica que caracteriza o aumento do número mínimo de hipercubos de arestas de comprimento ℓ necessários para formar uma cobertura do atrator quando $\ell \rightarrow 0$. Pode ser demonstrado que $M(\ell) \simeq \ell^{-D}$. Esta medida é independente da frequência com que uma trajetória típica visita as várias regiões de um atrator. Um aspecto a ser destacado é a dificuldade computacional para calcular D .

Uma alternativa para D que captura o padrão de ocupação do atrator é a entropia de informação, $S(\ell)$. Ela pode ser entendida como a informação adquirida por um observador ao medir o estado atual do sistema x_i com precisão ℓ , assumindo que ele conhece todas as propriedades do sistema, exceto o estado inicial x_0 . A entropia de informação pode ser escrita como [51, 55]

$$S(\ell) = - \sum_{i=1}^{M(\ell)} p_i \ln p_i \simeq S_0 - \sigma \ln \ell, \quad (2.20)$$

em que $p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} m_i/N$, para uma sequência de comprimento N com m_i ocorrências no

i -ésimo hipercubo, e σ é chamada a dimensão de informação. É importante observar que S_0 é uma constante relacionada com a entropia diferencial, e é obtida pelo limite (quando $\ell \rightarrow 0$) da entropia relativa entre a distribuição de ocorrências dos hipercubos sobre o atrator e a ocupação uniforme dos hipercubos [56, 57]. Além disso, no contexto de compressão analógica sem perdas, a dimensão de informação é interpretada como a taxa de entropia de uma expansão diádica do sistema [57], uma relação que evidencia uma conexão intrínseca entre sistemas de informação e sistemas dinâmicos. Para uma distribuição uniforme, $p_i = 1/M(\ell)$, a entropia é máxima e a dimensão de informação é igual à dimensão fractal [52, 53]. A complexidade computacional para o cálculo da dimensão de informação é similar à do cálculo para a dimensão fractal [51].

Devido à divergência exponencial das trajetórias, a maioria dos pares (x_i, x_j) com $i \neq j$ são pares dinamicamente decorrelacionados. Entretanto, os pontos estão sobre o atrator, sendo assim espacialmente correlacionados. Esta correlação espacial pode ser medida pela integral de correlação $C(\ell)$ [58], definida por

$$C(\ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \times \{ \text{número de pares } (i, j) \text{ tais que } |x_i - x_j| < \ell \}. \quad (2.21)$$

É conhecido que, para pequenos hipercubos com arestas de comprimento ℓ ,

$$C(\ell) \sim \ell^\nu, \quad (2.22)$$

em que ν é uma constante que pode ser interpretada como uma medida da estrutura local do atrator estranho [58].

A próxima subseção introduz uma nova métrica que captura a concentração de pontos sobre o atrator de um sistema caótico unidimensional. É importante mencionar que a métrica proposta apenas captura os aspectos dinâmicos que geram concentração de pontos, o que é obtido pela supressão dos efeitos da geometria (aspectos estáticos). Além disso, ela é definida sobre o gráfico $f(x)$ e não sobre o atrator do mapa.

2.4.2 Taxa de Espalhamento

O atrator gerado pelo mapa tanh não é homogeneamente ocupado pelos pontos das órbitas geradas a partir de condições iniciais definidas dentro do domínio do mapa. Os pontos se concentram em algumas regiões com maior frequência que em outras, gerando regiões com grande densidade de pontos e regiões com pouca densidade, isto é, pouco visitadas. Para medir a concentração de pontos nas regiões do atrator, definimos uma métrica, a qual denominamos taxa de espalhamento, que quantifica como os pontos de uma órbita se concentram no atrator. A taxa de espalhamento (\mathcal{SR} , *spread rate*) mede o quanto o atrator é efetivamente visitado para uma órbita específica. Neste caso, o termo *efetivamente visitado* significa uma região delimitada por dois pontos consecutivos sobre o atrator, gerada por uma órbita finita com N pontos com comprimento menor ou igual a $s_{th} \triangleq L/N$, em que L é o comprimento da curva $f(x)$ do mapa caótico, obtida pela expressão

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.23)$$

O termo s_{th} (limiar) é o comprimento de uma região efetivamente visitada se os pontos da órbita são distribuídos de forma homogênea sobre o atrator. É importante salientar que a estrutura multifractal do atrator implica que uma escolha diferente para $s_{th} < L$ não tem efeito no comportamento da \mathcal{SR} . Portanto, é possível utilizar outros valores do limiar, motivados por alguma outra análise específica. A razão entre o comprimento total das regiões efetivamente visitadas e o comprimento de $f(x)$ especifica a \mathcal{SR} , e assim o valor máximo da \mathcal{SR} é igual a um, e isto ocorre para atratores homogeneamente ocupados, pois cada uma das regiões tem comprimento L/N . Para uma órbita arbitrária $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$, não necessariamente distribuída homogeneamente, seja $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{N-1}$ a órbita reordenada em ordem crescente nos índices, isto é, $\tilde{x}_i < \tilde{x}_{i+1}$. Os arcos que particionam $f(x)$ são delimitados pelos pares vizinhos

$(\tilde{x}_i, f(\tilde{x}_i))$ e $(\tilde{x}_{i+1}, f(\tilde{x}_{i+1}))$, e o k -ésimo arco tem comprimento

$$s_k = \int_{\tilde{x}_{k-1}}^{\tilde{x}_k} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

O comprimento s_k do k -ésimo arco é contado como parte do *comprimento efetivamente ocupado* s se $s_k \leq s_{th}$, então

$$s = \sum_{\substack{s_k \leq s_{th} \\ 1 \leq k \leq N-1}} s_k. \quad (2.25)$$

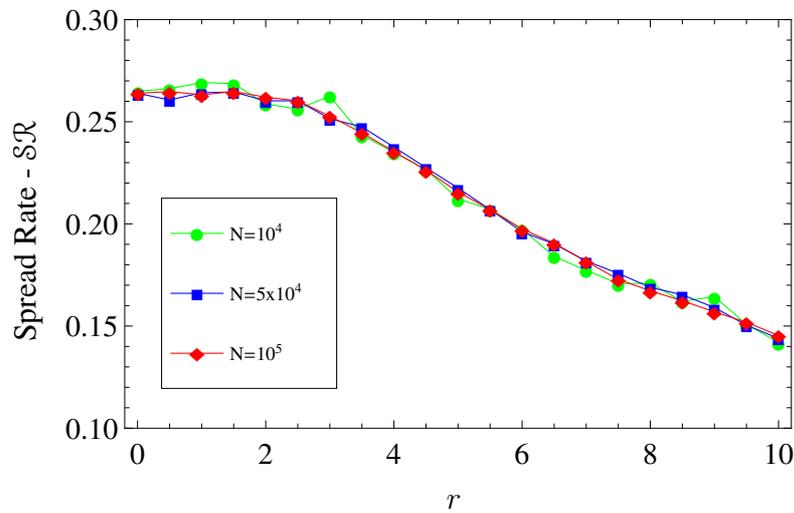
Finalmente, define-se \mathcal{SR} por

$$\mathcal{SR} \triangleq \frac{s}{L}. \quad (2.26)$$

Foi observado por simulações computacionais que, para a mesma condição inicial, o mapa tanh gera conjuntos distintos de comprimentos de arco para $b = 0$ e $b = 1$, mas há uma convergência estatística das curvas de \mathcal{SR} para esses dois valores do parâmetro b . Assim, as propriedades ergódicas do mapa tanh pela métrica \mathcal{SR} são invariantes sob o parâmetro b . Esta observação também é válida para a estatística que será definida na próxima seção.

As curvas da \mathcal{SR} versus r para três valores de N são mostrados na Fig. 15. Observa-se uma concordância significativa das curvas para valores diferentes de N , o que revela a consistência estatística da \mathcal{SR} . Para $0 < r < 2$, aproximadamente, a \mathcal{SR} apresenta comportamento uniforme, e mostra que apenas uma região em torno 26% do comprimento de $f(\cdot)$ contribui globalmente para as regiões efetivamente visitadas, ou seja, cerca de um quarto do atrator é efetivamente ocupado. Para $r > 2$, \mathcal{SR} apresenta um decaimento aproximadamente linear com coeficiente angular de aproximadamente 0.02, isto é, 8% do valor inicial da \mathcal{SR} . Portanto, \mathcal{SR} diminui 8% por unidade para $2 < r < 10$ de $r = 2$. Também foi computada a porcentagem de pontos dentro de uma região efetivamente visitada. Esta porcentagem muda de 63% com $r = 2$ para 72% com $r = 10$. Assim, o aumento de r resulta num número crescente de pontos dentro de uma região menor do atrator. Esta propriedade pode ser anali-

Figura 15 – \mathcal{SR} versus r para o mapa \tanh com N igual a 10^4 , 5×10^4 e 10^5 .



Fonte: O autor, 2018.

sada quantitativamente, e para isto vamos definir, na próxima seção, uma nova métrica para estudar este comportamento do atrator.

2.4.3 Fator de Contração

Conforme observado na seção anterior, o aumento do valor de r aumenta o número de pontos dentro de regiões menores do atrator. Isto significa que ocorre uma compressão dos pontos das órbitas, aumentando a concentração de pontos em regiões cada vez menores do atrator. Para quantificar esta propriedade, é definida uma nova métrica, que assim como a \mathcal{SR} , possui comportamento estatístico, e que é denominada de fator de contração (\mathcal{CF} , *contraction factor*).

Considere os comprimentos de arco $\{s_k\}_{k=1}^N$ calculados como em (2.24). A razão entre o comprimento médio dos arcos normalizados por s_{th} e a raiz quadrada da média do

comprimento dos arcos normalizados define o fator de contração (\mathcal{CF})

$$\mathcal{CF} \triangleq \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{s_k}{s_{th}}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{s_k}{s_{th}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{s_k}{s_{th}}\right)^2}}, \quad (2.27)$$

em que a igualdade vem da definição de s_{th} e do fato de que para N suficientemente grande $\sum_{k=1}^N s_k = L$. Demonstra-se agora que o denominador em (2.27) é no mínimo igual a um, com a igualdade se os comprimentos dos arcos são iguais (neste caso os pontos da órbita são homogeneamente distribuídos no atrator). Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange para $f(s_1, \dots, s_N) = \sum_{k=1}^N s_k^2$ e $g(s_1, \dots, s_N) = \sum_{k=1}^N s_k - L$, os pontos extremos de $f(s_1, \dots, s_N)$ com a restrição $g(s_1, \dots, s_N) = 0$ são determinados solucionando o sistema de equações

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad (2.28)$$

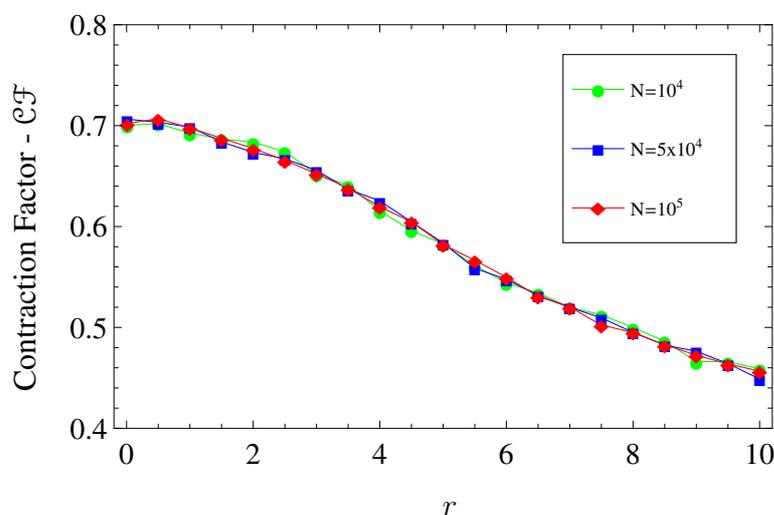
$$g(s_1, \dots, s_N) = 0$$

para algum λ . A única solução deve satisfazer $s_i = s_j$ para $1 \leq i, j \leq N$. Para determinar se este ponto extremo é um ponto de máximo ou mínimo, seja $s_i = L/N$, então $f(s_1, \dots, s_N) = L^2/N$. Entretanto se todos os s_i forem nulos, exceto um, temos que $f(s_1, \dots, s_N) = L^2$, e portanto este ponto extremo é um mínimo.

A concentração de sub-regiões em regiões de alta densidade no atrator é associada com a diminuição do \mathcal{CF} , pois a raiz quadrada média aumenta com o aumento dos comprimentos dos arcos acima de s_{th} , ou equivalentemente, a diminuição abaixo de s_{th} dos comprimentos dos arcos restantes. Utilizando a definição de s_{th} , os comprimentos dos arcos em (2.27) são normalizados por L , o que faz a análise independente do comprimento real do atrator.

As curvas do \mathcal{CF} versus r para três valores de N são mostrados na Fig. 16. A invariância com N é observada novamente. Note que o decréscimo monotônico do \mathcal{CF} com r , o que contrasta com a \mathcal{SR} para o intervalo inicial até $r = 2$. Aproximando as curvas por uma linha

Figura 16 – \mathcal{CF} versus r para o mapa \tanh map com N igual 10^4 , 5×10^4 e 10^5 .



Fonte: O autor, 2018.

reta de $r = 0$ até $r = 10$ passando pelos valores extremos de \mathcal{CF} , observamos uma contração de 24%, com 2,4% de ganho de concentração por unidade de r .

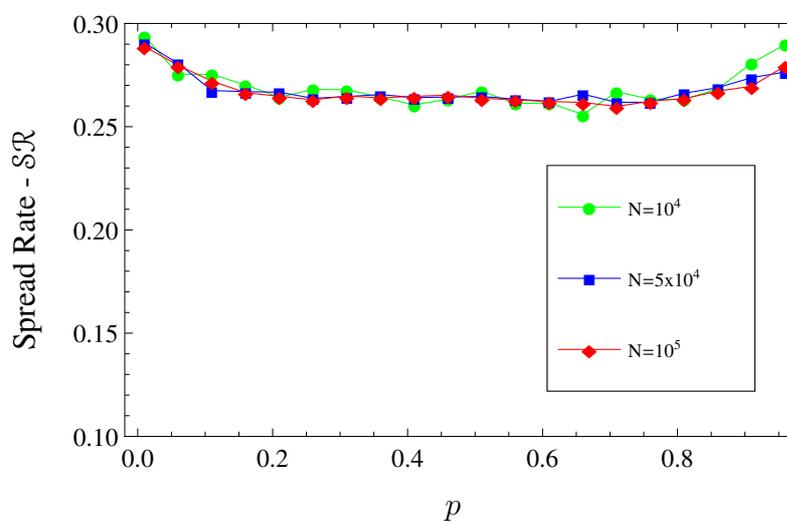
Para ganhar um entendimento mais profundo da aplicação analítica das estatísticas \mathcal{SR} e \mathcal{CF} , na próxima seção é feita uma comparação entre o comportamento do mapa de Bernoulli modificado e do mapa \tanh , considerando os curvas de \mathcal{SR} e \mathcal{CF} .

2.4.4 \mathcal{SR} e \mathcal{CF} para o Mapa de Bernoulli Modificado

A métrica \mathcal{SR} está relacionada com a extensão das regiões sobre o atrator das regiões de maior concentração para um dado limiar s_{th} , e a \mathcal{CF} mede a força da concentração nestas regiões. Nesta subseção, é proposta uma descrição qualitativa da concentração de pontos para uma órbita pelo produto ponto a ponto $\mathcal{CF} \times \mathcal{SR}$. Este produto quantifica a composição de dois diferentes mecanismos que atuam no acúmulo de pontos em sub-regiões do atrator.

A \mathcal{SR} versus o parâmetro p para o mapa de Bernoulli modificado definido em (2.3) é dado na Fig. 17. Observa-se que para um grande intervalo de p o valor da \mathcal{SR} é quase constante.

Figura 17 – \mathcal{SR} para o mapa de Bernoulli modificado em função do parâmetro p .

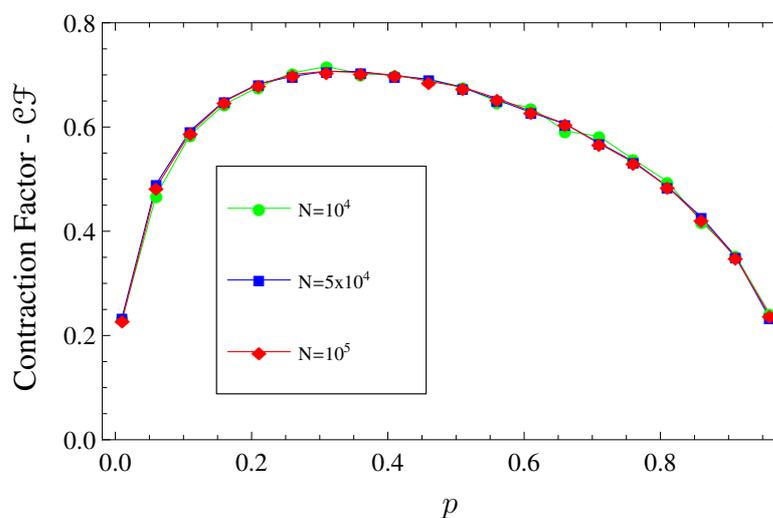


Fonte: O autor, 2018.

Para um mapa caótico, isto indica que a região de maior concentração depende do parâmetro p .

O fato da \mathcal{SR} ser quase constante não deve ser interpretado como a invariância de concentração com p , pois o mecanismo relacionado como o \mathcal{CF} também deve ser considerado. Na Fig. 18 a dependência da força da concentração em função de p é apresentada, e observa-se uma forte compressão para os valores extremos de p .

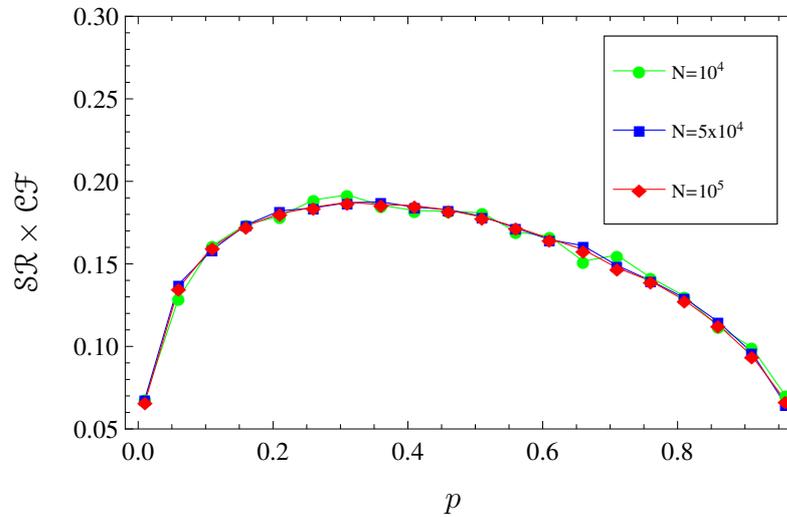
Figura 18 – \mathcal{CF} para o mapa de Bernoulli modificado em função do parâmetro p .



Fonte: O autor, 2018.

O efeito conjunto de \mathcal{SR} e \mathcal{CF} , representado pelo produto ponto a ponto de ambas as métricas, é mostrado na Fig. 19 para o mapa de Bernoulli modificado e na Fig. 20 para o mapa tanh. Ambos os mapas permitem o controle da concentração de pontos pela variação dos respectivos parâmetros. Esta figura mostra a variação da concentração de pontos sobre o mesmo intervalo, de 0,065 a 0,185, entretanto o comportamento do mapa tanh é monotonicamente decrescente, enquanto o mapa de Bernoulli modificado tem um formato côncavo. É estabelecido um limiar de 0,15 para o efeito conjunto da concentração para ambos os mapas. Para o mapa de Bernoulli modificado, este limiar é atingido apenas para valores de p menores ou iguais a 0,1 ou maiores que 0,7. Porém, este mapa tem um decréscimo severo no seu comportamento caótico para $p > 0,8$, como demonstrado em [50] utilizando o diagrama de órbitas e o expoente de Lyapunov. Desta forma, um bom compromisso entre compressão e comportamento caótico é atingido para valores de p no intervalo $p < 0,1$ e $0,7 < p < 0,8$. A curva monotonicamente decrescente do mapa tanh alcança uma concentração conjunta de pontos abaixo de 0,15 para $r > 4$. Esta análise indica que o mapa tanh é mais adequado

Figura 19 – Concentração conjunta ($\mathcal{SR} \times \mathcal{CF}$) para o mapa de Bernoulli modificado com $0 < p < 1$.



Fonte: O autor, 2018.

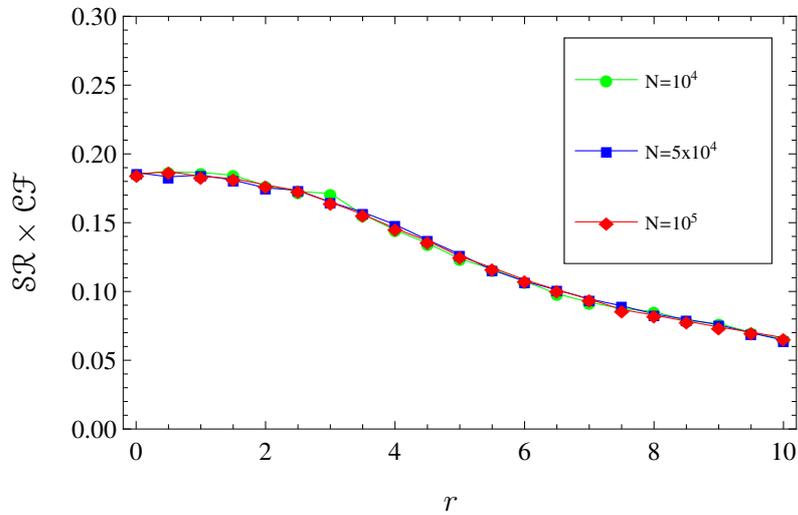
para aplicações nas quais se requer mapas com regiões de guarda, pois eles têm uma melhor concentração conjunta como uma função do intervalo do parâmetro do mapa do que o mapa de Bernoulli modificado.

Adicionalmente, o comportamento da \mathcal{SR} e \mathcal{CF} para o mapa tanh permite determinar uma expressão analítica para o efeito conjunto. Considerando linhas retas passando pelo ponto final das curvas, podemos estimar $\mathcal{SR}(r) \approx -0,011 \times r + 0,265$ e $\mathcal{CF}(r) \approx -0,025 \times r + 0,7$, assim o efeito conjunto é dado por $(\mathcal{SR} \times \mathcal{CF})(r) \approx 2,75 \times 10^{-4} r^2 - 0,0143 \times r + 0,1855$, tendo uma boa aderência à curva da Fig. 20, coincidindo nos pontos extremos.

2.5 ANÁLISE ESPECTRAL

O comportamento da densidade espectral de potência (PSD, *power spectral density*) de sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes é investigado em [59, 60]. Nestes trabalhos mostra-se que variando o parâmetro de controle do mapa é possível gerar sinais caóticos de características passa-baixa ou passa-alta. Nesta seção, estende-se esta análise

Figura 20 – Concentração conjunta ($\mathcal{SR} \times \mathcal{CF}$) versus r para o mapa tanh.



Fonte: O autor, 2018.

para o mapa tanh utilizando simulações computacionais.

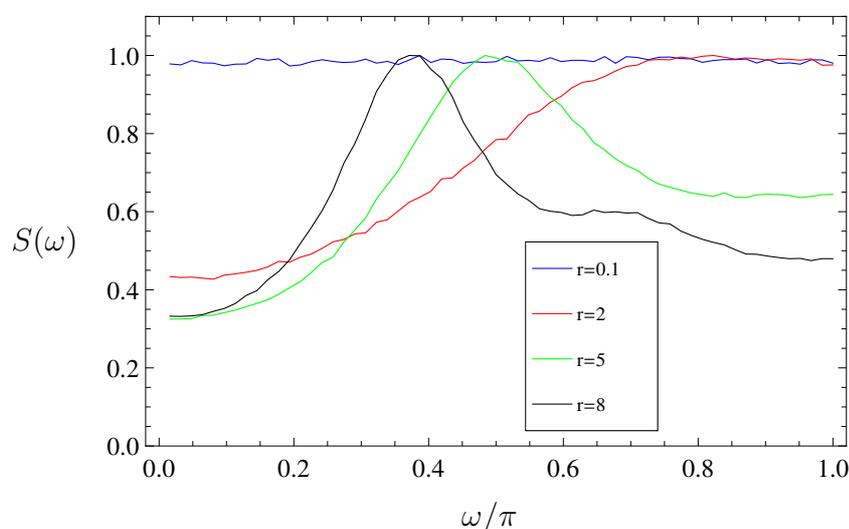
A partir de uma condição inicial x_0 é gerada uma órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ utilizando (2.1). Esta órbita, que é um sinal determinístico, pode ser considerada uma função amostral de um processo estocástico estacionário [59], em que cada função amostral é gerada com uma condição inicial distinta. Assim, $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias discretas indexadas pelo índice i tal que a média de x_i é $\eta = \mathbf{E}[x_i]$ e a função de autocorrelação (ACF, *autocorrelation function*) é dada por $R[m] = \mathbf{E}[x_i x_{i+m}]$, em que a média é somada sobre todas as condições iniciais. Para as simulações numéricas da AFC foram empregadas órbitas de tamanho $N = 1024$ e um conjunto de 20.000 condições iniciais uniformemente distribuídas no intervalo $[-1, 1]$.

A PSD é a transformada de Fourier de tempo discreto da ACF, isto é,

$$S(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\omega m}. \quad (2.29)$$

Se $\eta \neq 0$, a PSD é uma soma de duas partes, componentes periódicas espectrais discretas e uma componente contínua, sendo esta última a componente considerada nas figuras desta

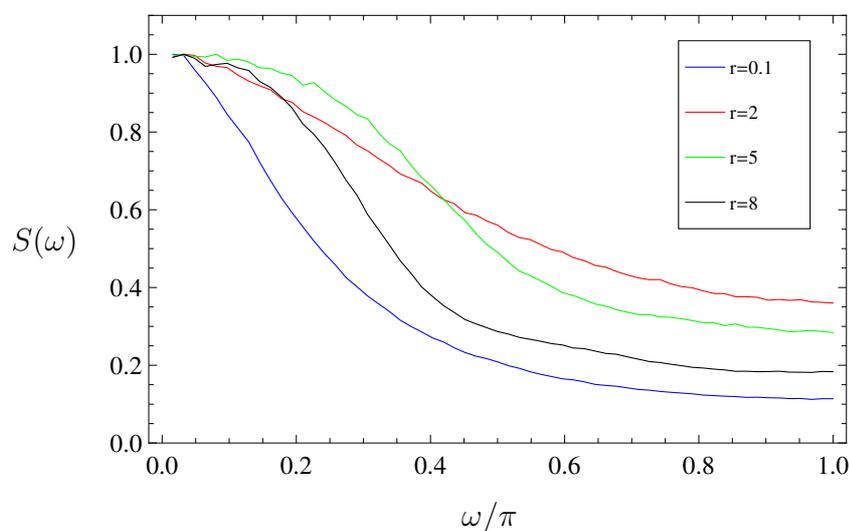
Figura 21 – PSD de sinais caóticos gerados pelo mapa e -tanh, para $r = 0,1; 2; 5; 8$.



Fonte: O autor, 2018.

seção. A Fig. 21 mostra a PSD de um conjunto gerado pelo mapa e -tanh para quatro valores diferentes do parâmetro r . As curvas estão normalizadas para um valor unitário igual a 1. Quando r se aproxima de zero, o sinal possui uma PSD uniforme e se comporta como um ruído branco, o que é esperado, já que o mapa e -tanh se aproxima do mapa da tenda. Quando r aumenta, a PSD varia de passa-alta ($r = 2$) para passa-faixa ($r = 5$ e $r = 8$). No caso do mapa o -tanh, a Fig. 22 mostra que o mapa gera sinais caóticos de comportamento passa-baixa e com o parâmetro r controlando a largura de banda. De uma forma geral, a PSD dos sinais caóticos gerados pelo mapa tanh não é de larga faixa espectral e a potência desses sinais é concentrada em faixas de frequência dependentes dos parâmetros do mapa. Na próxima seção, o mapa tanh é generalizado com a introdução de um novo parâmetro de controle. É feito um estudo das propriedades caóticas do mapa generalizado, que é denominado de mapa stanh (*skew-tanh*), assim como o efeito do novo parâmetro nas características espectrais dos sinais gerados pelo mapa.

Figura 22 – PSD de sinais caóticos gerados pelo mapa *o-tanh*, para $r = 0,1; 2; 5; 8$.



Fonte: O autor, 2018.

2.6 O MAPA STANH

Em mapas lineares por partes, a introdução de um parâmetro relacionado com o deslocamento do eixo central dos mapas pode modificar o espectro dos sinais gerados por estes mapas. Por exemplo, o mapa de tenda pode ser generalizado com um novo parâmetro de deslocamento e é denominado de mapa da tenda assimétrico (*skew tent map*), como pode ser visto em [59]. Com a adição deste parâmetro, os sinais gerados por este mapa variam de comportamento passa-baixa a passa-alta de acordo com a escolha do valor do parâmetro. Porém, esta característica está diretamente relacionada com o comportamento caótico do mapa. Para se conseguir sinais de espectro bastante concentrado nas regiões de alta ou baixa frequência, por exemplo, é necessário reduzir de forma intensa o valor do expoente de Lyapunov do mapa, que pode tender a zero para determinadas escolhas do valor do parâmetro associado ao deslocamento do eixo central do mapa, gerando então um compromisso entre controle espectral e comportamento caótico.

Esta mesma generalização pode ser aplicada ao mapa tanh, gerando o mapa denominado stanh. O mapa stanh, porém, não apresenta uma alteração na dinâmica tão forte quanto o mapa da tenda. Assim, é possível escolher valores do parâmetro de deslocamento que concentram o espectro dos sinais mas mantêm a evolução dinâmica natural, o que não ocorre no mapa da tenda. Portanto, o mapa stanh é um mapa caótico que não reduz de forma intensa o expoente de Lyapunov, sendo um mapa robusto em relação às propriedades caóticas.

2.6.1 O Mapa Stanh

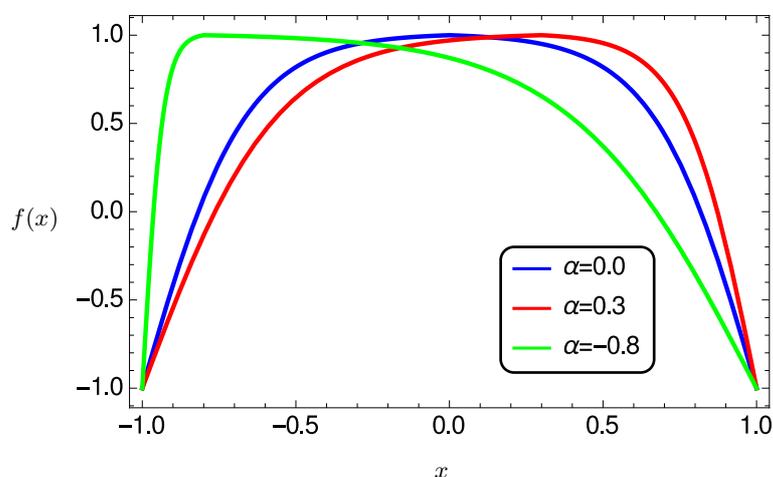
O mapa stanh $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é definido por

$$f(x) = \begin{cases} e \cdot \tanh \left[\frac{r}{1 + \alpha} \cdot (x + 1) \right] - 1, & x < \alpha \\ (-1)^b \cdot \left[e \cdot \tanh \left[-\frac{r}{1 - \alpha} \cdot (x - 1) \right] - 1 \right], & x \geq \alpha. \end{cases} \quad (2.30)$$

O fator de escala e é o mesmo definido anteriormente para o mapa tanh em (2.6) e os parâmetros de controle são especificados pela tripla (b, r, α) . O parâmetro b define a simetria do mapa stanh e pode assumir os valores 0 ou 1, assim como no mapa tanh. No caso em que $b = 0$, o mapa stanh possui simetria par e é denominado e-stanh e no caso de $b = 1$ a simetria é ímpar e o mapa é denominado o-stanh. O parâmetro r controla a largura da região de guarda do mapa stanh, também como no mapa tanh, e pode assumir valores reais maiores que zero. Considera-se que r está definido no intervalo $(0, 10]$. Para o mapa stanh a região de guarda é a região central do mapa que tem uma baixa taxa de visitação. Todas as propriedades estabelecidas acima são comuns ao mapa tanh.

O parâmetro α é o novo parâmetro de controle e está relacionado com o deslocamento do eixo central. Assim, ele é interpretado como um parâmetro de deslocamento, pois seu efeito é deslocar o eixo central do mapa stanh, localizado em $x = 0$. Quando tomamos valores positivos de α , o eixo central é deslocado para a direita, e quando assumimos valores

Figura 23 – Mapa e-stanh ($b = 0$) para três valores de α ($\alpha = 0; 0,3; -0,8$) com parâmetro $r = 3$.

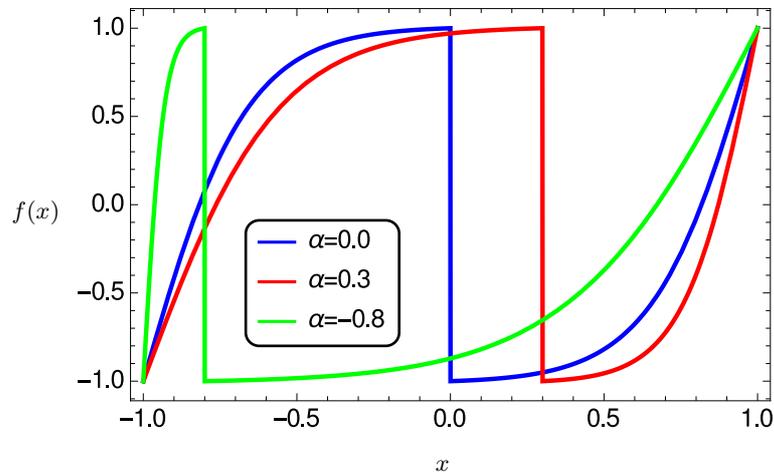


Fonte: O autor, 2018.

negativos, o eixo central se desloca para a esquerda. Quando $\alpha = 0$, o mapa e-stanh se transforma no mapa e-tanh e o mapa s-otanh se transforma no mapa o-tanh. Segue então que definindo $\alpha = 0$ e no limite em que r tende a zero, o mapa e-stanh tende ao mapa da tenda e o mapa o-stanh tende ao mapa de Bernoulli. Portanto, o mapa s-tanh pode assumir o comportamento de vários mapas diferentes com a escolha adequada dos parâmetros de controle. A propriedade de generalizar comportamentos diferentes no mesmo mapa o torna importante do ponto de vista de aplicações em comunicação caótica, pois pode-se conseguir vários comportamentos em um único mapa. A Fig. 23 ilustra o mapa e-stanh para um valor fixo de r , $r = 3$, e para três valores do parâmetro α . Uma figura similar para o mapa o-stanh é mostrada na Fig. 24. Observe que no caso de $\alpha = 0$, é obtida a mesma curva dos mapas e-tanh e o-tanh.

A modulação de sinais caóticos gerados pelo mapa stanh é feita por iteração reversa, em

Figura 24 – Mapa o-stanh ($b = 1$) para três valores de α ($\alpha = 0; 0,3; -0,8$) com parâmetro $r = 3$.



Fonte: O autor, 2018.

que o mapa stanh inverso é dado por

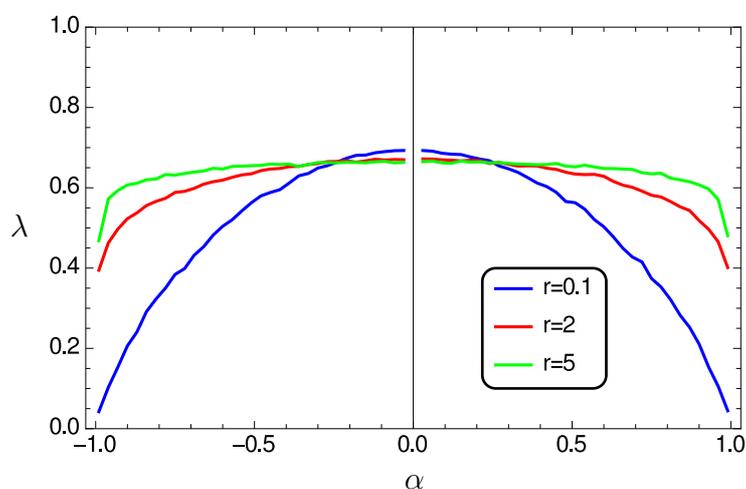
$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1 + \alpha}{r} \tanh^{-1} \left(\frac{x + 1}{e} \right) - 1, & s = 0 \quad (I_0) \\ -\frac{1 - \alpha}{r} \tanh^{-1} \left(\frac{x + 1}{be} \right) + 1, & s = 1 \quad (I_1). \end{cases} \quad (2.31)$$

A adequação desse mapa para aplicações em comunicação é estabelecida com relação às propriedades do sinal caótico. Para estudar estas propriedades, vamos investigar o expoente de Lyapunov do mapa, que será analisado a seguir.

2.6.2 Comportamento Caótico

O comportamento caótico do mapa stanh é um pouco mais complexo em relação ao mapa tanh devido à introdução do parâmetro α . Este parâmetro desloca o eixo central do mapa stanh para a esquerda ou direita e este deslocamento altera o expoente do Lyapunov do mapa. A Fig. 25 ilustra o comportamento do expoente de Lyapunov versus o parâmetro α para o mapa o-stanh ($b = 1$) para três valores do parâmetro r . Um comportamento semelhante foi observado para o mapa e-stanh ($b = 0$). Observa-se nesta figura que o expoente de Lyapunov é positivo para o intervalo de parâmetros considerado. Quando r assume valores próximos

Figura 25 – Expoente de Lyapunov λ versus α para o mapa o-stanh para $r = 0,1; 2; 5$.

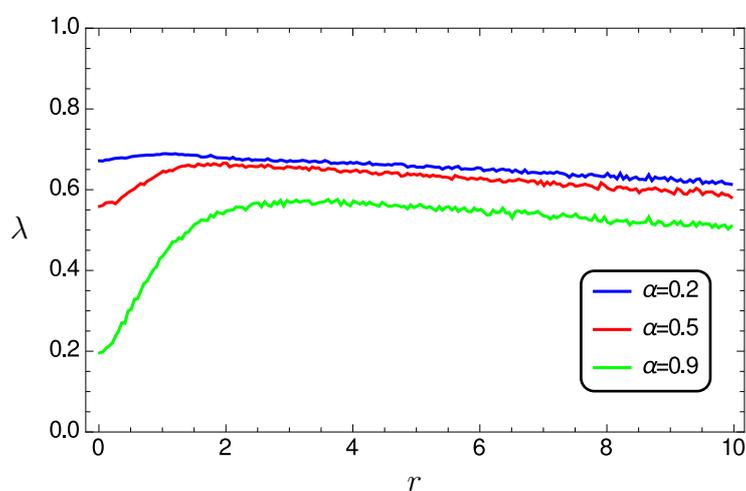


Fonte: O autor, 2018.

de zero, o expoente tende a zero nos extremos do intervalo de definição de α .

Ao aumentarmos o valor de r , o expoente tem uma variação uniforme, indicando uma maior robustez do comportamento caótico à variação do parâmetro α . A Fig. 26 mostra como o expoente varia em relação a r para três valores do parâmetro α . Para valores pequenos de r observa-se uma maior variação do expoente de Lyapunov com α . Esta variação diminui quando α é reduzido. Adicionalmente, para valores suficientemente elevados de r , independente do α , todas as curvas apresentam um decaimento linear com leve inclinação. Observa-se que esse estado é alcançado para valores cada vez menores de r quanto menor for o valor de α . Assim, o aumento do valor de r assegura um mapa com melhores propriedades caóticas, ou seja, um expoente de Lyapunov com pouca sensibilidade à variação dos outros parâmetros do mapa. Outra ferramenta importante para o entendimento das propriedades caóticas de mapas unidimensionais é o gráfico cobweb.

Figura 26 – Expoente de Lyapunov λ versus r para o mapa e-stanh para $\alpha = 0,2; 0,5; 0,9$.

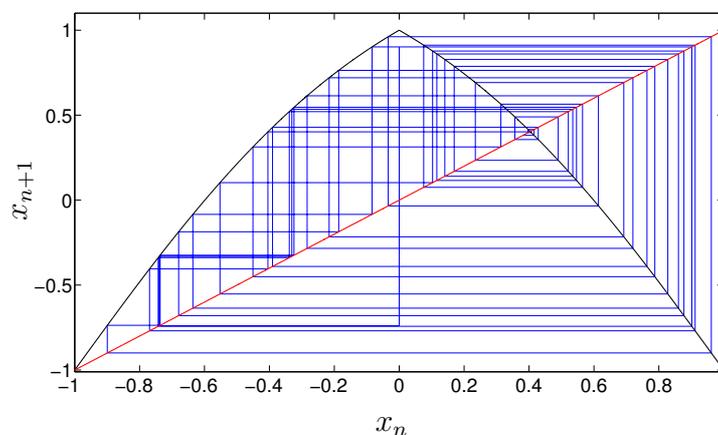


Fonte: O autor, 2018.

2.6.3 Gráficos de Cobweb

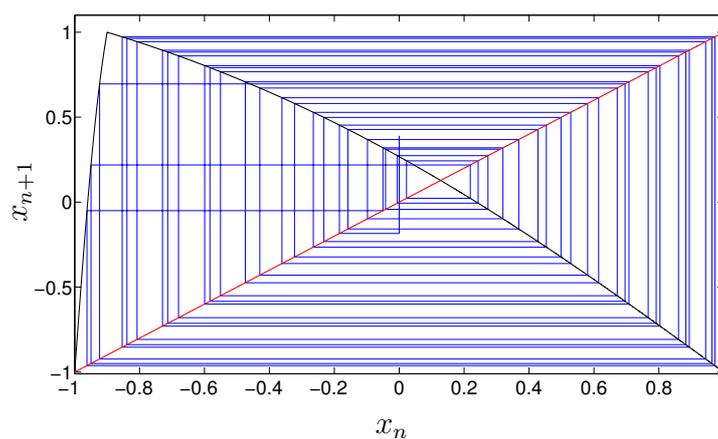
O gráfico de cobweb é uma ferramenta para estudar qualitativamente a dinâmica de um mapa unidimensional. O procedimento para gerar o gráfico de cobweb pode ser encontrado de forma detalhada em [1]. Começando de uma condição inicial específica x_0 , desenha-se uma linha vertical conectando os pontos $(x_0, 0)$ e (x_0, x_1) , em seguida, desenha-se uma linha horizontal até o ponto (x_1, x_1) , na diagonal e então conecta-se ao ponto (x_1, x_2) . Analogamente, toma-se o próximo ponto (x_2, x_2) e assim por diante. A Fig. 27 mostra o gráfico de cobweb do mapa e-stanh. Pode-se ver que uma entrada na vizinhança de 1 sempre mapeia na vizinhança de -1 , isto é, $x_{n+1} = -1 + \delta$, enquanto que uma entrada na vizinhança de -1 mapeia o próximo ponto da órbita em um ponto negativo maior que o anterior e segue lentamente a iteração até alcançar 1 novamente. A Fig. 28 mostra que quando α é negativo a área central é deslocada para a esquerda aumentando o valor da derivada da curva perto de -1 . Por outro lado, quando α é positivo a área central é deslocada para a direita, como pode ser visto na Fig. 29, desta forma diminuindo a derivada perto de $x = -1$. Da Fig. 28, pode-

Figura 27 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = 0$.



Fonte: O autor, 2018.

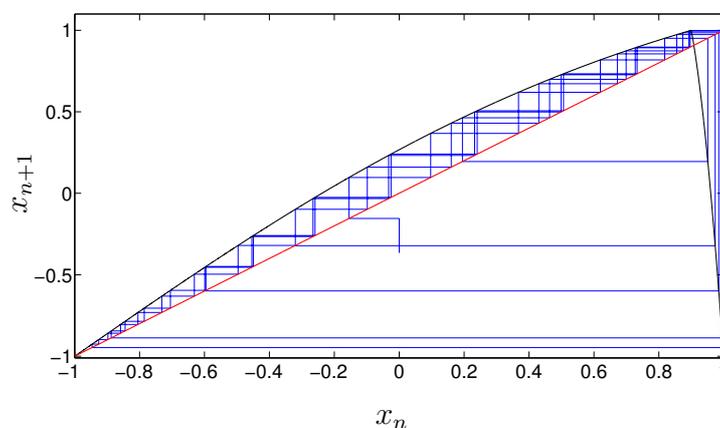
Figura 28 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = -0,9$.



Fonte: O autor, 2018.

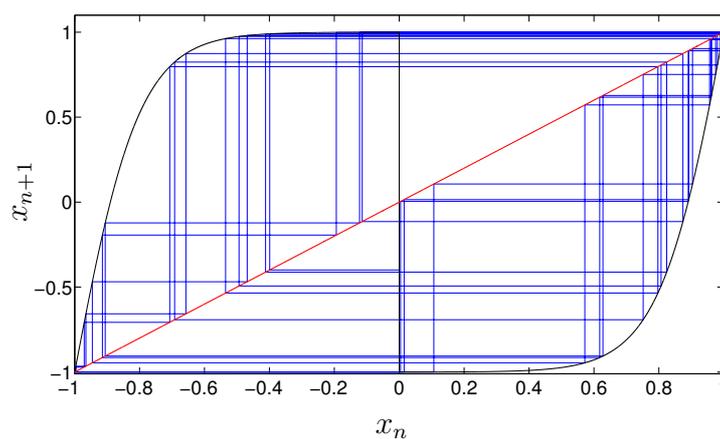
se concluir que um maior valor da derivada da curva próximo de -1 implica que o sistema evolui de -1 para 1 com poucas iterações, o que indica um comportamento de alta frequência. Além disso, como pode ser visto na Fig. 29, um menor valor da derivada próximo de -1 implica que o sistema evolui lentamente de -1 para 1 , indicando um comportamento de baixa frequência. Diferentemente do mapa e-stanh, no mapa o-stanh uma entrada perto de qualquer um dos valores extremos do intervalo é mapeada em um ponto perto da entrada an-

Figura 29 – Gráfico de cobweb do mapa e-stanh para $r = 1$ e $\alpha = 0,9$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 30 – Gráfico de cobweb do mapa o-stanh para $r = 5$ e $\alpha = 0$.



Fonte: O autor, 2018.

terior. Por exemplo, uma entrada perto de -1 é mapeada em uma saída também perto de -1 , então conclui-se que as transições sempre são lentas. Assim, espera-se um comportamento passa-baixa tal que a frequência de corte aumenta com o aumento do parâmetro r .

O gráfico de cobweb do mapa o-stanh para $r = 5$, $\alpha = 0$ é mostrado na Fig. 30. Além disso, ao mudar o valor de α espera-se que a derivada da curva aumente perto de uma das extremidades e diminua perto da outra. Por exemplo, um valor negativo de α aumenta a deri-

vada próximo de -1 e diminui próximo de 1 . Assim, como consequência da simetria ímpar, espera-se que mudanças no parâmetro α não afete significativamente o comportamento espectral do mapa.

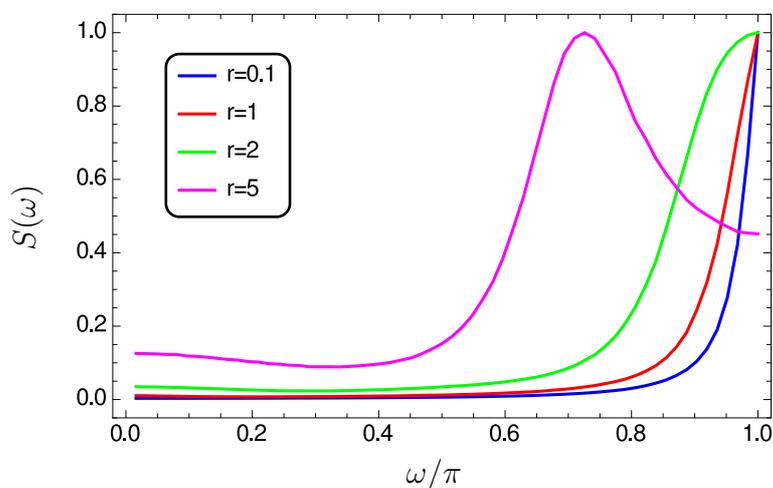
Como uma análise final das propriedades do mapa stanh, na próxima seção avalia-se o comportamento da PSD deste mapa com a variação dos seus parâmetros.

2.6.4 Comportamento Espectral

Nos mapas lineares por partes, é possível obter sinais caóticos de comportamento passa-baixa ou passa-faixa variando os parâmetros de controle do mapa [59, 60]. Para o mapa stanh podemos obter três tipos de comportamento: passa-baixa, passa-alta e passa-faixa.

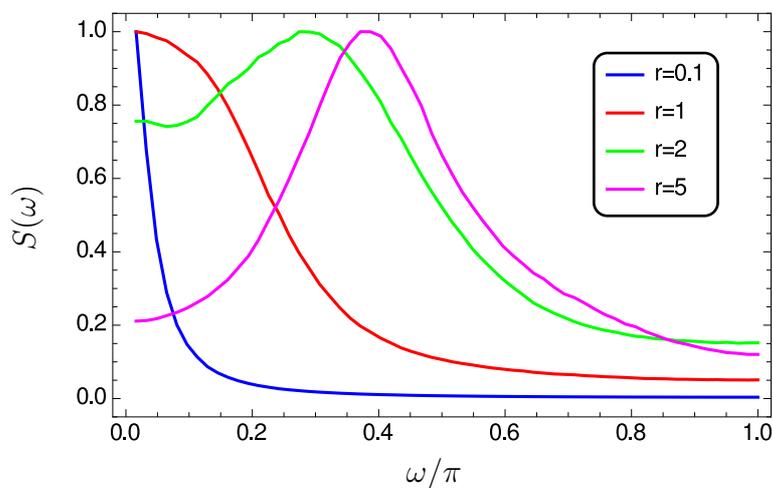
A Fig. 31 mostra o gráfico da PSD para alguns sinais caóticos gerados pelo mapa e-stanh para quatro valores de r e $\alpha = -0,9$. As curvas estão normalizadas para um valor máximo da PSD unitário. Quando r é pequeno, o sinal apresenta comportamento passa-alta sendo mais seletivo com valores menores de r . Aumentando o valor de r observa-se um aumento na faixa de passagem porém o expoente de Lyapunov também aumenta. Com isto, pode-se gerar sinais passa-alta com maior ocupação espectral e com maior robustez às propriedades caóticas. Finalmente, para valores de r maiores que 5 , a PSD assume um comportamento passa-faixa. Para valores positivos de α , o sinal gerado pelo mapa e-stanh tem comportamento passa-baixa quando r é pequeno e passa-faixa quando r é maior que 5 , conforme é ilustrado na Fig. 32. Em suma, os comportamentos passa-baixa e passa-alta com faixa estreita do mapa e-stanh estão relacionados a valores pequenos de r em conjunto com α positivo (passa-baixa) ou α negativo (passa-alta). Com o aumento de r o mapa e-stanh gera comportamentos passa-faixa e quanto maior o valor de r , menor a dependência dos sinais em relação ao parâmetro α .

Figura 31 – PSD do mapa *e-stanh* para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = -0,9$.



Fonte: O autor, 2018.

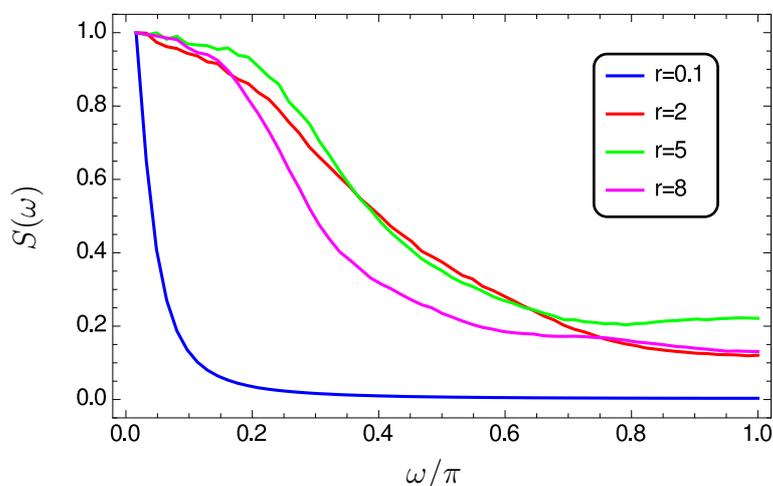
Figura 32 – PSD do mapa *e-stanh* para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = 0,9$.



Fonte: O autor, 2018.

O mapa *o-stanh* não possui a mesma variação espectral do mapa *e-stanh*. A Fig. 33 mostra que o comportamento da PSD para o mapa *o-stanh* é passa-baixa com maior seletividade para valores pequenos de r . Observou-se que este comportamento passa-baixa é invariante em relação ao sinal do parâmetro α .

Figura 33 – PSD do mapa *o-stanh* para $r = 0,1; 2; 5$ e $\alpha = 0,9$.



Fonte: O autor, 2018.

2.7 CONCLUSÕES

A partir da variação dos parâmetros de controle do mapa *stanh* é possível obter sinais caóticos com várias características espectrais. O conjunto de parâmetros (b, r, α) pode ser definido para gerar sinais caóticos com comportamentos espectrais passa-baixa, passa-alta ou passa-faixa. Além disso, no limite em que r tende a zero, obtemos os mapas da tenda ou o mapa de Bernoulli modificado, de acordo com a paridade definida pelo parâmetro b . Como o mapa *stanh* generaliza o mapa *tanh*, ele herda todas as propriedades inerentes ao mapa *tanh*.

Os mapas caóticos unidimensionais são uma classe importante de sistemas caóticos e possuem várias aplicações em sistemas de comunicação baseados em caos. Também são utilizados sistemas dinâmicos caóticos tridimensionais, definidos por equações diferenciais não lineares. Estes sistemas possuem estrutura mais complexa que a dos mapas unidimensionais e a geometria gerada pelas soluções das equações pode ser bastante complicada, de forma que a análise do seu comportamento é mais adequada pelo estudo das propriedades

relacionadas à topologia do sistema. No próximo capítulo, é proposta uma metodologia para a utilização de sistemas caóticos tridimensionais no projeto de sistemas de comunicação, e como pode-se empregar as formas de onda caóticas geradas por estes sistemas para modular símbolos de informação.

3 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL BASEADOS EM ATRADORES CAÓTICOS TRIDIMENSIONAIS

Neste capítulo é apresentada uma metodologia para a construção de sistemas de comunicação baseados em atratores caóticos tridimensionais. Para a introdução da metodologia, são detalhados dois estudos de caso, os atratores de Rössler e Lorenz. Esta metodologia deriva da associação entre o fluxo caótico gerado pelas equações do sistema e um diagrama de estados, construído a partir de um particionamento de uma seção de Poincaré do atrator. Os ramos do diagrama são rotulados com símbolos de informação e as transições entre os seus estados representam segmentos de trajetórias caóticas no atrator que conectam as regiões definidas pelo particionamento. Os sinais caóticos são transmitidos em um canal com ruído aditivo Gaussiano branco e o desempenho do sistema é avaliado em termos da probabilidade de erro de bit.

3.1 Descrição Topológica de Atratores Caóticos

Sistemas dinâmicos com evolução contínua no tempo são descritos por conjuntos de equações diferenciais ordinárias ou parciais de primeira ordem acopladas [1, 2, 8]. No caso de equações diferenciais não lineares, o sistema pode exibir caos desde que a dimensão do espaço seja maior ou igual a três. O ambiente natural para se estudar um sistema dinâmico é o espaço Euclidiano definido pelas variáveis do sistema, denominado espaço de fase, que descreve a evolução temporal dos estados do sistema. As trajetórias estabelecidas pelas soluções das equações de sistemas dinâmicos caóticos possuem estrutura complexa, podendo gerar conjuntos denominados atratores estranhos (ou atratores caóticos), que são conjuntos atratores que podem possuir dimensão fractal [1, 8]. Apesar da geometria complexa, de

estrutura fractal, a organização topológica das trajetórias em geral é simples e deriva de dois mecanismos básicos que geram o comportamento caótico: o mecanismo de expansão, associado à sensibilidade às condições iniciais e o mecanismo de contração, associado ao comportamento recorrente e não periódico [38]. Qualquer segmento de curva, definido por trajetórias caóticas no atrator, obedece a estes vínculos dinâmicos, que definem a topologia do atrator, da qual se deriva o comportamento das trajetórias na sua evolução dinâmica.

O comportamento de um sistema dinâmico pode ser parcialmente descrito pelo estudo de sua estabilidade. Uma forma compacta de descrevê-la é através do espectro de expoentes de Lyapunov. O espectro caracteriza localmente as direções de contração e expansão no espaço de fase. Para que ocorra caos, que é caracterizado pela sensibilidade às condições iniciais e por uma evolução recorrente e não periódica no espaço de fase, pelo menos um dos expoentes deve ser positivo. No caso de atratores estranhos imersos em espaços de dimensão três, suas características estruturais são rigidamente definidas pelos mecanismos de contração e expansão responsáveis pela dinâmica caótica [61]. Assim, essas características são preponderantes para especificar as propriedades dinâmicas do sistema caótico. Portanto, a dinâmica de um sistema é regida pelas suas propriedades topológicas [38], que permitem inferir sobre o comportamento das órbitas possíveis, em decorrência das restrições impostas pelo fluxo.

3.1.1 Seção de Poincaré e Dinâmica Simbólica de Trajetórias

A evolução dinâmica de um atrator caótico N -dimensional pode ser descrita por sucessivos cruzamentos das curvas solução do sistema, as trajetórias caóticas, com uma superfície $(N - 1)$ -dimensional, denominada seção de Poincaré [2]. No caso de atratores tridimensionais, uma seção de Poincaré é uma superfície bidimensional tal que o fluxo caótico a

atravessa a cada revolução em torno da superfície. A análise dos sucessivos cruzamentos do fluxo caótico na seção de Poincaré associa o sistema dinâmico contínuo no tempo a um sistema discreto, reduzindo a dimensão do sistema de N para $(N - 1)$. Além disso, permite a definição de particionamentos aos quais se pode definir uma dinâmica simbólica [62], possibilitando a codificação das órbitas, que são trajetórias associadas a uma determinada condição inicial. A dinâmica simbólica das órbitas é utilizada para classificá-las e pode ser relacionada com processos de transmissão de sequências de símbolos de informação.

A topologia de um atrator estranho é identificada através da organização topológica das suas órbitas periódicas instáveis. Estas são trajetórias imersas no atrator com a propriedade de retornar arbitrariamente próximas do seu ponto inicial após um determinado intervalo de tempo, denominado período da órbita. As órbitas periódicas instáveis formam um conjunto denso sobre o atrator, de forma que qualquer órbita do atrator pode ser aproximada por estas. A identificação de órbitas periódicas instáveis sobre um atrator caótico N -dimensional pode ser reduzida ao estudo da intersecção do seu fluxo com a sua seção de Poincaré. Assim, a dinâmica pode ser avaliada pelos sucessivos cruzamentos na seção de Poincaré, o que simplifica a descrição da dinâmica, enquanto mantém as características essenciais do fluxo.

A identificação e análise das órbitas periódicas instáveis, e conseqüentemente a análise do próprio fluxo, podem ser simplificadas pela codificação das trajetórias através de um particionamento adequado da seção de Poincaré, o qual é definido como uma coleção de subconjuntos disjuntos tal que a união destes subconjuntos forma uma cobertura da seção. Rotulando cada subconjunto da partição por um símbolo distinto de um alfabeto pré-definido, as trajetórias no espaço de fase são representadas por sequências de símbolos associados aos sucessivos subconjuntos visitados da seção de Poincaré na evolução dinâmica da trajetória. Um particionamento binário é feito em [38] pela divisão da seção de Poincaré em duas re-

giões. O ponto de cisão deste particionamento é estabelecido pelo valor mínimo do mapa de Poincaré, que é construído com as sucessivas intersecções do fluxo com a seção de Poincaré [63]. As sequências obtidas são representadas por sua dinâmica simbólica, que pode ser entendida como uma descrição simbólica do mecanismo de evolução do sistema dinâmico.

Neste capítulo mostramos como atratores caóticos tridimensionais podem ser empregados para projetar sistemas de comunicação. O particionamento e rotulação da seção de Poincaré definem a dinâmica simbólica associada à evolução dinâmica do sistema. As sequências simbólicas geradas pelas trajetórias caóticas possuem restrições derivadas das restrições dinâmicas do fluxo caótico advindas das características topológicas do atrator. A dinâmica do sistema é modelada por um diagrama de estados, em que os ramos são rotulados com símbolos de informação e as transições entre estados representam segmentos de trajetórias caóticas que conectam as regiões da seção de Poincaré associadas aos estados do diagrama. O mecanismo de modulação faz uso de controle de caos para indução das transições no atrator, de acordo com o diagrama de estados, e o processo de demodulação estima a sequência transmitida utilizando o algoritmo de Viterbi.

3.2 CONTROLE DE CAOS

O conceito de controle de caos foi proposto na década de 90 [5] por Ott, Grebogi e Yorke e consiste na aplicação de pequenas perturbações em uma trajetória caótica para modificar sua evolução dinâmica. A intervenção controlada nas trajetórias caóticas utiliza a principal característica dos sistemas dinâmicos caóticos, que é a sensibilidade às condições iniciais, para controlar a evolução dinâmica do sistema. Geralmente, o controle de caos se aplica em dois casos: estabilização de órbitas periódicas instáveis [64] e direcionamento de trajetórias para sub-regiões específicas na seção de Poincaré [65]. O controle de caos se baseia na

propriedade dos sistemas caóticos de possuírem um grande número de órbitas periódicas instáveis embebidas no atrator [38]. Desta forma, o controle visa aproximar uma dada trajetória caótica a alguma dessas órbitas, pré-definida segundo o comportamento que o sistema deve apresentar, de acordo com os requerimentos do mesmo. Fazendo pequenas perturbações para que a trajetória controlada transite entre as diversas órbitas periódicas instáveis existentes, é possível induzir o fluxo caótico a evoluir controladamente.

A estabilização de órbitas periódicas instáveis é utilizada quando se pretende empregar o sistema caótico em aplicações que necessitam de um sistema periódico. A vantagem deste método é a versatilidade de regimes periódicos existentes em atratores caóticos, associados às diversas órbitas periódicas instáveis. Outra vantagem é o baixo requerimento energético necessário para manter a órbita estabilizada. No procedimento de estabilização, a aplicação pontual de pequenas perturbações é suficiente para corrigir o desvio da trajetória caótica em relação à órbita, e induzir a evolução periódica do sistema. Além disso, a mudança entre diferentes regimes periódicos é simples, sendo realizada pela aproximação da trajetória caótica de outras órbitas periódicas instáveis, associadas a outros períodos.

O direcionamento de trajetórias é empregado em duas situações. No caso de estabilização de órbitas, a trajetória caótica pode levar muito tempo para se aproximar da órbita periódica instável que se deseja estabilizar. Neste caso, aplica-se o direcionamento para que a trajetória caótica se aproxime da órbita de forma mais rápida do que ocorre na evolução dinâmica natural do sistema. Outra situação é na definição de um particionamento da seção de Poincaré, ao qual se associa uma dinâmica simbólica. As sequências simbólicas geradas são definidas pela dinâmica natural do sistema. Entretanto, em comunicações pode ser requerida uma sequência que não corresponde àquelas geradas pela evolução natural. Desta forma, aplica-se pequenas perturbações na trajetória caótica para induzir cruzamentos nas

sub-regiões da seção de Poincaré associadas gerando as sequências desejadas.

O controle de caos é realizado pela introdução de um parâmetro de controle externo e acessível em uma ou mais equações do sistema [5, 6, 64]. Por exemplo, seja um sistema dinâmico caótico definido por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = h(x(t), y(t), z(t)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Para controlar este sistema, definimos os parâmetros de controle $\delta_x(t)$, $\delta_y(t)$, e $\delta_z(t)$, responsáveis pela perturbação em cada uma das variáveis, e os acoplamos às equações do sistema.

Desta forma,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), z(t)) + \delta_x(t) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), z(t)) + \delta_y(t) \\ \dot{z}(t) = h(x(t), y(t), z(t)) + \delta_z(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Neste trabalho, a intervenção ocorre apenas na variável $x(t)$ e, conseqüentemente, $\delta_y(t) = \delta_z(t) = 0$. Para a correta execução do controle de caos, a evolução dinâmica do sistema deve ser monitorada continuamente e o parâmetro de controle modificado de forma a induzir a trajetória caótica às sub-regiões desejadas na seção de Poincaré. Dois métodos principais são empregados neste caso, o método OGY [65], baseado na linearização do mapa de Poincaré, e o método de Pyragas [64], baseado em realimentação com atraso.

3.3 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NO ATRATOR DE RÖSSLER

Nesta seção, detalha-se a metodologia proposta para o caso do atrator caótico de Rössler.

3.3.1 O Atrator de Rössler

O sistema dinâmico de Rössler é definido pelo sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas [66]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + (x(t) - c)z(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

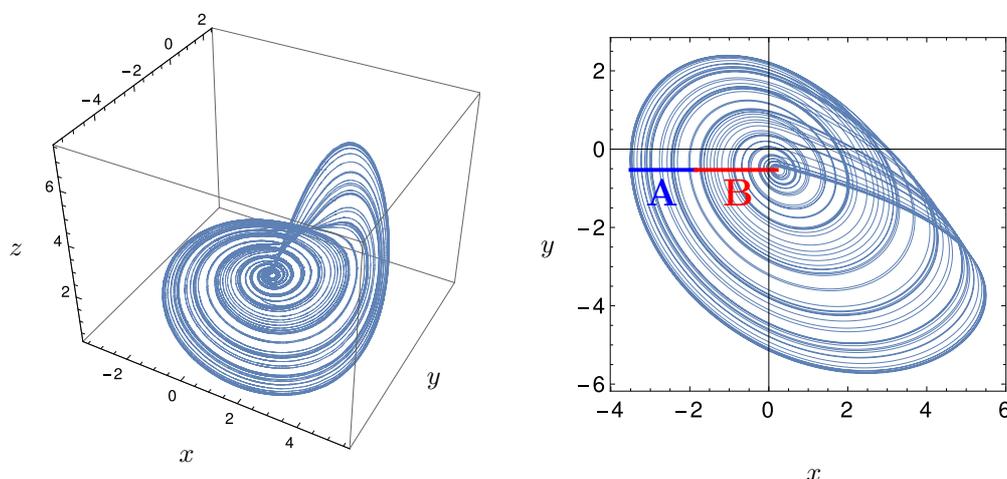
em que a , b e c são os parâmetros de controle do sistema. Existem vários conjuntos de valores para os quais o sistema de Rössler exibe comportamento caótico. Em particular, utilizamos os valores $a = 0,432$, $b = 2$ e $c = 4$ [67]. Cada ponto $(x(t), y(t), z(t))$ do atrator, para um valor específico de t , indica um estado do sistema, obtido pela solução de (3.3). As trajetórias caóticas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são representadas simultaneamente no espaço de fase, definindo a geometria do atrator.

3.3.2 Particionamento da Seção de Poincaré e Diagrama de Estados

Inicialmente definimos o alfabeto $\mathcal{A}_n = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$, de cardinalidade n , e uma seção de Poincaré conveniente ao atrator de Rössler. Esta é dada por uma superfície bidimensional perpendicular ao seu fluxo. Em particular, vamos tomar um plano paralelo ao plano xz , localizado em $y = -0,53$, que é a coordenada y do centro do atrator. Particionando a seção de Poincaré em conjuntos disjuntos, denotamos cada uma das regiões da seção obtidas pelo particionamento por um símbolo distinto $s \in \mathcal{A}_n$. Desta forma, a evolução dinâmica do fluxo caótico define sucessivos cruzamentos na seção de Poincaré, gerando sequências simbólicas $s_0s_1s_2 \dots, s_i \in \mathcal{A}_n$, que equivalem à dinâmica simbólica das trajetórias caóticas.

No caso do particionamento binário, define-se duas regiões sobre o alfabeto $\mathcal{A}_2 = \{A, B\}$, em que o limiar entre as regiões é definido a partir do mapa de Poincaré [6, 63], que é construído pelos sucessivos cruzamentos do fluxo caótico com a seção de Poincaré [8]. O atrator

Figura 34 – Atrator de Rössler com parâmetros de controle $a = 0,432$, $b = 2$ e $c = 4$ (esquerda) e sua projeção no plano xy com a seção de Poincaré com particionamento binário (direita).

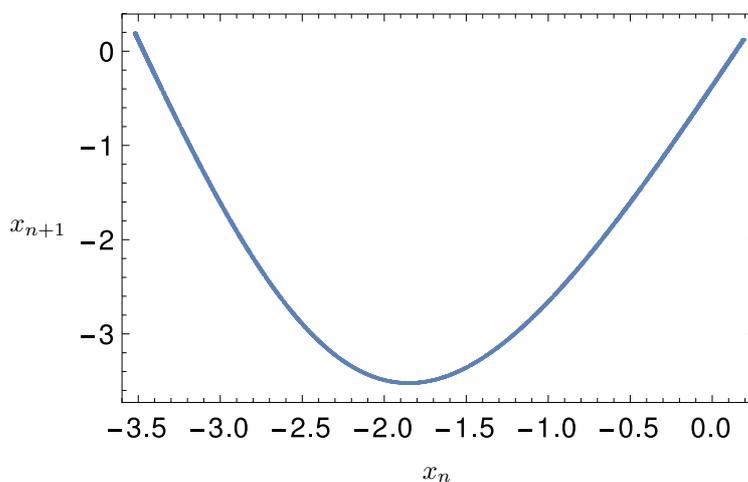


Fonte: O autor, 2018.

caótico típico associado ao sistema de Rössler é ilustrado na Fig. 34, para o conjunto de valores considerado, no espaço Euclidiano tridimensional e em projeção no plano xy . Também é mostrada a seção de Poincaré com um particionamento binário. Tomando o valor mínimo do mapa de Poincaré, obtemos o valor do limiar, que é dado por $x_{th} \approx -1,85$, conforme ilustrado na Fig. 35.

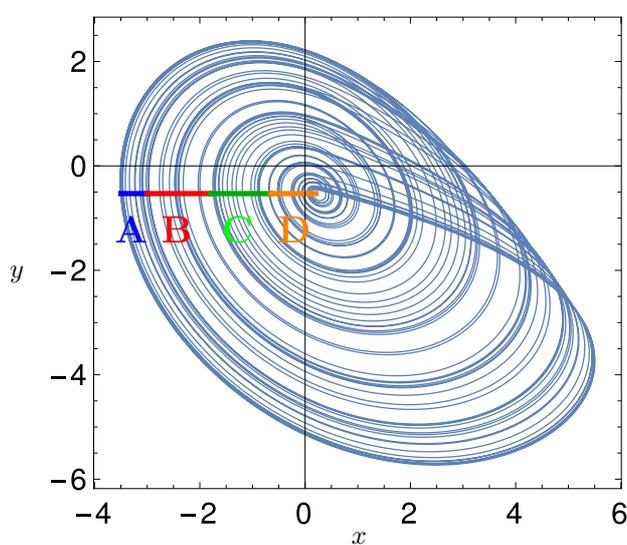
No caso do particionamento quaternário, particionamos cada região do caso binário em duas novas regiões, que representam dois comportamentos distintos, o retorno à mesma região e a transição para a outra, em dois cruzamentos sucessivos na seção de Poincaré. Para representar as regiões quaternárias, vamos definir o alfabeto $\mathcal{A}_4 = \{A, B, C, D\}$. Neste caso, a região binária A gera as regiões quaternárias A e B e a região binária B gera as regiões quaternárias C e D, conforme ilustra a Fig. 36, em que o limiar é definido pelo ponto no qual ocorre esta mudança entre os dois comportamentos possíveis. De forma similar, partindo do particionamento quaternário obtemos o particionamento em oito regiões. Para isto, cada região do particionamento quaternário é dividida em duas, de forma análoga ao

Figura 35 – Mapa de Poincaré para o atrator de Rössler.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 36 – Seção de Poincaré para o atrator de Rössler com particionamento em quatro regiões em projeção no plano xy .



Fonte: O autor, 2018.

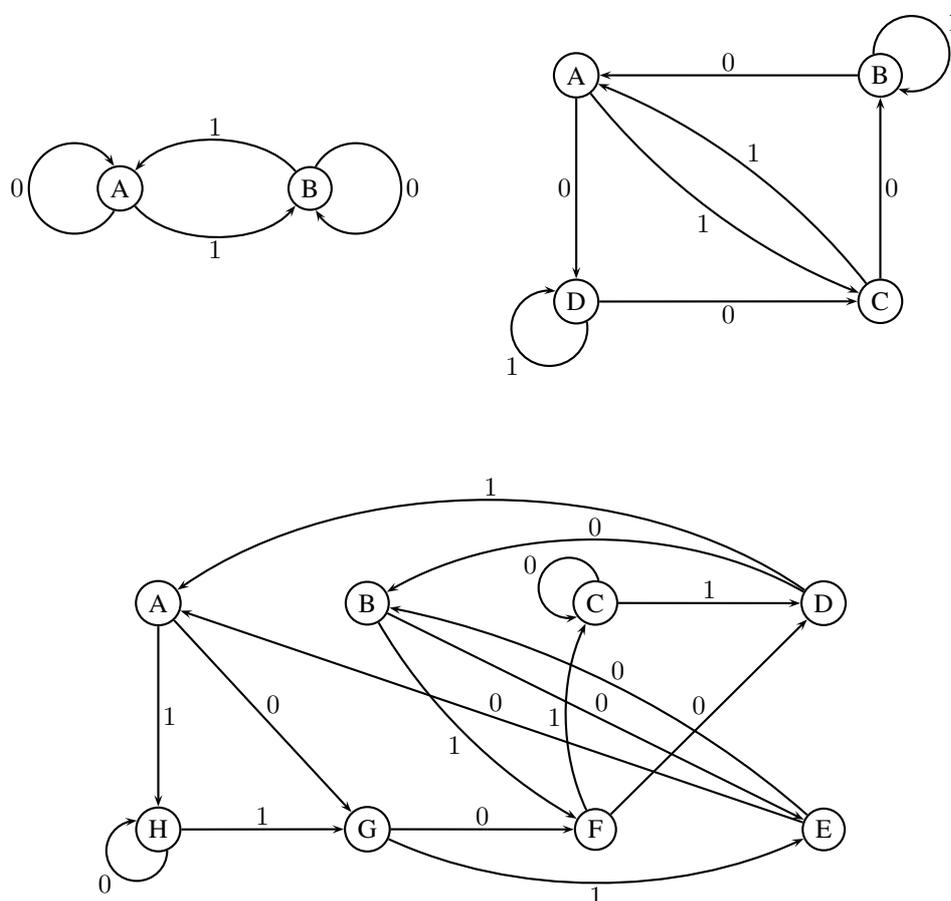
caso quaternário, originando oito regiões, as quais denominamos de acordo com o alfabeto $\mathcal{A}_8 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

O número de sequências simbólicas de comprimento dois associadas a um alfabeto \mathcal{A}_n , as quais denominamos *transições*, é dado por n^2 . Entretanto, devido aos vínculos dinâmicos

resultantes da estrutura topológica do atrator, o número de transições possíveis na evolução dinâmica do sistema é dado por $2n$. Logo, o número de transições possíveis se iguala ao total de sequências simbólicas de comprimento dois, associadas a um alfabeto de tamanho n , quando $n^2 = 2n$, ou seja, $n = 2$. Desta forma, no caso binário existe um total de $2 \times 2 = 2^2 = 4$ transições entre regiões, identificadas pelas sequências simbólicas de transição AA, AB, BA e BB, que são todas as sequências de comprimento dois que podem ser geradas utilizando o alfabeto \mathcal{A}_2 . Quando $n > 2$, não ocorrem todas as transições associadas ao alfabeto. Por exemplo, no caso quaternário, existe um total de $2^4 = 16$ sequências simbólicas de comprimento dois associadas ao alfabeto \mathcal{A}_4 , das quais ocorrem apenas oito na evolução do sistema de Rössler: AC, AD, BA, BB, CA, CB, DC e DD. Analogamente, o particionamento em oito regiões possibilita um total de 64 sequências simbólicas associadas ao alfabeto \mathcal{A}_8 , das quais apenas dezesseis ocorrem no caso do atrator de Rössler.

A estrutura dinâmica do fluxo caótico pode ser representada em um diagrama de estados, no qual cada estado é associado a uma região da seção de Poincaré e as transições entre estados são definidas por cruzamentos sucessivos do fluxo caótico com a seção de Poincaré, de acordo com as restrições dinâmicas derivadas dos vínculos topológicos do atrator. As transições deste diagrama são associadas a símbolos de informação. Para isto, definimos uma rotulação no diagrama, que associa a cada transição que diverge de um estado um símbolo de informação distinto. A Fig. 37 mostra os diagramas de estados para o particionamento em duas, quatro e oito regiões. Também são ilustradas as suas rotulações, utilizadas para a transmissão de sequências binárias. A transmissão de sequências de informação requer um mapeamento entre os símbolos de informação e as formas de onda caóticas associadas às transições entre estados. Na sequência, definimos as formas de onda caóticas do sistema.

Figura 37 – Diagramas de estados do atrator de Rössler para os particionamentos em duas, quatro e oito regiões. As rotulações dos diagramas também são mostradas.



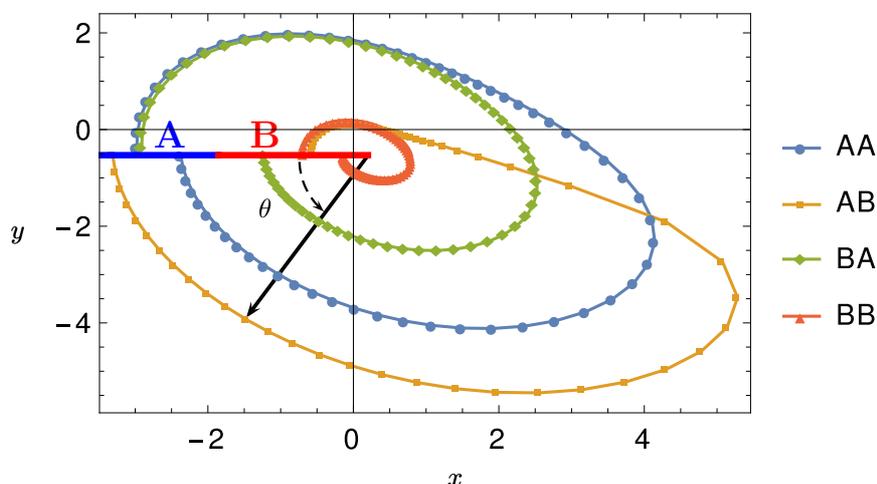
Fonte: O autor, 2018.

3.3.3 Curvas de Transição e Formas de Onda Caóticas

Uma transição no diagrama de estados representa o segmento de trajetória caótica que conecta as duas regiões visitadas em dois cruzamentos sucessivos na seção de Poincaré. Devido ao comportamento caótico, as curvas de transição são sempre diferentes entre si, sendo maior esta diferença quando as regiões da seção de Poincaré têm maior extensão, como ocorre no particionamento binário, por exemplo.

O intervalo de tempo entre dois cruzamentos sucessivos na seção de Poincaré não é cons-

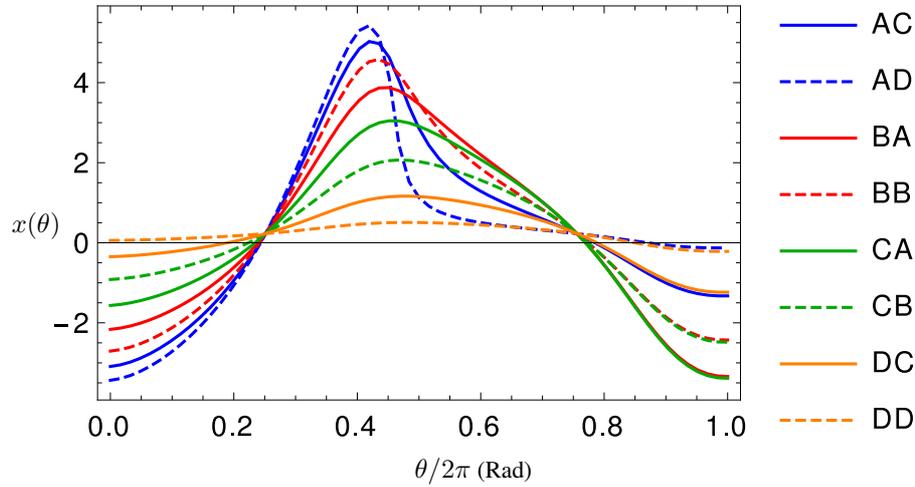
Figura 38 – Curvas de transição do atrator de Rössler com particionamento em duas regiões, em projeção no eixo xy .



Fonte: O autor, 2018.

tante em atratores caóticos, devido à aperiodicidade do comportamento caótico. Idealmente, um sistema de comunicação deve ter tempo de sinalização constante, necessário para a sincronização de relógio do demodulador. Para solucionar este problema, definimos a variável angular θ , que representa o ângulo formado entre o vetor definido pela seção de Poincaré e o vetor obtido conectando o centro do atrator com um ponto da trajetória caótica, em projeção no plano xy . Desta forma, as curvas do atrator passam a ser discretizadas pela variável angular θ , com uma taxa de amostragem angular constante, e cada curva de transição é representada por um número fixo de amostras angulares. A Fig 38 mostra uma realização das curvas de transição (identificadas pelas sequências s_1s_2 , em que $s_1, s_2 \in \mathcal{A}_2$) para o atrator de Rössler com particionamento binário. Também é mostrado o ângulo θ e os pontos sobre as curvas obtidos pela amostragem angular uniforme com o ângulo θ . Este procedimento garante periodicidade ao sistema em relação à variável angular θ , com período 2π , ou seja, $|\Delta\theta| = 2\pi$, em que $\Delta\theta$ é a variação angular durante a transição, para qualquer transição. As formas de onda caóticas associadas às transições entre estados são os segmentos de traje-

Figura 39 – Formas de onda caóticas $x(\theta)$ versus θ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Rössler com particionamento quaternário.



Fonte: O autor, 2018.

tórias caóticas associados aos sinais gerados pelas variáveis do sistema durante a transição. Pode-se utilizar o sinal gerado por qualquer variável, isto é, x , y e z , assim como combinações entre estas variáveis. A Fig. 39 ilustra as formas de onda dadas pela variável x associadas a uma realização das curvas de transição com particionamento quaternário.

A distância d entre duas curvas de transição c_1 e c_2 , em relação à variável x é dada por [68]

$$d^2(c_1, c_2) = \int_{t_0}^{t_f} (x_1(t) - x_2(t))^2 dt, \quad (3.4)$$

que é o erro quadrático médio entre as duas curvas de transição. A energia de uma curva de transição é definida por

$$E = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t) dt. \quad (3.5)$$

A energia média \overline{E} das curvas de transição é dada pelo valor esperado \mathbf{E} da energia considerando todas as transições possíveis

$$\overline{E} = \mathbf{E}[E], \quad (3.6)$$

A distância normalizada \bar{d} é definida por

$$\bar{d} = \frac{d}{E}. \quad (3.7)$$

No caso da variável angular θ , com a representação discreta das curvas, a distância é dada por

$$d^2(c_1, c_2) = \sum_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (x_1(\theta) - x_2(\theta))^2 \quad (3.8)$$

e a energia de uma curva de transição é dada por

$$E = \sum_{\theta=0}^{\theta=2\pi} x^2(\theta). \quad (3.9)$$

No caso de um sistema com n estados, as $2n$ curvas de transição geram um conjunto de distâncias relativas. Seja $\bar{d}_{\min} = \text{Min}(\bar{d}(c_i, c_j))$, $0 \leq i, j \leq 2n$. É conveniente escolher sinais associados às variáveis que possibilitem um maior valor de \bar{d}_{\min} , de acordo com o erro quadrático médio como métrica de comparação. Neste caso, a variável x apresenta maior \bar{d}_{\min} . Além disso, podem ser implementados procedimentos para aumentar \bar{d}_{\min} , conforme será apresentado na seção a seguir.

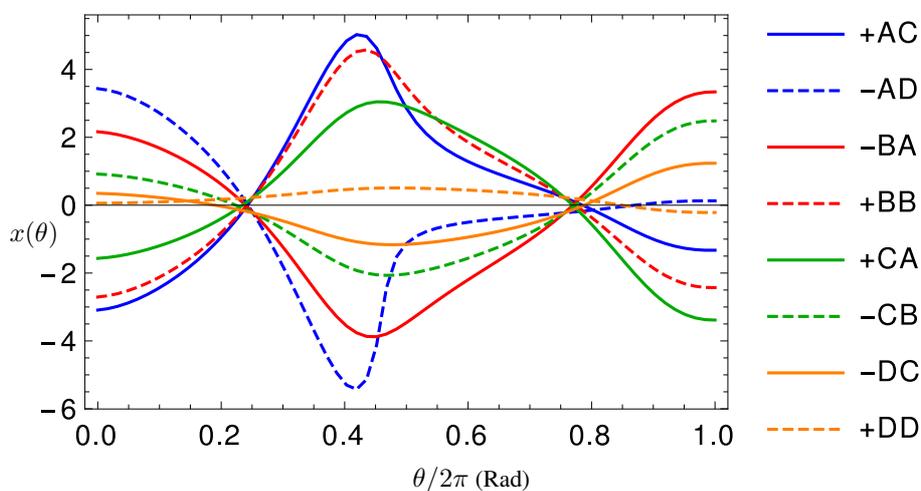
3.3.4 Modificações nas Formas de Onda Caóticas

Na sequência, algumas modificações nas formas de onda necessárias para a construção do sistema de comunicação são apresentadas.

Inversão de Transições

A Fig. 39 indica que curvas que rotulam ramos que divergem de um mesmo estado (associadas a ramos com bits de informação distintos) são relativamente próximas, implicando em uma estrutura vulnerável a erros introduzidos pelo canal. Uma modificação proposta consiste em inverter as curvas (multiplicação por -1) associadas ao bit 0. A inversão divide o conjuntos de curvas de transição em dois grupos, um associado ao bit 1 e outro associado

Figura 40 – Formas de onda caóticas $x(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Rössler com particionamento quaternário com inversão das transições associadas ao bit 0.



Fonte: O autor, 2018.

ao bit 0. Ocorre portanto um aumento na distância entre as curvas associadas a transições que divergem de cada estado, tal que os dois grupos se tornam aproximadamente antipodais, enquanto se mantém inalterada a energia média do sistema. A implementação desta inversão nas curvas de transição da Fig. 39 é mostrada na Fig. 40.

Amplificação de Transições

A segunda modificação advém do fato das curvas de transição do estado D (DC e DD) no particionamento quaternário possuírem baixa energia, quando comparadas com as curvas dos outros estados. Mesmo com o procedimento de inversão, as transições que partem deste estado continuam relativamente próximas entre si. Para aumentar a distância entre estas curvas de transição, utiliza-se um ganho no sistema sempre que este se encontra no estado D . O ganho aplicado neste estado aumenta a energia média do sistema. Isto implica na existência de um valor ótimo para o ganho, o qual foi obtido experimentalmente, e tem um valor de aproximadamente $a = 3,5$. No caso do particionamento em oito regiões, o

ganho é aplicado nas transições derivadas do estado D do particionamento quaternário, isto é, GE , GF , HG e HH , associadas aos estados G e H . O sistema binário não utiliza esta modificação.

Formas de Onda Alternativas

Uma terceira modificação é considerar formas de onda alternativas, ou seja, utilizar combinações entre as variáveis do sistema dinâmico. As várias possibilidades garantem uma relação entre a separação entre as curvas e a energia média do sistema. Vamos considerar a variável ρ definida por

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.10)$$

Desta forma, vamos considerar as variáveis x e ρ na construção do sistema de comunicação. As modificações anteriores (inversão e amplificação) são aplicadas nos dois casos.

3.3.5 O Sistema de Comunicação

A análise de cada etapa do sistema de comunicação é feita a seguir, na descrição de cada bloco que compõe o diagrama de blocos do sistema, ilustrado na Fig. 41.

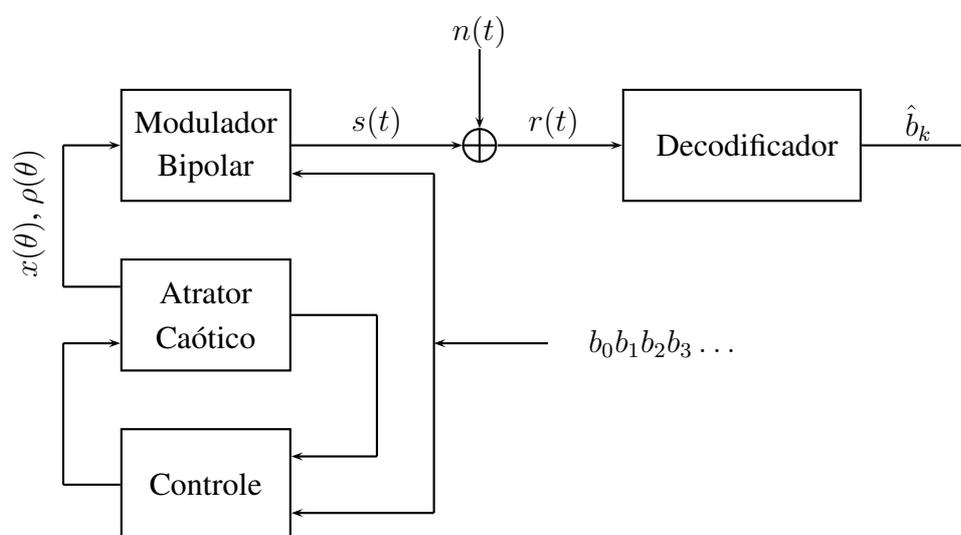
Fonte do Sinal Caótico

O atrator de Rössler é a fonte de sinal do sistema. Utilizamos o sinal gerado pelas variáveis x e ρ neste sistema.

Controle de Caos

O bloco de controle é acoplado à fonte do sinal caótico e recebe a sequência binária de informação a ser transmitida. Este bloco induz as transições, direcionando as trajetórias caóticas para as respectivas sub-regiões dentro das regiões que induzem a transição desejada [65]. Por exemplo, considerando o sistema binário da Fig. 37, se a trajetória incide na

Figura 41 – Diagrama de blocos do sistema de comunicação baseado em atratores caóticos tridimensionais.



Fonte: O autor, 2018.

região A e o bit de informação é o bit 1, o sistema deve direcionar a trajetória para a sub-região dentro da região A que realiza a transição AB , associada ao bit 1. Quando a trajetória já incide na sub-região associada à transição desejada, nenhum controle precisa ser aplicado.

Modulador Bipolar

O bloco de modulação bipolar transmite as amostras angulares geradas pelo sinal caótico x ou ρ , com $0 < \theta < 2\pi$, em cada intervalo de sinalização. O sinal transmitido neste intervalo é denotado por $s(t)$, isto é, a cada intervalo de sinalização o sistema transmite o conjunto de amostras angulares obtidas pela transição no intervalo angular de 2π . Este bloco também recebe a sequência binária de informação, e tem a função de inverter os sinais caóticos associados ao bit 0 e amplificar as formas de onda associadas ao estado D . No caso do particionamento binário não se utiliza ganho.

Canal

O sinal $s(t)$ é transmitido em um canal AWGN. O ruído $n(t)$, com densidade espectral plana com amplitude $N_0/2$, é somado ao sinal $s(t)$, gerando o sinal recebido

$$r(t) = s(t) + n(t). \quad (3.11)$$

Decodificador

As formas de onda utilizadas no decodificador são denominadas *curvas médias de transição*, e são dadas pelas curvas representativas de cada uma das transições possíveis. Para se construir as curvas médias, são geradas várias curvas de transição a partir um mesmo estado e em seguida calcula-se a média entre elas. Desta forma, obtemos uma curva característica da transição, e as formas de onda transmitidas são pequenas variações destas curvas médias. No processo de demodulação, o decodificador recebe o sinal ruidoso $r(t)$ e estima a sequência binária transmitida utilizando o algoritmo de Viterbi [69], com incremento de métrica dado pela distância Euclidiana entre os sinais recebidos e as curvas médias de transição. Na sequência, é feita a análise de desempenho dos sistemas de comunicação baseados na topologia do atrator de Rössler.

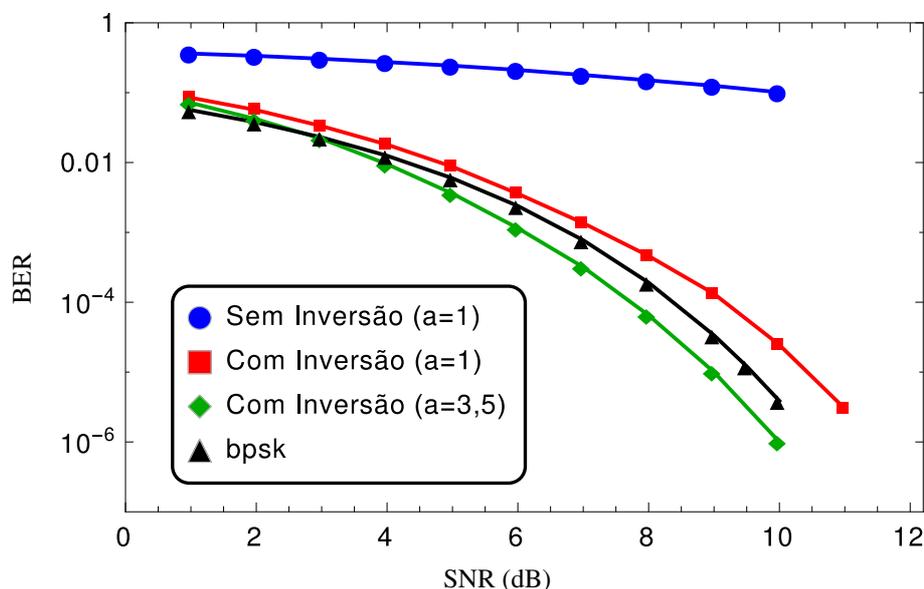
3.3.6 Análise de Desempenho

Para analisar o desempenho dos sistemas de comunicação propostos, foram realizadas simulações computacionais para avaliar a taxa de erro de bit (BER, *bit error rate*) em um canal AWGN. A relação sinal ruído (SNR, *signal to noise ratio*) é definida por

$$\text{SNR} = \bar{E}_s / N_0, \quad (3.12)$$

em que \bar{E}_s é a energia média do sinal transmitido $s(t)$. A Fig. 42 mostra a BER versus SNR para o modulador projetado com o diagrama de quatro estados com a utilização da

Figura 42 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Rössler com particionamento quaternário com variável x . Sistemas sem amplificação tem ganho unitário ($a=1$).

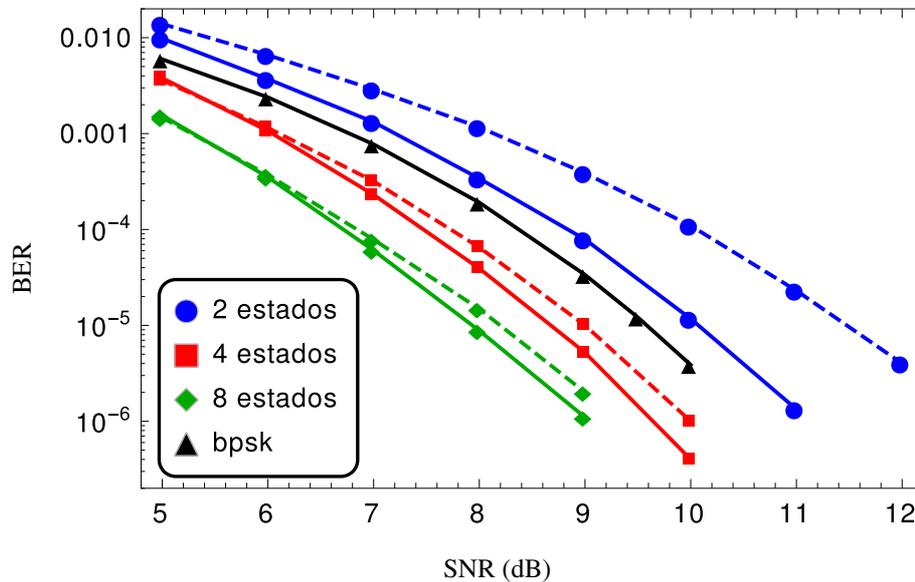


Fonte: O autor, 2018.

variável x . Observa-se que as modificações propostas levam a ganho de desempenho. No caso da inversão de transições associadas ao bit 0, há um significativo ganho de desempenho, quando em comparação com a modulação sem inversão. No caso da amplificação, observa-se que o sistema apresenta um ganho de desempenho de aproximadamente 0,8 dB, para uma BER de 10^{-5} , em relação à modulação sem amplificação. Como referência, foi incluída a curva de desempenho de um sistema de modulação digital BPSK.

A Fig. 43 ilustra as curvas de desempenho para os sistemas com dois, quatro e oito estados com a utilização das variáveis x e ρ . Pode-se ver que nos três casos a variável ρ apresenta ganho de desempenho em relação à variável x . Para um valor de BER de 10^{-5} , este ganho é de aproximadamente 2 dB para o sistema de dois estados, 0,3 dB para o sistema de quatro estados e 0,2 dB para o sistema de oito estados. A próxima seção detalha os procedimentos para a construção de um sistema de comunicação baseado no atrator de Lorenz e mostra as

Figura 43 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Rössler com dois, quatro e oito estados, com as variáveis x e ρ . As curvas para a variável x são pontilhadas. Todos os sistemas utilizam inversão e amplificação (esta não é utilizada com 2 estados).



Fonte: O autor, 2018.

diferenças no projeto do sistema devido à diferença entre as topologias dos atratores.

3.4 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NO ATRATOR DE LORENZ

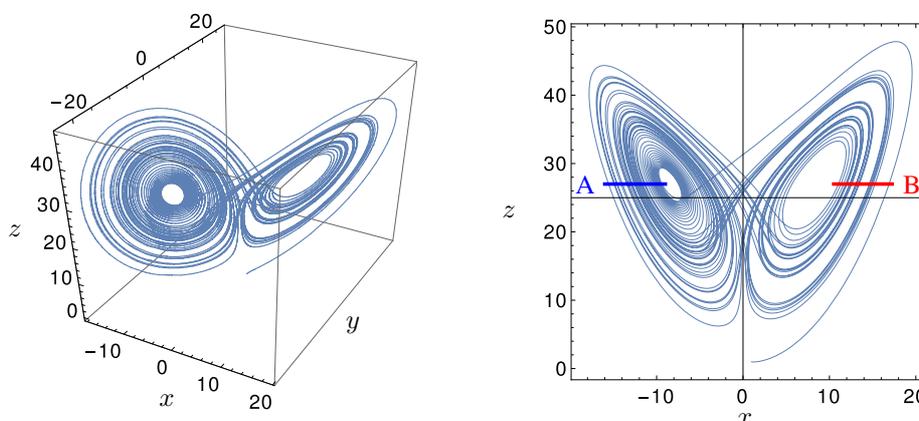
Nesta seção, a metodologia proposta é aplicada ao atrator caótico de Lorenz.

3.4.1 O Atrator Caótico de Lorenz

O atrator de Lorenz é definido pelo sistema de equações diferenciais ordinárias [3]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = x(t)(\gamma - z(t)) - y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - \beta z(t), \end{cases} \quad (3.13)$$

Figura 44 – Atrator de Lorenz (esquerda) e sua projeção no plano xz (direita).

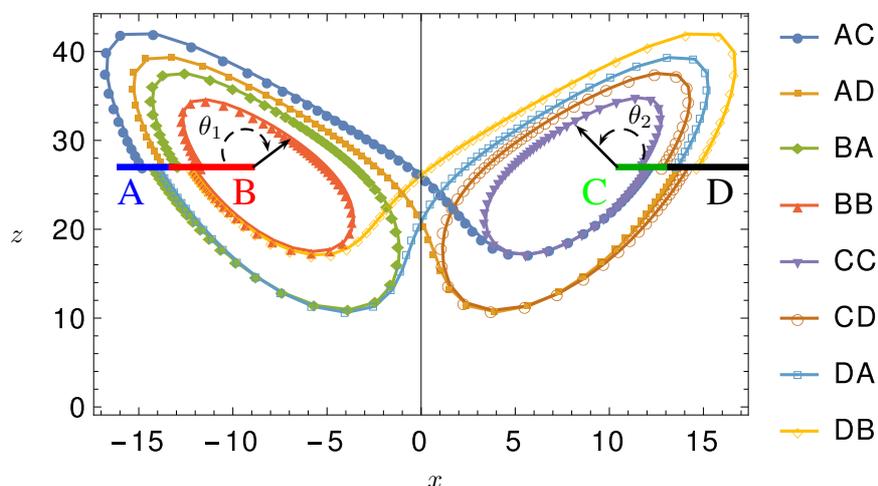


Fonte: O autor, 2018.

em que σ , γ e β são os parâmetros de controle do sistema. Em particular, neste trabalho, utiliza-se os valores $\sigma = 10$, $\gamma = 28$ e $\beta = 8/3$ [3].

O atrator de Lorenz possui comportamento caracterizado por mudanças no sentido de rotação do fluxo. Analisado em projeção no plano xz , por exemplo, o fluxo rotaciona no sentido horário quando está na região negativa da coordenada x , e em sentido anti-horário na região positiva. Uma seção de Poincaré para o atrator de Lorenz deve conter cruzamentos com o fluxo nestas duas regiões e comumente utiliza-se na literatura uma seção composta de dois semiplanos, de forma que o fluxo caótico os intercepta ao rotacionar em ambos os sentidos. Neste caso, os dois semiplanos são paralelos ao plano xy nas regiões positiva e negativa, em relação à coordenada x , e localizados em $z = 27$ [70]. Como a seção de Poincaré é composta de duas partes, um particionamento binário pode ser feito pela atribuição de um símbolo distinto a cada um dos semiplanos. A Fig. 44 mostra o atrator de Lorenz para os parâmetros considerados e sua projeção no plano xz , assim como a sua seção de Poincaré com particionamento binário.

Figura 45 – Curvas médias de transição do atrator de Lorenz em projeção no plano xz com particionamento quaternário. Também são mostrados os ângulos θ_1 e θ_2 , utilizados para definir o período angular.

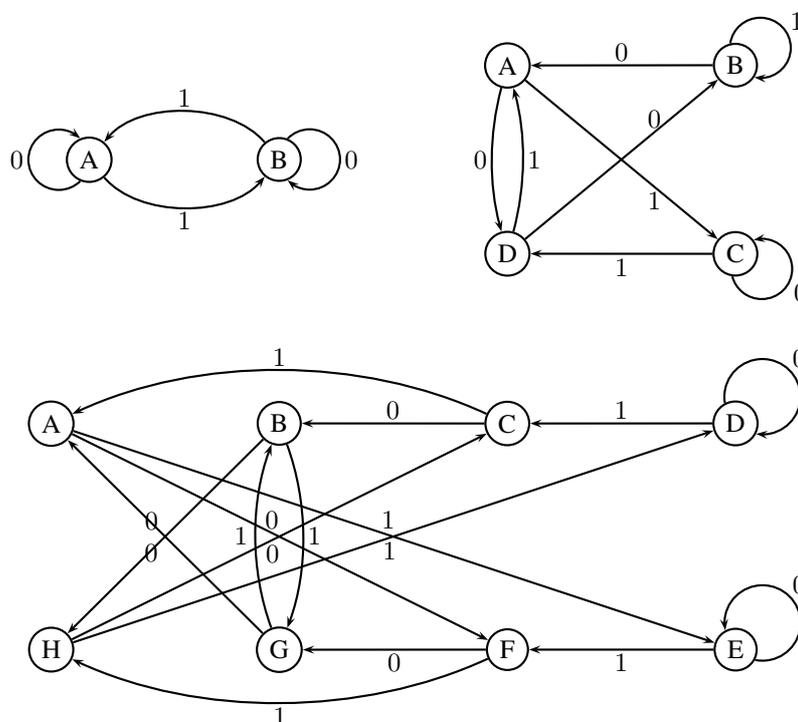


Fonte: O autor, 2018.

3.4.2 Curvas de Transição e Diagrama de Estados

Analogamente ao sistema baseado no atrator de Rössler, as formas de onda caóticas que transmitem os bits de informação são as curvas de transição entre regiões da seção de Poincaré, isto é, segmentos de trajetórias do fluxo caótico conectando as respectivas regiões. Como no atrator de Lorenz a seção de Poincaré é composta de duas partes, é necessário definir dois ângulos para a introdução da amostragem angular. Desta forma, definimos o ângulo θ_1 quando $x < 0$ e θ_2 quando $x > 0$ e a amostragem é feita com a utilização de θ_1 e θ_2 , alternando entre eles quando a trajetória caótica transita entre as regiões positiva e negativa da variável x . A Fig. 45 mostra uma realização das curvas de transição quando o particionamento é quaternário, assim como os pontos definidos pela amostragem angular uniforme. Também são mostrados os dois ângulos θ_1 e θ_2 . Com este procedimento o sistema baseado no atrator de Lorenz se torna periódico em relação à variável angular θ , com período 2π , ou seja, $|\Delta\theta| = |\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2| = 2\pi$, em que $\Delta\theta$ é a variação angular durante a transição, para

Figura 46 – Diagrama de estados do atrator de Lorenz para o particionamento em duas, quatro e oito regiões. As rotulações dos diagramas também são mostradas.

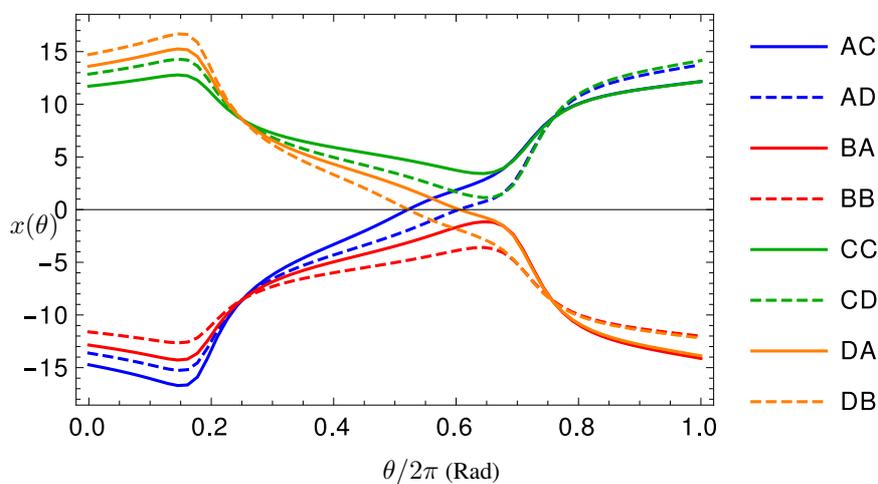


Fonte: O autor, 2018.

qualquer transição. $|\Delta\theta_1|$ é a variação angular quando $x < 0$, e $|\Delta\theta_2|$ é a variação angular quando $x > 0$. A representação em diagrama de estados é ilustrada na Fig. 46, que mostra os diagramas de estados para dois, quatro e oito estados, com suas respectivas transições. A rotulação dos diagramas também é mostrada.

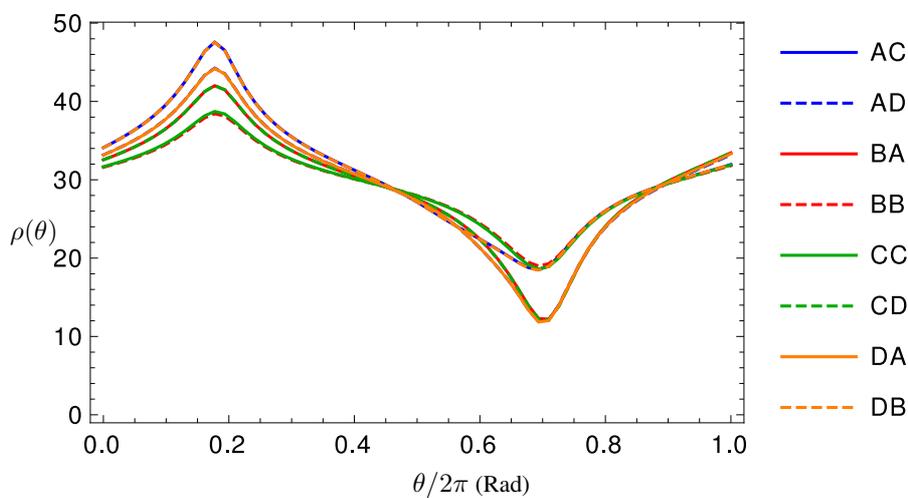
A Fig. 47 mostra uma realização das formas de onda caóticas geradas pela variável x para o particionamento quaternário. Analisando as formas de onda caóticas, observa-se que transições que divergem de um estado são relativamente próximas entre si. A solução apresentada no sistema baseado no atrator de Rössler consiste em inverter as formas de onda associadas ao bit 0, formando um grupo de curvas invertidas e outro de curvas não invertidas. Ao se aplicar esta estratégia ao atrator de Lorenz, não se verifica melhoria na separação entre as curvas para o caso binário, enquanto no caso quaternário, a maior separação entre as

Figura 47 – Sinais caóticos $x(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 48 – Sinais caóticos $\rho(\theta)$ das curvas médias de transição geradas pelo atrator de Lorenz com particionamento quaternário.



Fonte: O autor, 2018.

curvas é obtida com inversão de apenas duas curvas de transição associadas ao bit 0 (AD e DB).

No caso das formas de onda associadas à variável ρ , ilustradas na Fig. 48, a inversão de transições garante um aumento na distância normalizada mínima (\bar{d}_{\min}). A amplificação de

transições não faz efeito na topologia do atrator de Lorenz, portanto neste sistema não se aplica a etapa de amplificação.

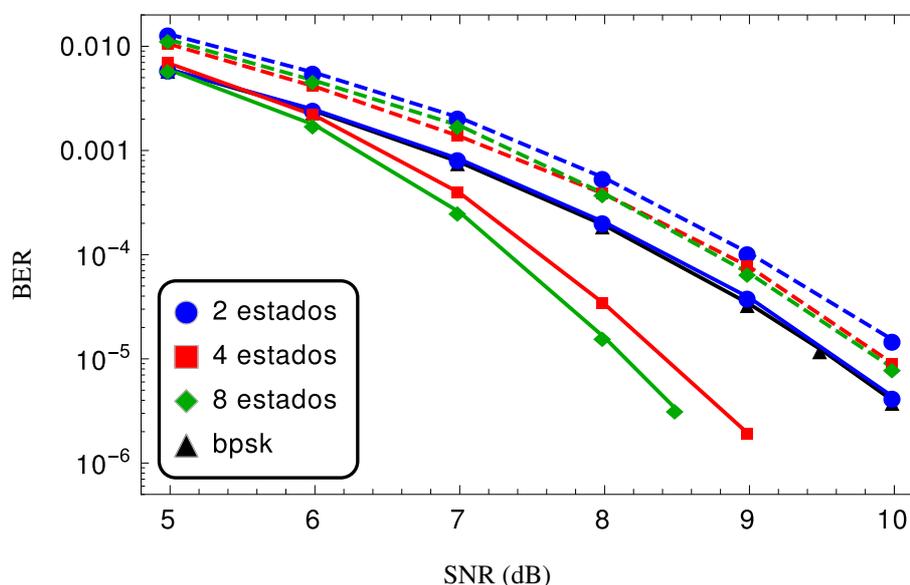
3.4.3 Análise de Desempenho

O sistema de comunicação baseado no atrator caótico de Lorenz tem a mesma estrutura do sistema baseado no atrator de Rössler, ilustrado na Fig. 41. Os blocos deste sistema são de fonte de sinal caótico, controle e modulação bipolar. O bloco de fonte do sinal caótico, neste caso, é composto pelo atrator de Lorenz. Os sinais caóticos utilizados no modulador bipolar podem ser as formas de onda geradas pela variável $x(\theta)$ ou $\rho(\theta)$. O bloco de controle também tem a mesma função do caso do atrator de Rössler, ou seja, controlar o fluxo caótico gerado pelo atrator de Lorenz para induzir as transições, direcionando as trajetórias caóticas para as transições desejadas.

A Fig. 49 mostra as curvas de BER versus SNR obtidas para o sistema baseado no atrator de Lorenz com as variáveis x e ρ . O desempenho dos sistemas que utilizam a variável ρ é superior ao dos que utilizam a variável x para dois, quatro e oito estados. Observa-se que o aumento do número de estados apresenta pouco ganho quando se utiliza a variável x . No caso da variável ρ , o sistema apresenta um ganho de aproximadamente 1,2 dB e 1,6 dB para os sistemas com quatro e oito estados, respectivamente, em relação ao sistema com dois estados para um valor de BER de 10^{-5} .

A Fig. 50 compara os desempenhos obtidos com os atratores de Lorenz e Rössler com a variável ρ . Observa-se que para dois estados, o sistema Lorenz é superior ao sistema Rössler. Nos demais casos, existe um valor de SNR a partir do qual o sistema Lorenz apresenta desempenho superior. Este valor é 8 dB e 8,8 dB para quatro e oito estados, respectivamente, para uma BER de 10^{-5} .

Figura 49 – BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Lorenz com dois, quatro e oito estados, com as variáveis x e ρ . As curvas para a variável x são pontilhadas.



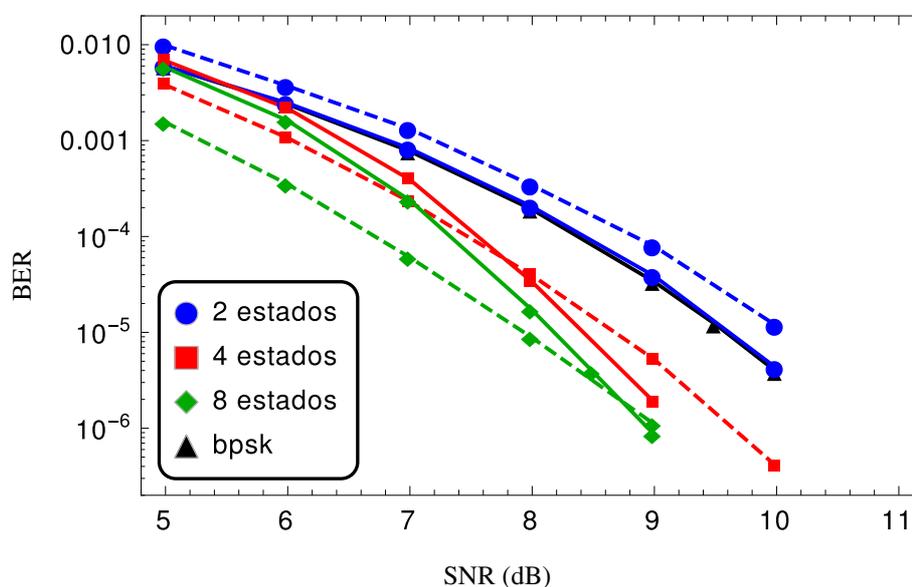
Fonte: O autor, 2018.

3.5 RESTRIÇÕES DE VISITAÇÃO NA SEÇÃO DE POINCARÉ

Os sistemas de comunicação baseados na topologia de atratores caóticos possuem formas de onda definidas por curvas de transição entre os estados do diagrama de estados associado ao particionamento da seção de Poincaré. Devido ao comportamento caótico do sistema, as curvas de transição utilizadas na transmissão de símbolos de informação nunca se repetem, sendo diferentes das curvas médias de transição utilizadas no demodulador. O efeito do desvio entre as curvas pode ser interpretado como um ruído adicional e inerente ao sistema, que é somado ao ruído do canal, definindo o ruído total que contribui para a degradação dos sinais transmitidos. O aumento do valor de SNR atenua o ruído do canal, porém não interfere no desvio entre as formas de onda transmitidas e as curvas médias.

Dado um particionamento da seção de Poincaré, uma forma de reduzir este desvio é in-

Figura 50 – BER versus SNR dos sistema de comunicação baseados na topologia do atrator caótico de Lorenz e Rössler com dois, quatro e oito estados, com a utilização da variável ρ . As curvas para o atrator de Rössler são pontilhadas



Fonte: O autor, 2018.

introduzir restrições na seção Poincaré, de forma que cada região da partição seja composta por sub-regiões permitidas e proibidas. Como consequência, a introdução destas restrições altera a dinâmica natural do fluxo caótico do sistema. No caso de mapas unidimensionais, nos quais são definidas regiões de guarda que nunca são visitadas [42], é introduzido um compromisso entre desempenho e segurança, em função da extensão das regiões de guarda. Para os atratores caóticos tridimensionais, pode-se interpretar as restrições nas sub-regiões como um conjunto de regiões de guarda. Neste caso, estas regiões têm por objetivo aproximar as curvas de transição das curvas médias para a redução do ruído residual do sistema.

A introdução de regiões de guarda requer ações de controle para evitar que as trajetórias caóticas visitem estas regiões. As intervenções nas trajetórias podem resultar em divergências entre o comportamento natural do fluxo caótico e o comportamento das trajetórias

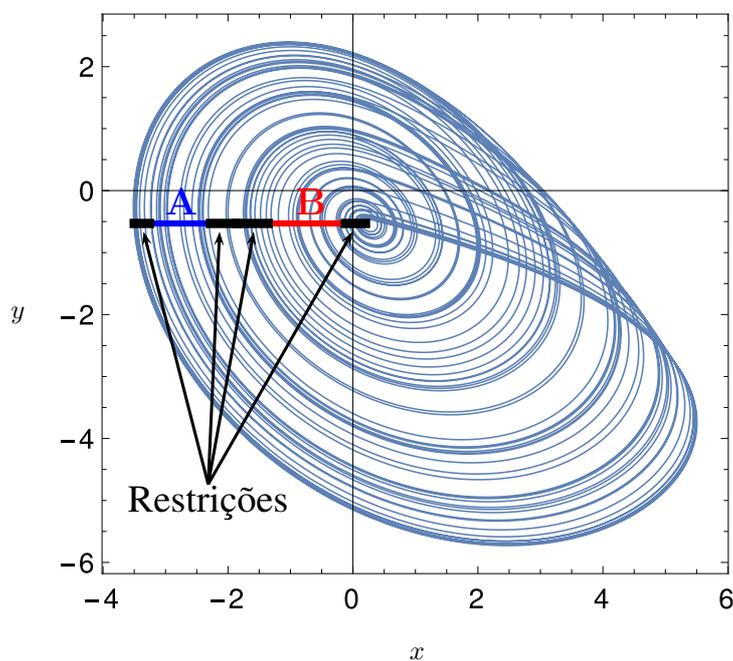
submetidas às ações de controle presentes no sistema. Além disso, ocorre um aumento na complexidade do sistema, assim como uma diminuição na sua eficiência energética, o que idealmente não é desejado no projeto de sistemas de comunicação.

A introdução de restrições de visitação na seção de Poincaré é feita pela definição de intervalos correspondentes a sub-regiões da seção aos quais se proíbe a visitação das trajetórias caóticas. Portanto, ocorre um aumento no conjunto de sequências proibidas, pois as restrições de visitação eliminam as sequências com condição inicial nas sub-regiões eliminadas, que se comportam como um conjunto de regiões de guarda. Para especificar a restrição, introduzimos um parâmetro de restrição, denominado η , que é definido pelo valor da porcentagem proibida da seção. Como a região A possui um limiar que divide o fluxo caótico entre as transições com dinâmica simbólica AA e com dinâmica simbólica AB, definimos os intervalos proibidos nos extremos da região A, de forma que as sub-regiões permitidas formam uma vizinhança do limiar. Analogamente, definimos os intervalos proibidos na região B. A Fig. 51 mostra o atrator de Rössler em projeção no plano xy , com sua seção de Poincaré na qual estão ilustradas as sub-regiões proibidas.

3.5.1 Análise de Desempenho

A Fig 52 mostra as curvas de desempenho da variável x obtidas com a introdução de restrições de visitação na seção de Poincaré para $\eta = 10\%$ e $\eta = 40\%$. Observa-se que o desempenho é similar nos dois casos. Quando comparado ao desempenho do sistema que não possui restrições de visitação, o ganho é dado por aproximadamente 0,6 dB para uma BER de 10^{-5} . Portanto, a aplicação de uma restrição de $\eta = 10\%$ apresenta uma escolha mais viável para o parâmetro η , pois obtém-se um ganho similar a maiores valores de restrição enquanto mantém menor alteração na dinâmica do sistema.

Figura 51 – *Seção de Poincaré do atrator de Rössler em projeção no plano xy ilustrando as sub-regiões proibidas.*

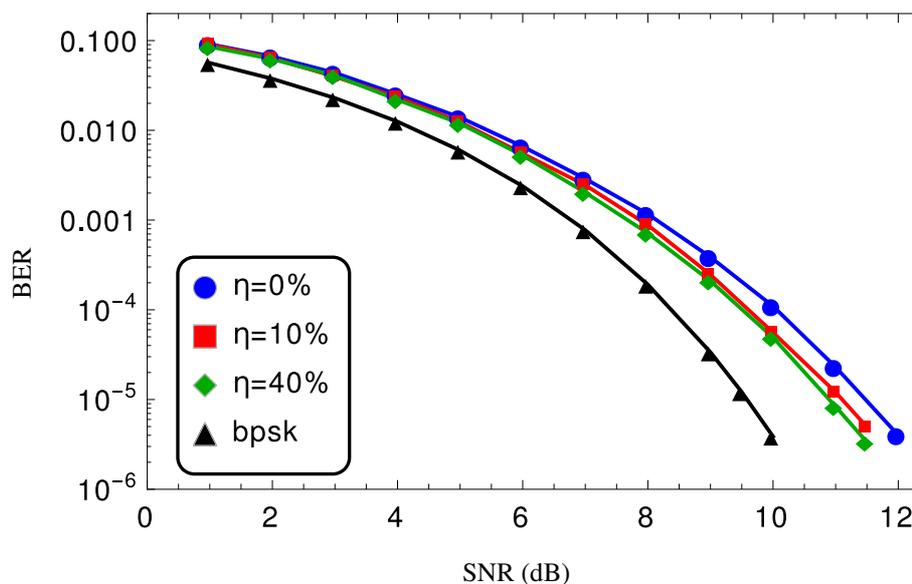


Fonte: O autor, 2018.

3.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresentamos uma metodologia para o projeto e implementação de sistemas de comunicação baseados na topologia de atratores caóticos tridimensionais. Foram analisados os detalhes da construção em estudos de caso para os atratores de Rössler e Lorenz. Mostrou-se como associar a evolução dinâmica do atrator a um diagrama de estados e mapear bits de informação em curvas características das transições entre estados do diagrama. Foram detalhadas as etapas e procedimentos necessários para a implementação do sistema e avaliamos o seu desempenho em relação à BER. Foram apresentados procedimentos para obtenção de ganho de desempenho, a partir de modificações nas formas de onda caóticas empregadas nos sistemas, indicando que a aplicação destes procedimentos é diferente nos dois atratores. Estas diferenças surgem da diferença de topologia entre os dois

Figura 52 – BER vs SNR do sistema de comunicação baseado no atrator de Rössler com restrição de visitação na seção de Poincaré para o parâmetro de restrição $\eta = 10\%$ e $\eta = 40\%$. As curvas de desempenho são relativas à variável x . Também são mostradas as curvas de desempenho do sistema sem restrição de visitação e do sistema BPSK.



Fonte: O autor, 2018.

atratores, implicando em uma relação entre o projeto do sistema e a topologia dos sinais. A utilização de formas de onda geradas por variáveis diferentes, assim como combinações entre as variáveis tem influência no desempenho do sistema. Dentre estas, os sistemas construídos para utilização da variável ρ mostram melhor desempenho. Além disso, o desempenho também se relaciona com a topologia do sistema. Neste caso, os sistemas baseados no atrator de Lorenz apresentam melhor desempenho, em relação à variável ρ , quando comparados com o atrator de Rössler. Outra modificação que possibilita melhoria de desempenho no sistema é a introdução de restrições de visitação na seção de Poincaré, diminuindo o ruído intrínseco do sistema. A modulação baseada na topologia do atratores caóticos possui flexibilidade para otimização de desempenho, com o custo de maior complexidade do sistema, apresentando um interessante compromisso entre desempenho e complexidade.

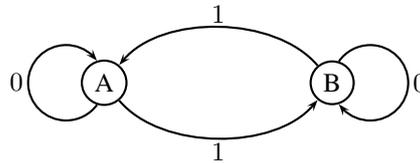
O próximo capítulo apresenta uma análise da dinâmica das trajetórias caóticas geradas na evolução dinâmica do atrator de Rössler, e sua representação por grafos gerados por conjuntos de restrições. A partir destes grafos pode-se estabelecer as sequências que devem ser transmitidas por um sistema com restrição.

4 DINÂMICA SIMBÓLICA E SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS EM ATRADORES CAÓTICOS TRIDIMENSIONAIS

Neste capítulo é introduzida uma estratégia de controle baseada na dinâmica simbólica do fluxo caótico do sistema, na qual a transmissão é feita por blocos de símbolos de informação. O objetivo desta estratégia é empregar o controle de forma que o sistema controlado evolua o mais próximo possível da dinâmica natural do sistema. Para isto, o controle deve ser aplicado pontualmente, com pequenas correções suficientes para induzir as trajetórias caóticas a gerar sequências simbólicas características do fluxo natural. Neste caso, ocorre uma diminuição na taxa de transmissão, pois o sistema não permite a transmissão de qualquer sequência binária devido às restrições dinâmicas do fluxo caótico. Entretanto, ganha-se em eficiência energética, menor complexidade e preservação da dinâmica caótica.

Em seguida, é feita uma análise da dinâmica simbólica de atradores caóticos pela representação da dinâmica por grafos construídos a partir do conjuntos de restrições do fluxo caótico, que representam sequências simbólicas proibidas na evolução das trajetórias caóticas. A entropia dos sistemas descritos por um conjunto de restrições é avaliada a partir dos grafos associados aos sistemas. Estes grafos são utilizados para a construção de codificadores que mapeiam sequências simbólicas sem proibições em sequências restritas que obedecem à dinâmica do fluxo caótico.

Figura 53 – Diagrama de estados do atrator de Rössler para o particionamento binário. A rotulação do diagrama também é mostrada.



Fonte: O autor, 2018.

4.1 DINÂMICA SIMBÓLICA DO FLUXO CAÓTICO EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO BASEADOS NA TOPOLOGIA DE ATRADORES CAÓTICOS TRIDIMENSIONAIS

A representação do fluxo caótico por dinâmica simbólica está associada ao particionamento e rotulação de uma seção de Poincaré sobre um alfabeto [8]. Neste capítulo, considera-se o alfabeto $\mathcal{A}_2 = \{A, B\}$, utilizado na construção do sistema de comunicação com dois estados. Dada uma partição rotulada da seção de Poincaré, uma trajetória caótica é representada por uma sequência simbólica $s_0s_1s_2\dots$, para $s_i \in \mathcal{A}_2$, de cruzamentos sucessivos das trajetórias caóticas com a seção.

O sistema de comunicação apresentado no Capítulo 3 utiliza um diagrama de estados com ramos rotulados para a transmissão de sequências binárias de informação, com a intervenção de controle aplicada a cada transição. Neste caso, é possível a geração de qualquer sequência simbólica, conforme observa-se no diagrama da Fig. 53 para o atrator de Rössler com particionamento binário. Entretanto, o comportamento dinâmico do fluxo caótico, derivado de suas características topológicas, impõe restrições nas sequências simbólicas geradas na sua evolução dinâmica espontânea, resultando na existência de sequências proibidas. Para evitar que os procedimentos implementados nestes sistemas induzam trajetórias que diverjam em

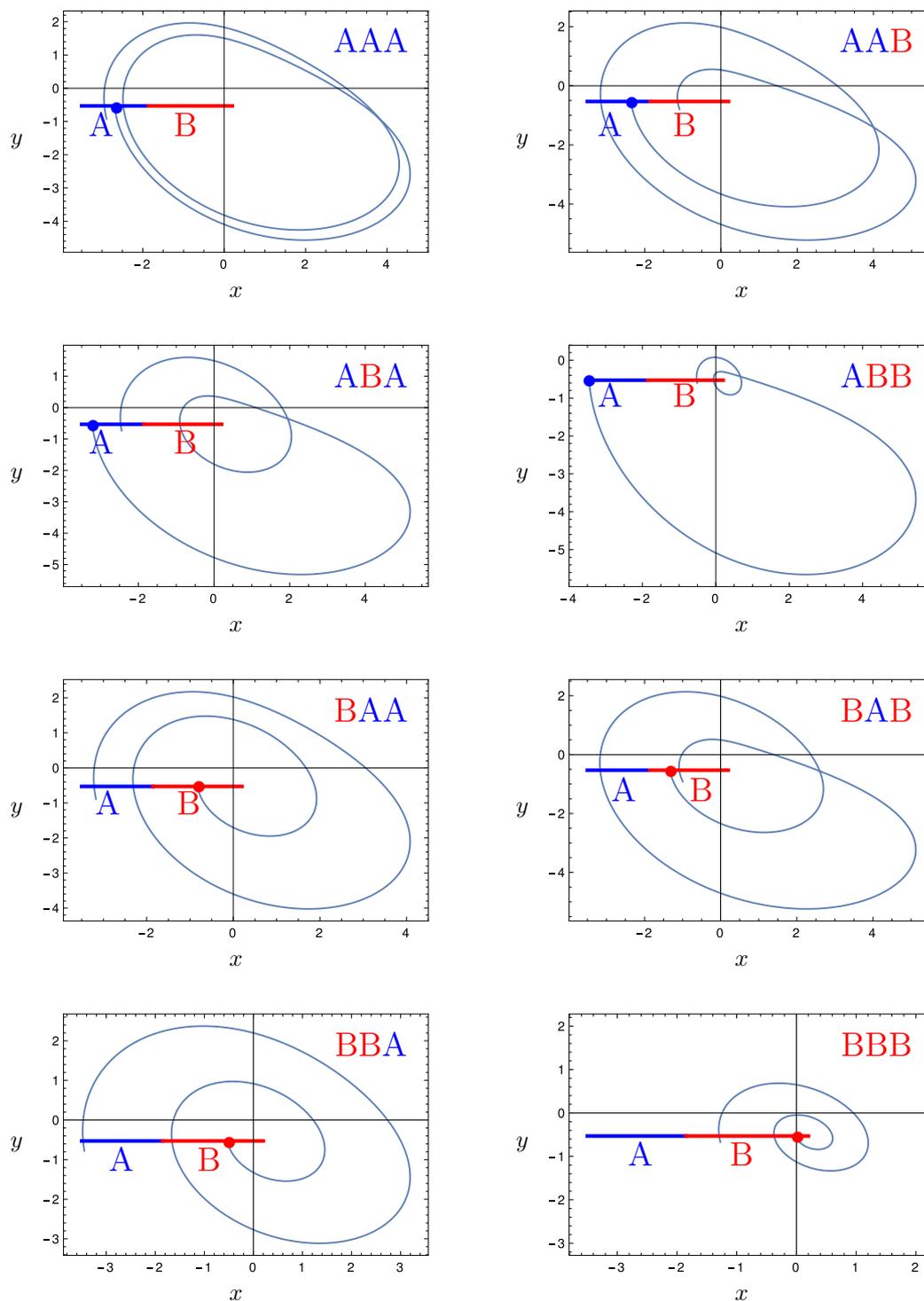
relação às trajetórias naturais do fluxo caótico, é necessário que a dinâmica simbólica natural do sistema seja preservada. Este requerimento é satisfeito se o sistema de controle induzir apenas trajetórias características do atrator, eliminando as sequências proibidas na dinâmica do fluxo. A próxima seção detalha estes procedimentos.

4.1.1 Representação Simbólica de Trajetórias Caóticas

A transmissão de símbolos de informação por blocos requer a introdução de subdivisões nas duas regiões da seção de Poincaré sobre o alfabeto \mathcal{A}_2 . Isto é equivalente a construir um processo de refinamento na seção de Poincaré para a definição de sequências associadas às regiões obtidas pelo refinamento. Este processo se assemelha ao procedimento apresentado no Capítulo 3, no qual foi apresentado um refinamento construído com o aumento da cardinalidade do alfabeto. Porém, neste caso, o refinamento é feito sobre o mesmo alfabeto mas com o aumento do comprimento n das sequências de informação induzidas pelo controle. Por exemplo, seja a seção de Poincaré do atrator de Rössler sobre \mathcal{A}_2 . A região rotulada por A é refinada pela sua divisão em duas sub-regiões, uma associada à transição AA e a outra à transição AB . Desta forma, qualquer sequência partindo destas regiões sempre possui seus dois símbolos iniciais AA ou AB . Refinando para o comprimento $n = 3$, a sub-região AA gera as sub-regiões AAA e AAB , e a sub-região AB gera as sub-regiões ABA e ABB . Analogamente, aplica-se este procedimento para a região B . Este processo pode ser refinado para um comprimento n , de acordo com as sequências de comprimento n que sejam permitidas pelo fluxo caótico. A Fig 54 ilustra os segmentos de trajetórias caóticas do atrator de Rössler em projeção no plano xy codificados pela dinâmica simbólica associada ao sistema para uma janela de comprimento $n = 3$.

Para gerar sequências de comprimento n , o controle atua direcionando as trajetórias caó-

Figura 54 – Segmentos de trajetórias caóticas geradas pelo fluxo caótico do atrator de Rössler com particionamento binário em projeção no plano xy codificadas em seqüências simbólicas de comprimento $n = 3$. A posição inicial dos segmentos é indicada por um ponto.



Fonte: O autor, 2018.

ticas às sub-regiões da seção de Poincaré rotuladas com a sequência simbólica desejada. A geração sucessiva de sequências de comprimento n consiste em induzir trajetórias sucessivamente de forma que ocorra uma transição suave entre o final e o início de trajetórias que representam sequências consecutivas. Neste procedimento, a intervenção do controle pode ser aplicada em qualquer instante entre a geração de duas sequências consecutivas, ou, equivalentemente, o sistema de controle pode atuar aplicando a intervenção nas trajetórias no máximo $n - 1$ símbolos antes da geração da trajetória que será induzida. Este procedimento pode ser interpretado como ações de controle que atuam em uma janela deslizante de comprimento n , em que o $(n + 1)$ -ésimo símbolo é induzido por uma ação de controle empregada com uma determinada antecedência. Desta forma, o sistema evolui naturalmente na janela definida pelo comprimento do bloco de informação, sem alterar a dinâmica natural do fluxo caótico, pois em cada janela é definida uma sequência característica do fluxo.

Esta estratégia de controle, por construção, não permite a transmissão de qualquer bloco de informação. Portanto, é necessário analisar a dinâmica do sistema para a especificação de conjuntos de sequências proibidas, necessários para a construção de grafos que representam a dinâmica simbólica do sistema. A partir destes grafos, pode-se construir codificadores que mapeiam sequências sem restrições em sequências restritas, de acordo com a dinâmica do atrator utilizado no sistema de comunicação. Estes conceitos são detalhados a seguir.

4.2 REPRESENTAÇÃO DO FLUXO CAÓTICO POR GRAFOS

Nesta seção, é apresentada uma representação do mecanismo de evolução das trajetórias caóticas por grafos.

4.2.1 Preliminares

Uma sequência finita de símbolos w sobre o alfabeto \mathcal{A}_2 é denominada de *palavra*. O comprimento de uma palavra w é denotado por $|w|$. Sejam u e v duas palavras sobre \mathcal{A}_2 . A *concatenação* de u e v é a palavra uv , tal que $|uv| = |u| + |v|$. Dada uma palavra $w = w_0w_1 \dots w_{n-1}$, com $|w| = n$, um *prefixo* de w é uma palavra da forma $w_0w_1 \dots w_k$, $0 \leq k \leq (n-1)$ e um *sufixo* de w é uma palavra da forma $w_kw_{k+1} \dots w_{n-1}$, $0 \leq k \leq (n-1)$. Denomina-se o *conjunto de prefixos* de uma palavra w de $P(w)$. Similarmente, $S(w)$ é o *conjunto de sufixos* de w . Por exemplo, o conjunto de prefixos da palavra BBBBBB é

$$P(\text{BBBBBB}) = \{\epsilon, \text{B}, \text{BB}, \text{BBB}, \text{BBBB}, \text{BBBBB}, \text{BBBBBB}\} \quad (4.1)$$

em que a palavra ϵ é a palavra vazia da operação de concatenação, isto é, $\epsilon a = a\epsilon = a$, $\forall a \in \mathcal{A}_2$ e $|\epsilon| = 0$. Os *prefixos próprios* de uma palavra w são dados pelo conjunto $P(w) \setminus \{w\}$ e os *sufixos próprios* por $S(w) \setminus \{w\}$. A palavra de maior comprimento em $P(w) \setminus \{w\}$ é o *máximo prefixo próprio* de w e a palavra de maior comprimento em $S(w) \setminus \{w\}$ é o *máximo sufixo próprio* de w . Por exemplo, o máximo prefixo próprio e máximo sufixo próprio de ABBBAA são ABBBA e BBBA, respectivamente.

Um *grafo direcionado rotulado* G (doravante denominado grafo) é definido pela tripla $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \lambda)$, em que \mathcal{V} é um conjunto finito de *vértices* (ou *estados*) e \mathcal{E} é um conjunto finito de *ramos*, aos quais se definem as funções $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ e $t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$, que determinam o estado inicial e terminal de um ramo e $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_2$ é uma função de rotulação. Uma rotulação em um grafo G é denominada determinística se, para cada estado I de G , os ramos partindo de I são rotulados com símbolos distintos de \mathcal{A}_2 . O número de ramos que partem de um estado $I \in \mathcal{V}$ é denominado grau de saída de I , e o número de ramos que chegam no estado $I \in \mathcal{V}$ é denominado grau de entrada de I .

Um caminho $\pi = e_1e_2 \dots e_n$ em um grafo G é uma sequência finita de ramos $e_i \in E$ tal

que $t(e_i) = i(e_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Um grafo G é denominado *irredutível* se para cada par ordenado de estados I_i e I_j há um caminho $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$ sobre G tal que $i(e_1) = I_i$ e $t(e_n) = I_j$.

A k -ésima potência G^k , $k \geq 1$, do grafo G possui o mesmo conjunto de vértices \mathcal{V} de G , com precisamente um ramo do estado I_i para o estado I_j em G^k para cada caminho em G de comprimento n de I_i para I_j .

Dado um grafo com L estados, a sua matriz de adjacência M é uma matriz quadrada $L \times L$, tal que o seu (i, j) -ésimo elemento $m_{ij} \geq 0$ é definido como o número de ramos que conectam os estados I_i e I_j do grafo. Um (M, k) -autovetor aproximado de M é um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ com componentes inteiras não negativas satisfazendo $M\mathbf{v} \geq k\mathbf{v}$, $k \in \mathbb{N}$. Se M é uma matriz de adjacência associada a um grafo G e \mathbf{v} é um (M, k) -autovetor aproximado de M , cada componente v_i , $1 \leq i \leq L$, de \mathbf{v} é relacionada ao estado I_i de G , e é interpretada como o peso associado ao estado I_i . Um método para encontrar autovetores aproximados é descrito em [39, Teorema 5.3.6].

4.2.2 Representação do Sistema Por Um Conjunto de Restrições

Uma forma de especificar as restrições na ocorrência de símbolos em uma sequência \mathcal{S} é pela definição de um conjunto de palavras proibidas, denominado de \mathcal{F} . Se $w \in \mathcal{F}$, então w não ocorre como uma subsequência de \mathcal{S} . Denominamos o conjunto de palavras proibidas de comprimento n de \mathcal{F}_n . Para determinação do conjunto \mathcal{F}_n de uma sequência \mathcal{S} , especifica-se o parâmetro n , percorre-se esta sequência com uma janela de comprimento n e lista-se as subsequências que nunca ocorrem em \mathcal{S} . Para limitar a complexidade de busca, o comprimento máximo considerado é $n = 10$. Desta forma,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=2}^{10} \mathcal{F}_n. \quad (4.2)$$

Para representar o fluxo caótico de um atrator, gera-se uma sequência $\mathcal{S}_N = s_0 s_1 \dots s_{N-1}$ sobre \mathcal{A}_2 com $N = 5 \times 10^6$. Neste caso, os símbolos s_i são gerados pela dinâmica simbólica do atrator de Rössler com evolução natural, em que cada símbolo s_i é definido pelo rótulo da seção a cada cruzamento do fluxo caótico com a mesma. A partir da análise de \mathcal{S}_N , observa-se que a primeira proibição ocorre com $n = 6$, e neste caso existe apenas uma palavra proibida, BBBBBB, portanto, $\mathcal{F}_6 = \{\text{BBBBBB}\}$. Se considerarmos $n > 6$, surgem palavras proibidas obtidas pela concatenação da palavra BBBBBB com símbolos de \mathcal{A}_2 . No entanto, estas não representam novas proibições e não são listadas em \mathcal{F}_n , $n > 6$. Para $n \leq 10$, ocorrem as seguintes proibições

$$\mathcal{F}_6 = \{\text{BBBBBB}\} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}_7 = \{\text{BBBBBAA}\}$$

$$\mathcal{F}_8 = \{\text{BBBBBABA}\}$$

$$\mathcal{F}_{10} = \{\text{BBBBBABBAB}\}.$$

Logo, para $n \leq 10$ o conjunto de proibições para o atrator de Rössler é

$$\mathcal{F} = \{\text{BBBBBB}, \text{BBBBBAA}, \text{BBBBBABA}, \text{BBBBBABBAB}\}. \quad (4.4)$$

O conjunto dos máximos prefixos próprios associados a cada palavra proibida listada em \mathcal{F} é denominado $\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1}$. Para \mathcal{F} dado por (4.4), obtemos

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1} = \{\text{BBBBB}, \text{BBBBBA}, \text{BBBBBAB}, \text{BBBBBABBA}\}. \quad (4.5)$$

O conjunto de prefixos de $\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1}$ é

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1}) = \{ \epsilon, \text{B}, \text{BB}, \text{BBB}, \text{BBBB}, \text{BBBBB}, \text{BBBBBA}, \text{BBBBBAB}, \\ \text{BBBBBABBA}, \text{BBBBBABBA} \}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Uma forma alternativa de representar as restrições de uma sequência simbólica é através de um grafo com ramos rotulados com símbolos de \mathcal{A}_2 . A seguir, descrevemos os procedimentos propostos em [71] para a construção de um grafo que representa a dinâmica do sistema a partir da especificação de um conjunto \mathcal{F} .

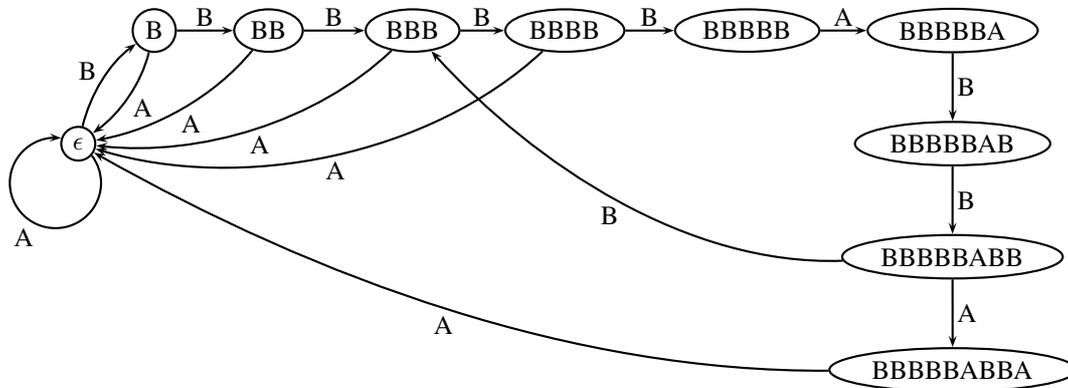
4.2.3 Construção de Grafos a Partir de Um Conjunto de Restrições

Dado um conjunto de palavras proibidas \mathcal{F} sobre o alfabeto \mathcal{A}_2 , definimos os estados do grafo como sendo os elementos do conjunto $P(\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1})$. Para caso do sistema representado em (4.6), o grafo tem 10 estados. A construção do grafo para um sistema restrito descrito por \mathcal{F} é feita pela execução dos seguintes passos:

- ▷ Se a concatenação de uma palavra de um estado com um símbolo de \mathcal{A}_2 resultar em uma palavra em $P(\mathcal{F}\mathcal{A}_2^{-1})$, conecta-se estes dois estados com um ramo rotulado com este símbolo.
- ▷ Se esta concatenação resulta em uma palavra que não é estado do grafo nem é uma palavra proibida (nem é prefixo nem sufixo de uma palavra proibida), a conexão é feita ao estado com o máximo sufixo da palavra obtida pela concatenação.
- ▷ Finalmente, eliminam-se os estados que têm apenas ramos incidentes ou divergentes deste estado.

A partir destes procedimentos, constrói-se o grafo que representa a dinâmica do fluxo caótico do atrator de Rössler, que é ilustrado na Fig. 55. Como se considerou a busca de palavras para um comprimento finito, o grafo gera uma aproximação da dinâmica do atrator. As sequências geradas pela concatenação dos símbolos dos ramos em um caminho no grafo são equivalentes às sequências geradas por sucessivos cruzamentos do fluxo caótico com a seção de Poincaré.

Figura 55 – Grafo do atrator de Rössler com particionamento binário sobre o alfabeto \mathcal{A}_2 . Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



Fonte: O autor, 2018.

Na sequência, são construídos os grafos que representam a dinâmica das trajetórias caóticas geradas por sistemas com restrição de visitação na seção de Poincaré. A introdução destas restrições tem por objetivo diminuir o ruído intrínseco associado às formas de onda caóticas utilizadas nos sistemas de comunicação baseados na topologia de atratores caóticos, conforme discutido no Capítulo 3.

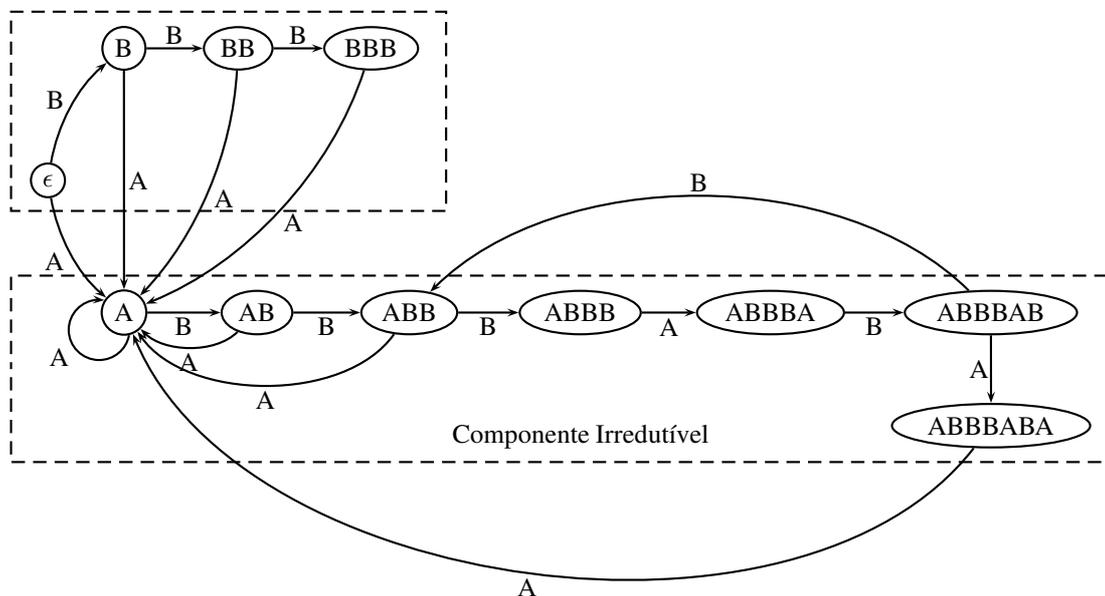
4.3 DINÂMICA DOS SISTEMAS RESTRITOS

Os sistemas restritos são caracterizados pelo parâmetro η , que define qual o valor de porcentagem de cada região da seção de Poincaré é eliminado. Para analisar o efeito das restrições de visitação na dinâmica do fluxo caótico, são construídos grafos para alguns valores do parâmetro η . No caso de $\eta = 10\%$, o conjunto de proibições \mathcal{F} é dado por

$$\mathcal{F} = \{BBBB, ABBBAA, ABBBBABAB\}. \quad (4.7)$$

A Fig. 56 mostra o grafo do sistema com a restrição $\eta = 10\%$. Pode-se observar que o grafo é composto de dois subgrafos, conforme demarcado pelas linhas tracejadas na figura.

Figura 56 – Grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 10\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



Fonte: O autor, 2018.

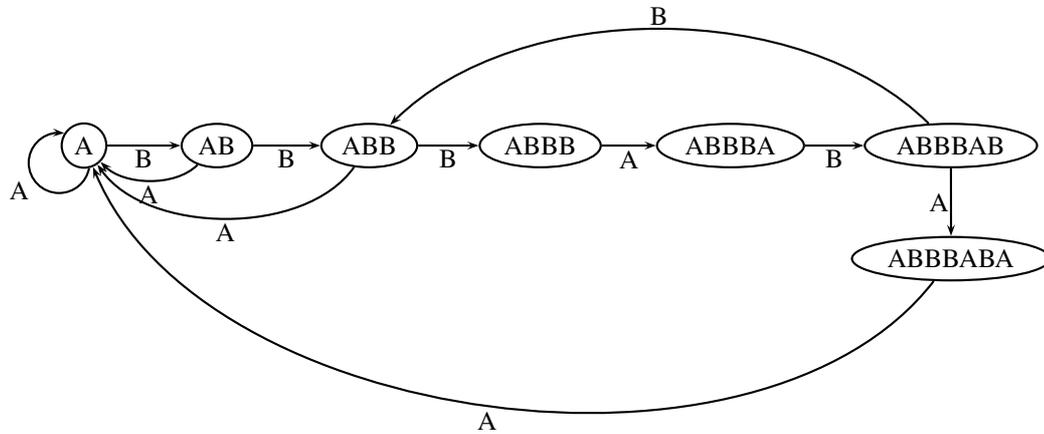
Neste caso, o subgrafo superior se comporta como um transiente dinâmico, pois ao ocorrer uma transição de um estado do subgrafo superior para um estado do subgrafo inferior, não é possível retornar ao subgrafo superior. O subgrafo inferior é a componente irredutível do grafo, que é suficiente para descrever a dinâmica do sistema. A Fig. 57 ilustra a componente irredutível do grafo do sistema para o caso $\eta = 10\%$. Analogamente, a Fig. 58 ilustra o grafo irredutível para o caso da restrição $\eta = 20\%$. Neste caso, o conjunto \mathcal{F} é

$$\mathcal{F} = \{BBB, ABBAAB\}. \tag{4.8}$$

A Fig. 59 mostra o caso $\eta = 30\%$, que possui o conjunto de proibições dado por

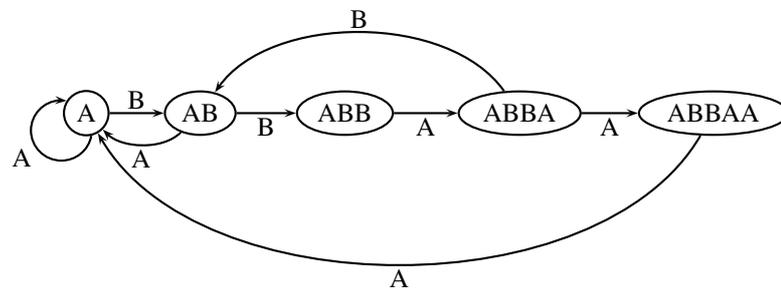
$$\mathcal{F} = \{BBB, BABB, ABBA, ABBAABA\}. \tag{4.9}$$

Figura 57 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 10\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 58 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 20\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



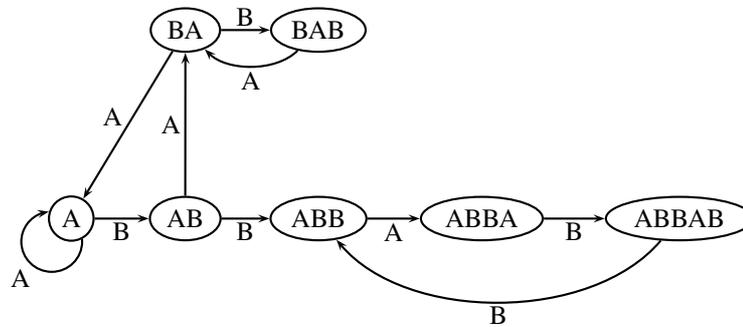
Fonte: O autor, 2018.

A Fig. 60 mostra o caso $\eta = 40\%$, cujo conjunto \mathcal{F} é

$$\mathcal{F} = \{BB, BABAAB\}. \quad (4.10)$$

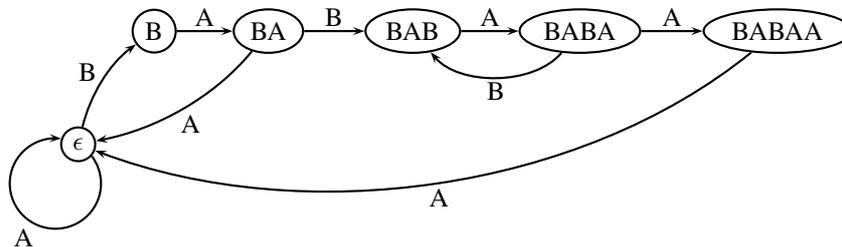
Observa-se que, para o conjunto de restrições \mathcal{F} , os valores de restrição $\eta > 50\%$ geram grafos que apresentam uma acentuada diminuição no número de sequências possíveis distintas de comprimento n e portanto não serão considerados. O conceito de crescimento de número

Figura 59 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $\eta = 30\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 60 – Componente irredutível do grafo do atrator de Rössler com particionamento binário com restrição de $r = 40\%$ na seção de Poincaré. Foram consideradas palavras de comprimento $n \leq 10$.



Fonte: O autor, 2018.

de seqüências possíveis distintas se relaciona ao conceito de *entropia*, o qual é descrito na próxima seção.

4.4 ENTROPIA

O atrator caótico pode ser interpretado como uma fonte de informação que gera seqüências simbólicas de acordo com o alfabeto associado ao particionamento da seção de Poincaré. A sua capacidade de transmissão de informação, se relaciona com a quantidade de seqüên-

cias distintas que o fluxo caótico do atrator consegue gerar. Denominando o número de sequências possíveis de comprimento n de $|\mathcal{B}_n|$, a *entropia* do sistema é definida por [39]

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{B}_n|. \quad (4.11)$$

Considerando a base do logaritmo como 2, a entropia é expressa em bits. Shannon propôs um procedimento para o cálculo da entropia baseado na matriz adjacência do grafo que representa as restrições [39]. Nesta seção, considera-se que os estados de um grafo com L estados são rotulados com elementos do conjunto $\{I_0, I_1, \dots, I_{L-1}\}$.

No caso do sistema sem restrições, a matriz de adjacência M é uma matriz 10×10 , associada ao grafo ilustrado na Fig. 55, dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O teorema de Perron-Frobenius [39] estabelece que dada uma matriz M , positiva, isto é, $m_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$, então existe um autovalor real e positivo λ_M , denominado autovalor de Perron, tal que qualquer outro autovalor μ de M tem valor absoluto menor que λ_M , ou seja $|\mu| \leq \lambda_M$.

Seja M uma matriz adjacência de um grafo irredutível que representa um sistema com

Tabela 1 – Entropia do sistema em função do parâmetro de restrição r . Também são mostrados os conjuntos de proibições associados ao parâmetro r .

η	h (bits)	\mathcal{F}
0%	0,9775	{BBBBBB, BBBBBA, BBBBAB, BBBBAB}
10%	0,9038	{BBBB, ABBBA, ABBBAB}
20%	0,8419	{BBB, ABBAAB}
30%	0,6942	{BBB, BABB, ABBAA, ABBABA}
40%	0,6557	{BB, BABAAB}

restrições. A entropia deste sistema é dada por [39, Teorema 4.3.1]

$$h = \log_2 \lambda_M, \quad (4.13)$$

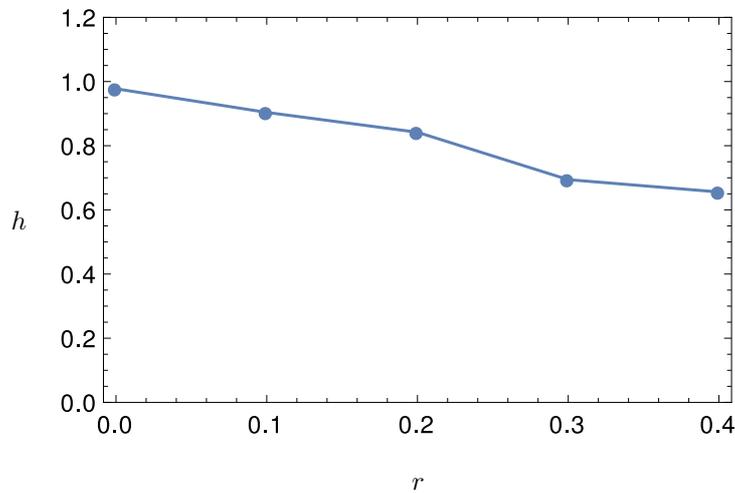
em que λ_M é autovalor de Perron da matriz M . Por exemplo, para a matriz dada por (4.12), o valor da entropia é $h = 0,9775$ bits. Quando há restrições de visitação na seção de Poincaré, a exclusão de sub-regiões na seção de Poincaré elimina as sequências que começam pelas sub-regiões que se tornam proibidas. Portanto, ocorre uma diminuição dos valores de entropias associados aos grafos dos sistemas com restrição. A Tabela 1 mostra os valores de entropia em função do parâmetro η , que também é ilustrada na Fig. 61.

O sistema de comunicação que utiliza a dinâmica restrita do fluxo caótico do atrator pode ser implementado com a introdução de uma etapa de codificação de fonte. Neste caso, o codificador atua transformando sequências sem restrições nas sequências restritas de acordo com a dinâmica do fluxo. A próxima seção apresenta estes detalhes.

4.5 CODIFICADORES DE ESTADOS FINITOS

Um *codificador de estados finitos* é definido por uma quádrupla $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathcal{O})$, em que \mathcal{J} é a rotulação de entrada nos ramos e \mathcal{O} é a rotulação de saída. A existência de codificadores de estados finitos de taxa p/q , em que p e q são inteiros positivos, com $p < q$, para um sistema

Figura 61 – Entropia do fluxo caótico gerado pelo atrator de Rössler em função do parâmetro de restrição η .



Fonte: O autor, 2018.

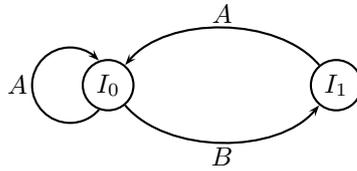
com entropia h é garantida sob a condição $p/q \leq h$ [39, Teorema 5.2.5]. Desta forma, é possível construir codificadores para os sistemas restritos com a escolha adequada da taxa p/q .

4.5.1 Algoritmo de Construção

O algoritmo de construção do codificador é apresentado em [39, Cap. 5]. Como exemplo, a construção do codificador para o sistema com restrição de visitação $\eta = 30\%$ é apresentada. Neste caso, o conjunto \mathcal{F} é definido por $\mathcal{F} = \{\text{BBB}, \text{BABB}, \text{ABBAA}, \text{ABBABA}\}$, cujo grafo associado é ilustrado na Fig. 59.

▷ A primeira etapa do algoritmo consiste em construir o grafo para o sistema descrito por \mathcal{F} , conforme apresentado na Seção 4.2. Para simplificar a construção do codificador, consideramos um novo conjunto de proibições, denominado $\tilde{\mathcal{F}}$, que inclui todas as sequências especificadas por \mathcal{F} mas que gera um grafo com menos estados. Para o exemplo considerado, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\text{BB}\}$. O conjunto $\tilde{\mathcal{F}}$ inclui as sequências proibidas geradas por \mathcal{F} como

Figura 62 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$.



Fonte: O autor, 2018.

subconjunto, portanto pode-se aproximar \mathcal{F} por $\tilde{\mathcal{F}}$. O grafo G para o sistema descrito por $\tilde{\mathcal{F}}$ é ilustrado na Fig. 62, cuja matriz de adjacência M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

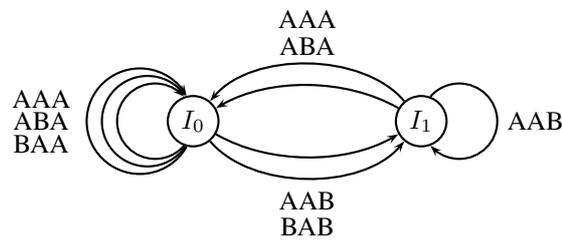
- ▷ A segunda etapa do algoritmo é calcular a entropia do sistema descrito pelo grafo, conforme discutido na Seção 4.4. A entropia do sistema restrito definido por $\tilde{\mathcal{F}}$ é $\tilde{h} = 0,6942$ bits, logo é possível construir um codificador de taxa $p/q = 2/3$.
- ▷ A etapa seguinte é a construção da q -ésima potência do grafo G . Neste caso, para $p/q = 2/3$, constrói-se G^3 , conforme ilustra-se na Fig. 63. A matriz de adjacência M^3 associada a G^3 é dada por

$$M^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

- ▷ A etapa subsequente consiste inicialmente em encontrar um $(M^q, 2^p)$ -autovetor aproximado da matriz de adjacência M^3 . Para $p/q = 2/3$, um $(M^3, 4)$ -autovetor aproximado \mathbf{v} é dado por

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Figura 63 – Grafo G^3 associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$.

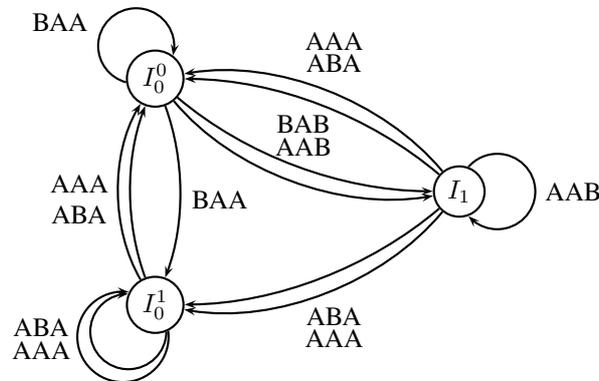


Fonte: O autor, 2018.

Em seguida, deleta-se os estados correspondentes a componentes nulas de \mathbf{v} . Neste caso, toda as componentes de \mathbf{v} são não-nulas, logo mantém-se todos os estados de G^3 .

▷ Na sequência, é realizada a divisão de estados até a obtenção de uma representação de G^3 com grau de saída maior ou igual a 2^p . Um procedimento para executar a divisão de estados é detalhado em [39, Seção 2.4]. O grafo G^3 neste exemplo não satisfaz o requerimento do grau de saída, portanto deve-se fazer a divisão de estados. A definição dos estados que são divididos é dada pelo autovetor aproximado, de acordo com a componente associada a cada estado. A componente $v_0 > 1$ de \mathbf{v} indica que a divisão deve ser realizada no estado I_0 . Deste estado partem cinco ramos, dos quais três são transições $I_0 \rightarrow I_0$ (BAA, ABA, AAA) e dois são transições $I_0 \rightarrow I_1$ (BAB, AAB). Deve-se definir duas subcomponentes I_0^0 e I_0^1 de I_0 que tenham grau de saída maior ou igual a 2^p . A escolha dos ramos de I_0 que partem de I_0^0 é arbitrária, então escolhemos os ramos BAA, BAB e AAB. Como o ramo BAA é uma transição $I_0 \rightarrow I_0$, também existe um ramo conectando I_0^0 e I_0^1 com este mesmo rótulo, totalizando quatro ramos partindo de I_0^0 . Analogamente, os ramos que partem da subcomponente I_0^1 são os ramos restantes de I_0 , ABA e AAA, que também são transições $I_0 \rightarrow I_0$, portanto o grau de saída de I_0^1 é quatro. O grafo obtido após a divisão do estado I_0 é ilustrado na Fig. 64. Pode-se observar que o grafo obtido

Figura 64 – Grafo associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$ após a divisão do estado I_0 .



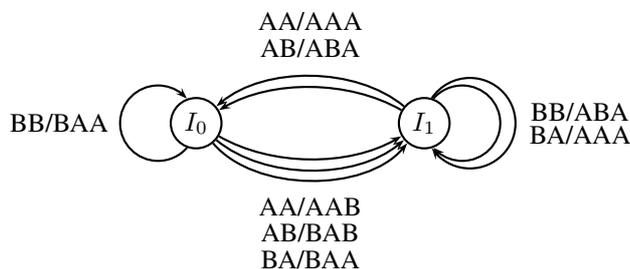
Fonte: O autor, 2018.

apresenta grau de saída maior ou igual $2^p = 4$.

▷ Finalmente, a última etapa consiste em suprimir ramos do grafo obtido para que o grafo resultante apresente grau de saída constante igual a 2^p bem como definir uma rotulação de entrada. Neste caso, basta retirar um ramo partindo de I_1 arbitrariamente e definir uma rotulação de entrada. Entretanto, observa-se que se for retirado o ramo que representa a transição $I_1 \rightarrow I_1$, os estados I_0^1 e I_1 passam a gerar o mesmo conjunto de sequências de saída, podendo ser colapsados em um único estado. A Fig. 65 ilustra o codificador de estados finitos obtido para o sistema especificado por $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$.

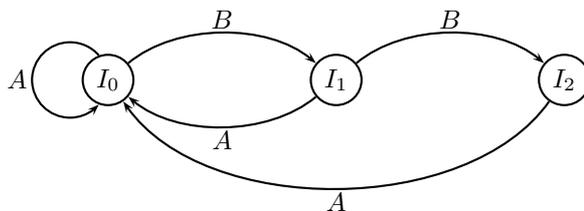
É apresentada agora a construção do codificador para o caso $\eta = 10\%$. Considera-se o conjunto $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$, cujo grafo G é ilustrado na Fig. 66 e possui entropia $\tilde{h} = 0,8791$. Uma escolha possível é a taxa $p/q = 6/7$, entretanto, devido à complexidade de construção do grafo, utiliza-se a taxa $p = 4/5$ para simplificar o processo de construção. A matriz de

Figura 65 – Codificador de estados finitos para o sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB\}$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 66 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$.



Fonte: O autor, 2018.

adjacência M^5 associada a G^5 é dada por

$$M^5 = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 11 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

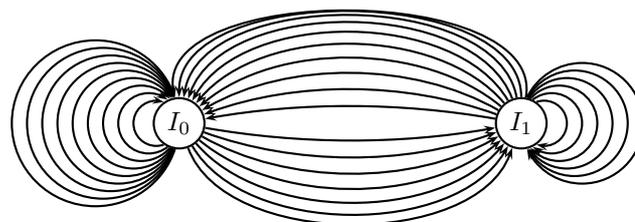
e possui o $(M^5, 2^4)$ -autovetor aproximado

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.18}$$

Como a terceira componente do autovetor aproximado é nula, deleta-se o terceiro estado de G^5 , e o grafo resultante apresenta grau de saída maior que $2^4 = 16$ em todos os estados, portanto não é necessário realizar a divisão de estados. Retira-se ramos do grafo resultante

Tabela 2 – Codificação das sequências de comprimento $n = 5$ possíveis.

$I_0 \rightarrow I_0$	AAAA/AAAAA AAAB/AAABA AABA/ABAAA ABAA/AABBA BAAA/ABABA AABB/BAAAA ABAB/BAABA BAAB/BABAA ABBA/BBAAA	$I_0 \rightarrow I_1$	BABA/AAAAB BBAA/ABAB ABBB/ABAAA BABB/ABBAA BBAB/BAAAA BBBA/BAAAAB BBBA/BBAAAB
$I_1 \rightarrow I_0$	AAAA/AAAAA AAAB/AAABA AABA/ABAAA ABAA/AABBA BAAA/ABAAA AABB/ABABA ABAB/BAAAA BAAB/BAABA ABBA/BABAA BABA/BABBA	$I_1 \rightarrow I_1$	BBAA/AAAAB ABBB/ABAB BABB/ABAAB BBAB/ABBAB BBBA/BAAAAB BBBB/BABAB

Figura 67 – Codificador de estados finitos para sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$ e taxa $p/q = 4/5$. Uma possível codificação das sequências geradas é especificada na Tabela 2.

Fonte: O autor, 2018.

até que o grau de saída seja constante e igual a 2^4 e rotula-se os ramos restantes com a rotulação de entrada. A Fig. 67 e a rotulação mostrada na Tabela 2 ilustram o codificador de estados finitos para o sistema especificado por $\tilde{\mathcal{F}} = \{BBB\}$ com taxa $p/q = 4/5$.

Outro exemplo de construção é detalhado agora para o caso $\eta = 40\%$. Escolhendo

o conjunto $\tilde{\mathcal{F}} = \{\text{BB}, \text{BAAB}\}$, o sistema é simplificado e o seu grafo G é ilustrado na Fig. 68. A entropia é dada por $\tilde{h} = 0,5973$, portanto uma escolha para a taxa do codificador poderia ser $p/q = 4/7$. Entretanto, esta taxa leva a um grafo complexo e com uma grande quantidade de ramos, então outra escolha para simplificar a construção é $p/q = 1/2$. Observe que neste caso ocorre uma redução de entropia maior que nos casos $\eta = 10\%$ e $\eta = 30\%$, entretanto o objetivo é detalhar a construção dos codificadores sem a necessidade de optar pelo codificador que apresenta a melhor taxa. O grafo G^2 é ilustrado na Fig. 69 e sua matriz de adjacência M^2 é

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

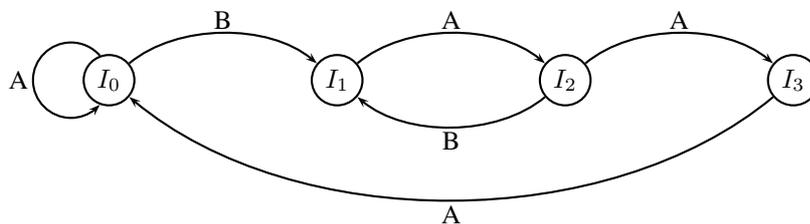
com $(M^2, 2)$ -autovetor aproximado

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Este autovetor aproximado indica que nenhum estado deve ser deletado. Como todos os estados possuem grau de saída maior ou igual a dois, não é necessário fazer divisão de estados. Para que o grafo G^2 apresente grau de saída constante e igual a dois, basta eliminar um ramo do estado I_0 e definir uma rotulação de entrada. Realizando estas etapas, o codificador de estados finitos para o sistema com $\eta = 40\%$ e taxa $p/q = 1/2$ é ilustrado na Fig. 70. A Tabela 3 resume os dados utilizados na construção dos codificadores para os três exemplos detalhados.

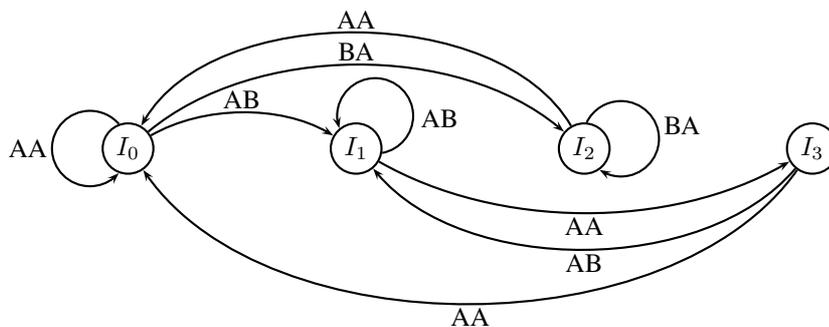
O próximo capítulo apresenta as conclusões e perspectivas para a continuidade do traba-

Figura 68 – Grafo G associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 69 – Grafo G^3 associado ao sistema restrito com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$.



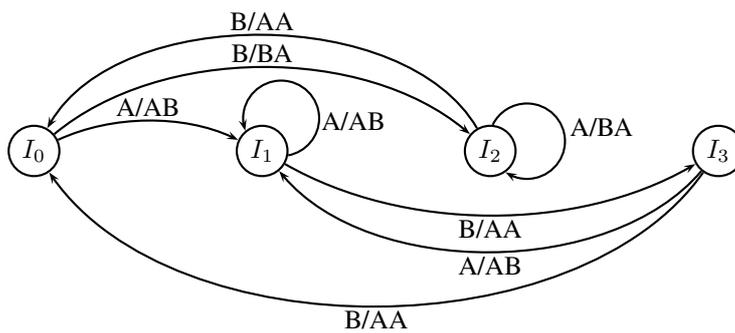
Fonte: O autor, 2018.

Tabela 3 – Entropia do sistema em função do parâmetro de restrição η para os conjuntos \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Também são mostrados os conjuntos de proibições associados ao parâmetro r e a taxa do codificador.

η	h (bits)	\tilde{h} (bits)	p/q	$\tilde{\mathcal{F}}$
10%	0,9038	0,8791	4/5	{BBB}
30%	0,6942	0,6942	2/3	{BB}
40%	0,6557	0,5973	1/2	{BB, BAAB}

Iho realizado nesta tese.

Figura 70 – Codificador de estados finitos para o sistema restrito $\eta = 40\%$ com $\tilde{\mathcal{F}} = \{BB, BAAB\}$ e taxa $p/q = 1/2$.



Fonte: O autor, 2018.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, foram apresentadas propostas de sistemas de comunicação baseados em sistemas dinâmicos caóticos utilizando mapas caóticos unidimensionais e atratores caóticos tridimensionais. No primeiro caso, os sinais caóticos são gerados pelo mapa tanh, que é um mapa caótico unidimensional definido a partir da função tangente hiperbólica e constitui uma contribuição deste trabalho. Foram analisadas as propriedades caóticas do mapa tanh com métricas bem estabelecidas, como o expoente de Lyapunov e o diagrama de órbitas, e foram propostas duas novas métricas para estudar a estrutura local da dinâmica caótica do mapa, a taxa de espalhamento e o fator de contração, duas contribuições deste trabalho. O mapa tanh foi utilizado como um modulador caótico em um canal AWGN e o desempenho do sistema foi estudado, apresentando desempenho superior aos mapas comumente utilizados na literatura, evidenciando que o mapa tanh se mostra uma alternativa viável em sistemas de comunicação baseados em mapas caóticos unidimensionais. Também foi feita uma análise espectral dos sinais caóticos gerados pelo mapa tanh. Para garantir maior possibilidade de formatação do espectro dos sinais caóticos gerados pelo mapa tanh, foi introduzido um novo parâmetro de controle no mapa tanh, definindo o mapa stanh, que generaliza o mapa tanh e possibilita um melhor controle espectral.

Na sequência, foi apresentada uma metodologia para a construção de sistemas de comunicação utilizando sinais caóticos gerados por atratores caóticos tridimensionais. Os procedimentos desenvolvidos nesta metodologia são baseados na associação entre o fluxo caótico gerado pelo atrator e um diagrama de estados. A transmissão é realizada pelo mapeamento de símbolos de informação em segmentos de trajetórias caóticas que conectam regiões obtidas por um particionamento da seção de Poincaré do atrator. Estas regiões são rotuladas por símbolos de um alfabeto, gerando a dinâmica simbólica do fluxo caótico. Foi proposto um

refinamento no particionamento em dois estados, comumente utilizado na literatura, para particionamentos multiníveis em quatro e oito estados. O sistema proposto foi construído com a utilização dos atratores de Rössler e Lorenz, indicando que a diferença de topologia dos atratores implica em mudanças no projeto do sistema. A estrutura do sistema de comunicação proposto é similar aos sistemas de modulação codificada, de tal forma que se infere que a estrutura topológica do espaço de sinais de um sistema de modulação codificada é sensível às características topológicas do espaço. O sistema de comunicação foi simulado em canal AWGN e as sequências de informação transmitidas foram decodificadas com o algoritmo de Viterbi. Visando melhoria de desempenho, foi proposta a introdução de restrições de visitação na seção de Poincaré do atrator, pela definição de sub-regiões proibidas. Estas sub-regiões atuam como um conjunto de regiões de guarda, restringindo a dinâmica do sistema e proporcionando ganho de desempenho. Esta metodologia constitui uma contribuição deste trabalho e, até o conhecimento do autor, não existem sistemas de comunicação equivalentes ou que utilizem os procedimentos descritos nesta abordagem.

Em seguida, foi apresentada uma análise de dinâmica simbólica de atratores caóticos tridimensionais. Constatou-se que os vínculos dinâmicos associados à topologia do atrator impõem restrições nas sequências geradas pela evolução das trajetórias caóticas, implicando na existência de sequências proibidas. Foi apresentado um procedimento de transmissão de símbolos de informação em blocos, com a utilização das sequências naturais do fluxo, com a vantagem de preservação da dinâmica caótica. Para isto, foi introduzido um processo de refinamento da seção de Poincaré no qual rotulam-se as regiões obtidas pelo refinamento pelas sequências características a estas regiões, funcionando com um prefixo para a região. A especificação dos conjuntos de sequências proibidas foi utilizada para a construção de grafos que representam a dinâmica do sistema para uma janela de um determinado compri-

mento. Estudou-se o efeito das restrições de visitação na seção de Poincaré no conjunto de sequências proibidas. Representou-se os grafos por matrizes de adjacência, a partir das quais pode-se calcular a entropia do sistema. Os grafos obtidos foram utilizados para a construção de codificadores que mapeiam sequências sem restrições em sequências restritas definidas pelo conjunto de restrições do sistema.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Para a continuidade deste trabalho, destacamos os seguintes tópicos, que são objetos de estudo associados aos resultados obtidos no trabalho de pesquisa desta tese.

- ▷ Formalização da conexão entre a topologia de atratores caóticos e o projeto de sistemas de comunicação no contexto de modulação codificada para a implementação de sistemas de comunicação digital.
- ▷ Conexão entre métricas de dimensão de atratores caóticos e propriedades estatísticas das sequências geradas pela evolução dinâmica do fluxo caótico.
- ▷ Implementação de um sistema criptográfico baseado na topologia de atratores caóticos, integrando as etapas de modulação, codificação e segurança da informação.
- ▷ Investigação de novas estruturas métricas no projeto dos sistemas de comunicação baseados em atratores caóticos tridimensionais, alternativas à estrutura Euclidiana utilizada nesta tese. Em particular, a investigação de métricas hiperbólicas, associadas a imersões de atratores caóticos em superfícies denominadas g -toros [38].
- ▷ Descrição da dinâmica simbólica gerada pelo fluxo caótico em relação ao fluxo geodésico sobre superfícies hiperbólicas.
- ▷ Aplicação dos códigos geodésicos na construção de códigos para controle de erro nos sistemas de comunicação digital baseados no fluxo caótico.

5.2 PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA

Os trabalhos listados a seguir constituem contribuições resultantes do trabalho de pesquisa realizado nesta tese, tendo sido publicados durante o período de realização desta tese.

5.2.1 Artigos Publicados em Congressos

- ▷ D. Chaves, C. Souza and Cecilio Pimentel, "A new map for chaotic communication", in *International Telecommunication Symposium (ITS 2014)*, August 2014, pp. 1-5.
- ▷ C. Souza, D. Chaves and Cecilio Pimentel, "Análise espectral de um mapa caótico baseado na função tangente hiperbólica", in *XXXIII Brazilian Telecommunications Symposium (SBrT 2015)*, September 2015, pp. 1-5.
- ▷ C. Souza, D. Chaves and Cecilio Pimentel, "Um sistema de comunicação baseado na topologia de atratores caóticos", in *XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2016)*, September 2016, pp. 1-5.
- ▷ C. Souza, D. Chaves and Cecilio Pimentel, "Sistemas de comunicação digital baseados no atrator caótico de Lorenz", in *XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2017)*, September 2017, pp. 1-5.

5.2.2 Artigos Publicados em Periódicos

- ▷ C. Souza, J. Evangelista, D. Chaves and Cecilio Pimentel, "Spectral analysis of a chaotic map based on the hyperbolic tangent function", *JCIS*, vol. 31, pp. 100-107, May 2016.
- ▷ D. Chaves, C. Souza and Cecilio Pimentel, "A Smooth Chaotic Map With Parameterized Shape and Symmetry", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, , pp 122-139, Nov. 2016.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, ser. Studies in Nonlinearity Series. Westview Press, 2001.
- [2] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [3] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [4] G. Kaddoum, “Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey,” *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, May 2016.
- [5] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, “Controlling chaos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 1196–1199, Mar. 1990.
- [6] S. Hayes, C. Grebogi, and E. Ott, “Communicating with chaos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 3031–3034, May 1993.
- [7] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 821–824, Feb. 1990.
- [8] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, NY, 1997.
- [9] T. Yang, C. W. Wu, and L. O. Chua, “Cryptography based on chaotic systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44,

- no. 5, pp. 469–472, May 1997.
- [10] G. Jakimoski and L. Kocarev, “Chaos and cryptography: block encryption ciphers based on chaotic maps,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 2, pp. 163–169, Feb. 2001.
- [11] L. Kocarev and S. Lian, *Chaos-based Cryptography: Theory, Algorithms and Applications*, ser. Studies in Computational Intelligence. Springer, 2011.
- [12] X. Yi, “Hash function based on chaotic tent maps,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 52, no. 6, pp. 354–357, June 2005.
- [13] N. Masuda, G. Jakimoski, K. Aihara, and L. Kocarev, “Chaotic block ciphers: from theory to practical algorithms,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 53, no. 6, pp. 1341–1352, June 2006.
- [14] K. W. Wong, Q. Lin, and J. Chen, “Simultaneous arithmetic coding and encryption using chaotic maps,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 57, no. 2, pp. 146–150, Feb. 2010.
- [15] A. Argyris, E. Pikasis, and D. Syvridis, “Gb/s one-time-pad data encryption with synchronized chaos-based true random bit generators,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 34, no. 22, pp. 5325–5331, Nov. 2016.
- [16] X. wang, X. Zhu, and Y. Zhang, “An image encryption algorithm based on josephus traversing and mixed chaotic map,” *IEEE Access*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, Feb. 2018.
- [17] T. Stojanovski and L. Kocarev, “Chaos-based random number generators-part I: analysis [cryptography],” *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl.*, vol. 48, no. 3, pp. 281–288, Mar. 2001.
- [18] A. Beirami and H. Nejati, “A framework for investigating the performance of chaotic-map truly random number generators,” *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Exp. Briefs*,

- vol. 60, no. 7, pp. 446–450, July 2013.
- [19] J. A. P. de Moraes, D. P. B. Chaves, J. V. de Carvalho Evangelista, and C. Pimentel, “Uma metodologia para geração de sequências aleatórias usando mapas caóticos,” in *XXXIII Brazilian Telecommunications Symposium*, Sept. 2015, pp. 1–5.
- [20] F. Liu and C. K. Wu, “Robust visual cryptography-based watermarking scheme for multiple cover images and multiple owners,” *IET Information Security*, vol. 5, no. 2, pp. 121–128, June 2011.
- [21] P. Stavroulakis, *Chaos Applications in Telecommunications*. Taylor & Francis, 2005.
- [22] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “Wireless communication with chaos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, pp. 184 101–1 – 184 101–5, April 2013.
- [23] G. A. Abib and M. Eisencraft, “On the performance of a digital chaos-based communication system in noisy channels,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 11, pp. 976 – 981, 2015.
- [24] R. T. Fontes and M. Eisencraft, “A digital bandlimited chaos-based communication system,” *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.*, vol. 37, pp. 374 – 385, Aug. 2016.
- [25] H. P. Ren, C. Bai, Q. Kong, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “A chaotic spread spectrum system for underwater acoustic communication,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 478, pp. 77 – 92, July 2017.
- [26] H.-P. Ren, C. Bai, Z.-Z. Huang, and C. Grebogi, “Secure communication based on hyperchaotic Chen system with time-delay,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 05, p. 1750076, May 2017.
- [27] J.-L. Yao, C. Li, H.-P. Ren, and C. Grebogi, “Chaos-based wireless communication resisting multipath effects,” *Phys. Rev. E*, vol. 96, p. 032226, Sept. 2017.

- [28] B. Jovic, "Class of novel broadband chaos-based coherent communication systems," *IET Communications*, vol. 11, no. 12, pp. 1970–1984, Sept. 2017.
- [29] F. Lau and C. Tse, *Chaos-Based Digital Communication Systems*, ser. Engineering on-line library. Springer, 2010.
- [30] A. P. Kurian, S. Puthusserypady, and S. M. Htut, "Performance enhancement of DS/CDMA system using chaotic complex spreading sequence," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 3, pp. 984–989, May 2005.
- [31] Z. Galias and G. M. Maggio, "Quadrature chaos-shift keying: theory and performance analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 48, no. 12, pp. 1510–1519, Dec. 2001.
- [32] H. Yang and G. P. Jiang, "High-efficiency differential-chaos-shift-keying scheme for chaos-based noncoherent communication," *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs*, vol. 59, no. 5, pp. 312–316, May 2012.
- [33] G. Kaddoum, F. D. Richardson, and F. Gagnon, "Design and analysis of a multi-carrier differential chaos shift keying communication system," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 8, pp. 3281–3291, Aug. 2013.
- [34] G. Kaddoum, "Design and performance analysis of a multiuser OFDM based differential chaos shift keying communication system," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 64, no. 1, pp. 249–260, Jan. 2016.
- [35] G. Kaddoum, E. Soujeri, C. Arcila, and K. Eshteiwi, "I-DCSK: An improved noncoherent communication system architecture," *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs*, vol. 62, no. 9, pp. 901–905, Sept. 2015.
- [36] G. Kaddoum, E. Soujeri, and Y. Nijasure, "Design of a short reference noncoherent chaos-based communication systems," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 64, no. 2, pp.

- 680–689, Feb. 2016.
- [37] D. Ruelle and F. Takens, “On the nature of turbulence,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 20, no. 3, pp. 167–192, Sept. 1971.
- [38] R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland*, 2nd ed. Wiley-VCH, 2012.
- [39] D. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [40] S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 73, pp. 747–817, 1967.
- [41] D. Luengo and I. Santamaria, “Secure communications using OFDM with chaotic modulation in the subcarriers,” in *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC 2005-Spring)*, vol. 2, May 2005, pp. 1022–1026.
- [42] G. Kaddoum, M. Vu, and F. Gagnon, “Chaotic symbolic dynamics modulation in MIMO systems,” in *2012 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IS-CAS)*, May 2012, pp. 157–160.
- [43] G. Kaddoum, G. Gagnon, and F. Gagnon, “Spread spectrum communication system with sequence synchronization unit using chaotic symbolic dynamics modulation,” *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol. 23, no. 02, p. 1350019, Dec. 2013.
- [44] G. Kaddoum, F. Gagnon, and D. Couillard, “An enhanced spectral efficiency chaos-based symbolic dynamics transceiver design,” in *International Conference on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS)*, Dec. 2012, pp. 1–6.
- [45] G. D. Forney, “The viterbi algorithm,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268–278, Mar. 1973.
- [46] B. Hao and W. Zheng, *Applied Symbolic Dynamics and Chaos*, ser. Directions in chaos.

- World Scientific, 1998.
- [47] C. Robinson, *Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.
- [48] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [49] A. Beirami, H. Nejati, and Y. Massoud, “A performance metric for discrete-time chaos-based truly random number generators,” in *2008 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Aug. 2008, pp. 133–136.
- [50] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith, “Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes,” *Signal Process.*, vol. 94, no. 0, pp. 149 – 157, 2014.
- [51] B. B. Ali H. Nayfeh, *Applied nonlinear dynamics*, ser. Wiley Series in Nonlinear Science. Wiley-VCH, 1995.
- [52] H. Hentschel and I. Procaccia, “The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors,” *Phys. D: Nonlinear Phenomena*, vol. 8, no. 3, pp. 435 – 444, 1983.
- [53] P. Grassberger, “Generalized dimensions of strange attractors,” *Phys. Lett. A*, vol. 97, no. 6, pp. 227 – 230, 1983.
- [54] J. Guckenheimer, “Noise in chaotic systems,” *Nature*, vol. 298, pp. 358–361, Jul. 1982.
- [55] A. Rényi, “On the dimension and entropy of probability distributions,” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, vol. 10, no. 1, pp. 193–215, 1959.
- [56] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*. Wiley, 2012.
- [57] Y. Wu and S. Verdu, “Rényi information dimension: Fundamental limits of almost lossless analog compression,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 56, no. 8, pp. 3721–3748, Aug. 2010.

- [58] P. Grassberger and I. Procaccia, “Characterization of strange attractors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, pp. 346–349, Jan. 1983.
- [59] M. Eisencraft, D. Kato, and L. Monteiro, “Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map,” *Signal Process.*, vol. 90, no. 1, pp. 385 – 390, 2010.
- [60] M. Eisencraft and D. M. Kato, “Spectral properties of chaotic signals with applications in communications,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 71, no. 12, pp. e2592 – e2599, Dec. 2009.
- [61] R. Gilmore, “Topological analysis of chaotic dynamical systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 1455–1529, Oct. 1998.
- [62] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, ser. Studies in Advanced Mathematics. CRC-Press, 1999.
- [63] H. P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “Uncovering missing symbols in communication with filtered chaotic signals,” *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 22, no. 08, pp. 1 250 199–1 – 1 250 199–11, Aug. 2012.
- [64] K. Pyragas, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Physics Letters A*, vol. 170, no. 6, pp. 421 – 428, Nov. 1992.
- [65] T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, “Using chaos to direct trajectories to targets,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, pp. 3215–3218, Dec. 1990.
- [66] O. Rössler, “An equation for continuous chaos,” *Phys. Lett. A*, vol. 57, no. 5, pp. 397 – 398, Sept. 1976.
- [67] J.-M. Ginoux and C. Letellier, “Flow curvature manifolds for shaping chaotic attractors: I. Rössler-like systems,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 28, pp. 285 101–1 – 285 101–17, 2009.
- [68] C. Pimentel, *Comunicação Digital*. Brasport, 2007.

- [69] T. K. Moon, *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*, 1st ed. Wiley, 2005.
- [70] D. Viswanath, “Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor,” *Nonlinearity*, vol. 16, no. 3, pp. 1035–1056, April 2003.
- [71] M. Crochemore, F. Mignosi, and A. Restivo, “Automata and forbidden words,” *Information Processing Letters*, vol. 67, no. 3, pp. 111 – 117, Aug. 1998.