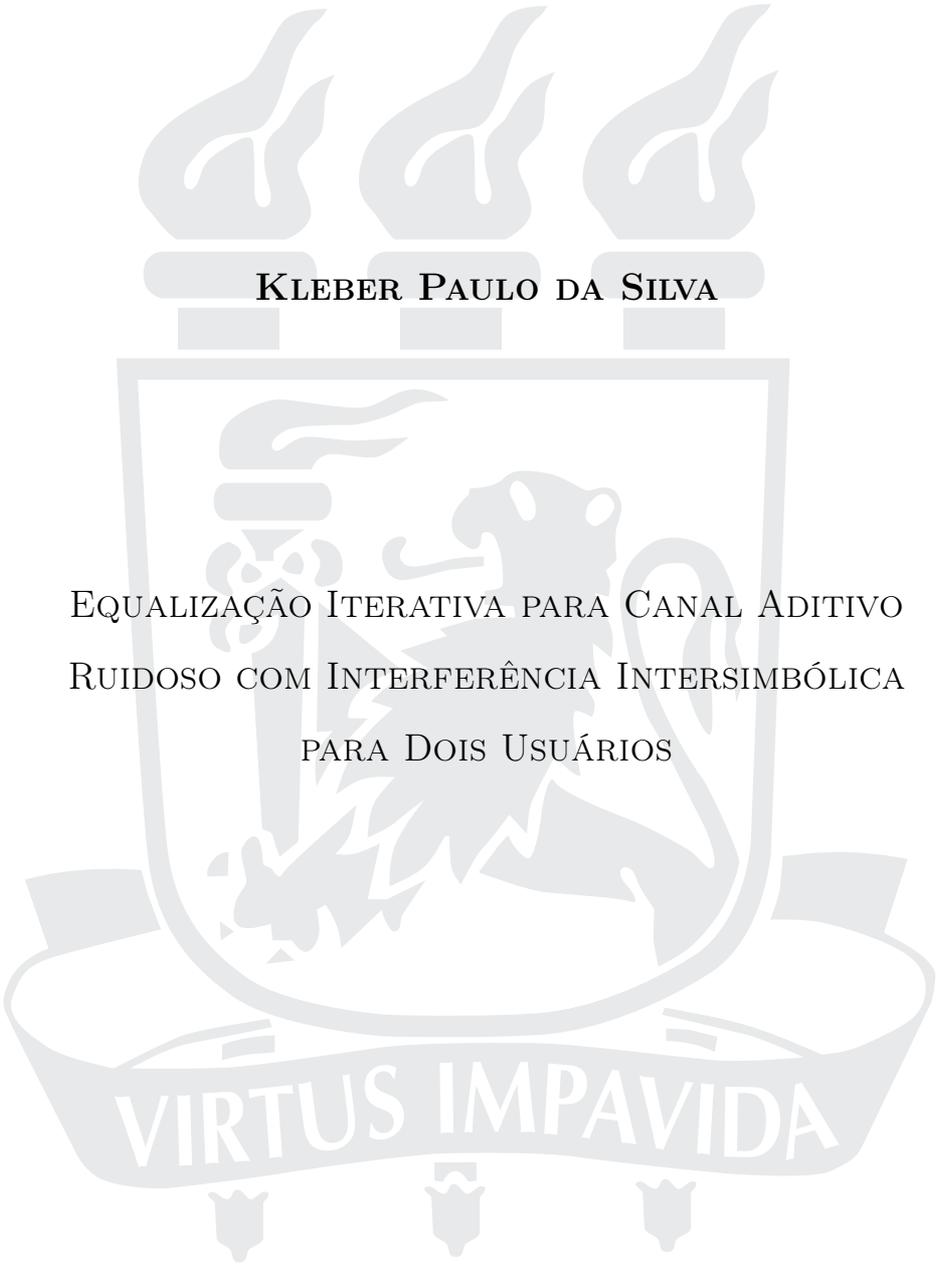


UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



**KLEBER PAULO DA SILVA**

EQUALIZAÇÃO ITERATIVA PARA CANAL ADITIVO  
RUIDOSO COM INTERFERÊNCIA INTERSIMBÓLICA  
PARA DOIS USUÁRIOS

**VIRTUS IMPAVIDA**

RECIFE, 2017.

**KLEBER PAULO DA SILVA**

EQUALIZAÇÃO ITERATIVA PARA CANAL ADITIVO  
RUIDOSO COM INTERFERÊNCIA INTERSIMBÓLICA  
PARA DOIS USUÁRIOS

**Dissertação** submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica**.

Área de Concentração: Comunicações

Linha de Pesquisa: Códigos Corretores de Erros

Orientador: PROF. DR. VALDEMAR  
CARDOSO DA ROCHA JÚNIOR, PH.D.

Recife, 2017.

S586e	<p>Silva, Kleber Paulo da. Equalização iterativa para canal aditivo ruidoso com interferência intersimbólica para dois usuários / Kleber Paulo da Silva. – 2017. 120 folhas, il., gráfs., tabs.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Valdemar Cardoso da Rocha Júnior. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2017. Inclui Referências e Apêndices.</p> <p>1. Engenharia elétrica. 2. Canais de acesso múltiplo. 3. Equalização turbo. 4. Equalização iterativa. 5. Canal binário aditivo. 6. Filtros lineares. 7. Algoritmo SISO. 8. Interferência intersimbólica. I. Rocha Júnior, Valdemar Cardoso da. (Orientador). II. Título.</p> <p style="text-align: right;">UFPE</p> <p>621.3 CDD (22. ed.) <span style="float: right;">BCTG/2017-421</span></p>
-------	---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Kleber Paulo da Silva

**Equalização Iterativa para Canal Aditivo  
Ruidoso com Interferência Intersimbólica para  
Dois Usuários**

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Comunicações, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco’.

Prof. Dr. Marcelo Cabral Cavalcanti  
Coordenador do Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Valdemar Cardoso da Rocha Júnior, Ph.D.  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cecílio José Lins Pimentel  
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Maria de Lourdes Melo Guedes Alcoforado  
Universidade de Pernambuco

18 de Agosto de 2017

A minha querida e paciente esposa.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio diário e por acreditarem no conhecimento como formador de caráter e transformador social. Sem eles, eu seria ninguém.

Agradecimentos especiais a minha esposa Raysa por sempre estar ao meu lado nessa jornada incansável e não medir esforços para ajudar. A ela forneço todo meu amor e carinho. Seus sábios conselhos sempre iluminam a nossa trajetória.

Agradeço imensamente ao professor Valdemar Cardoso da Rocha Jr. pela compreensão e suporte. Suas orientações foram essenciais ao projeto e renderam conhecimentos imensuráveis. Agradeço também ao professor Márcio por confiar no aluno Kleber e encorajá-lo num caminho sem volta. O amigo Kleber agradece de coração.

Por fim, ofereço minha gratidão a todos os professores do PPGEE, em especial, Cecílio Pimentel e Juliano Bandeira pela assistência fornecida durante a minha permanência em suas disciplinas.

Meu obrigado a todos.

KLEBER PAULO DA SILVA

*Universidade Federal de Pernambuco*

*18 de Agosto de 2017*

## RESUMO

ESTA dissertação avalia algoritmos de equalização iterativa (ou equalização turbo) em sistemas de comunicação, para emprego em canais de acesso múltiplo. Tais canais permitem o acesso simultâneo a mais de um usuário, tendo como saída do canal uma combinação dos sinais transmitidos pelos usuários. Em particular, é dada ênfase ao caso em que dois usuários binários transmitem simultaneamente em um canal aditivo (2-BAC) em presença de ruído aditivo gaussiano branco e interferência intersimbólica (ISI) para um único receptor, denotado canal aditivo binário ruidoso com ISI. A codificação é baseada na concatenação serial de um codificador convolucional com um entrelaçador e um modulador. A recepção é dividida em duas etapas, equalização e decodificação, em um processo iterativo de troca de informação suave. O receptor utiliza a estrutura em série de um equalizador e um módulo com entrada e saída suave, denotado módulo SISO, ambos propostos para a aplicação em canais aditivos de acesso múltiplo, em um processo de decodificação iterativa e colaborativa. São apresentados algoritmos para o equalizador e o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades *a posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos usuários que dividem o canal, permitindo uma decodificação conjunta das mensagens transmitidas pelos usuários. Para a equalização iterativa são apresentados três novos algoritmos a saber SISO-2BAC, A-SISO-2BAC e MMSE-2BAC. Os sistemas propostos são implementados, por meio de simulação em computador, com codificadores e decodificadores para o 2-BAC ruidoso com ISI. São apresentadas curvas de taxa de erro de bit versus relação sinal ruído para análise dos sistemas.

**Palavras-chave:** Canais de acesso múltiplo. Equalização turbo. Equalização iterativa. Canal binário aditivo. Interferência intersimbólica.

## ABSTRACT

THIS dissertation evaluates algorithms of iterative equalization (or turbo equalization) in communication systems, for use in multiple access channels. Such channels allow simultaneous access to more than one user, having as output a combination of the signals transmitted by the users. In particular, it emphasizes the cases where two binary users transmit simultaneously in an additive channel (2-BAC) in presence of additive white Gaussian noise (AWGN) and intersymbolic interference (ISI) to a single receiver, denoted noisy binary additive channel with ISI. The encoding is based on the serial concatenation of a convolutional encoder with an interleaver and a modulator. The reception is divided into two stages, equalization and decoding, in an iterative process of soft information exchange. The receiver uses the serial structure of an equalizer and a module with soft input and soft output, denoted SISO module, both proposed for the application in multiple access additive channels, in an iterative and collaborative decoding process. Equalizer and SISO algorithms are presented in order to continually update the a posteriori joint probabilities of the input and output symbols of the users, allowing a joint decoding of the messages transmitted by the users. For the iterative equalization, three new algorithms are presented namely SISO-2BAC, A-SISO-2BAC and MMSE-2BAC. The proposed systems are implemented by computer simulation with encoders and decoders for noisy 2-BAC with ISI. Bit error rate versus signal-to-noise ratio curves are presented for systems analysis.

**Keywords:** Multiple-access channel. Turbo equalization. Iterative equalization. Binary adder channel. Intersymbol interference.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Diagrama de transição para o canal aditivo sem ruído com dois usuários binários.	21
1.2	Diagrama de transição para o canal aditivo ruidoso com dois usuários binários.	22
2.1	Sistema de comunicação proposto.	26
2.2	Bloco transmissor para o sistema de comunicação proposto na Seção 2.1.	26
2.3	Codificador convolucional FIR não sistemático dado pelo Exemplo 2.1.	27
2.4	Filtro FIR equivalente ao canal apresentado no Exemplo 2.2.	29
2.5	Um ramo $e$ da seção de treliça.	33
2.6	Seção de treliça referente ao codificador convolucional apresentado no Exemplo 2.3.	33
2.7	Seção de treliça para o canal apresentado no Exemplo 2.2.	41
2.8	Módulo SISO.	46
2.9	Módulo Equalizador.	47
2.10	Equalização Iterativa.	47
3.1	Sistema de comunicação proposto para o canal binário aditivo ruidoso com ISI para 2 usuários.	50
3.2	Blocos transmissores dos usuários 1 e 2 propostos para o sistema de comunicação com acesso múltiplo dado pela Seção 3.1.	51
3.3	Ramos $e_1$ e $e_2$ das seções de treliça para os usuários 1 e 2, nessa ordem.	56
3.4	Seção de treliça individual para os usuários 1 e 2 para o canal apresentado no Exemplo 3.1.	69
3.5	Seção de treliça conjunta para o canal apresentado no Exemplo 3.1.	70
3.6	Equalização Iterativa para o 2-BAC.	83
4.1	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem acesso múltiplo - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 1.	88
4.2	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem acesso múltiplo - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 2.	88
4.3	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 1.	89
4.4	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 2.	90
4.5	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem MAC - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 1.	91

4.6	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem MAC - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 2. . . . .	92
4.7	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 1. . . . .	92
4.8	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 2. . . . .	93
C.1	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	109
C.2	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	109
C.3	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	110
C.4	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	110
C.5	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	111
C.6	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	111
C.7	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	112
C.8	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	113
C.9	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	113
C.10	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	114
C.11	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 1 - taxa de código 1/2. . . . .	114
C.12	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 2 - taxa de código 1/2. . . . .	115
C.13	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/3. . . . .	115
C.14	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/3. . . . .	116
C.15	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/3. . . . .	116

C.16	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/3. . . . .	117
C.17	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/3. . . . .	117
C.18	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/3. . . . .	118
C.19	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/3. . . . .	118
C.20	Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/3. . . . .	119

## LISTA DE TABELAS

2.1	Algoritmo SISO. . . . .	37
2.2	Algoritmo A-SISO. . . . .	39
2.3	Algoritmo MMSE. . . . .	45
2.4	Equalização Iterativa. . . . .	48
3.1	Algoritmo SISO-2BAC. . . . .	64
3.2	Algoritmo A-SISO-2BAC. . . . .	66
3.3	Algoritmo MMSE-2BAC. . . . .	78
3.4	Algoritmo RMMSE-2BAC. . . . .	81
3.5	Equalização Iterativa para o 2-BAC. . . . .	84
4.1	Canais com ISI simulados. . . . .	85
4.2	Matrizes geradoras - Canal A. . . . .	86
4.3	Matrizes geradoras - Canal B . . . . .	86

## LISTA DE ABREVIATURAS

A seguir são apresentadas em ordem alfabética as abreviaturas utilizadas na dissertação.

<b>Abreviação</b>	<b>Definição</b>
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise.</i>
BAC	<i>Binary Adder Channel.</i>
BCJR	Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv.
BER	<i>Bit Error Rate.</i>
BPSK	<i>Binary Phase Shift Keying</i>
EXIT	<i>Extrinsic Information Transfer.</i>
CCMA	<i>Collaborative Coding Multiple-Access.</i>
CDMA	<i>Code Division Multiple-Access.</i>
DFE	<i>Decision Feedback Equalizer.</i>
FDMA	<i>Frequency Division Multiple-Access.</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response.</i>
IDMA	<i>Interleave Division Multiple-Access.</i>
IID	<i>Independent and Identically Distributed.</i>
ISI	<i>Intersymbol Interference.</i>
LDPC	<i>Low-Density Parity-Check.</i>
LLR	<i>Log-Likelihood Ratio.</i>
LTE	<i>Long Term Evolution.</i>
MAC	<i>Multiple-Access Channel.</i>

<b>Abreviação</b>	<b>Definição.</b>
MAP	<i>Maximum A Posteriori.</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output.</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error.</i>
OFDMA	<i>Orthogonal Frequency Division Multiple-Access.</i>
PDF	<i>Probability Density Function.</i>
RMMSE	<i>Recursive Minimum Mean Square Error.</i>
SISO	<i>Soft-Input Soft-Output.</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio.</i>
SOVA	<i>Soft Output Viterbi Algorithm.</i>
TCM	<i>Trellis Coded Modulation.</i>
TDMA	<i>Time Division Multiple-Access.</i>
UMTS	<i>Universal Mobile Telecommunications System.</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

A seguir são apresentadas notações e símbolos utilizados na dissertação.

$R$	Taxa assintótica de codificação.
$M$	Número de elementos de memória de codificador convolucional.
$M_1$	Número de elementos de memória de codificador convolucional referente ao usuário 1.
$M_2$	Número de elementos de memória de codificador convolucional referente ao usuário 2.
$M_c$	Número de elementos de memória de um canal com ISI.
$p, q$	Probabilidades de transição entre estados em um canal aditivo ruidoso.
$T$	Duração de um símbolo de informação.
$\mathbf{u}$	Sequência de entrada binária representada pelo vetor coluna de dimensão.
$\mathbf{u}_1$	Sequência de entrada binária representada pelo vetor coluna de dimensão $K \times 1$ , referente ao usuário 1.
$\mathbf{u}_2$	Sequência de entrada binária representada pelo vetor coluna de dimensão $K \times 1$ , referente ao usuário 2.
$\mathbf{c}$	Sequência código binária representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ .
$\mathbf{c}_1$	Sequência código binária representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 1.
$\mathbf{c}_2$	Sequência código binária representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 2.
$\mathbf{t}$	Sequência código binária entrelaçada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ .
$\mathbf{t}_1$	Sequência código binária entrelaçada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 1.
$\mathbf{t}_2$	Sequência código binária entrelaçada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 2.
$\mathbf{x}$	Sequência código binária modulada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ .

$\mathbf{x}_1$	Sequência código binária modulada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 1.
$\mathbf{x}_2$	Sequência código binária modulada representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ , referente ao usuário 1.
$\mathbf{z}$	Sequência de saída de um canal ruidoso com ISI representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ .
$\mathbf{g}$	Sequência de ruído representada pelo vetor coluna de dimensão $N \times 1$ .
$\mathbf{G}$	Matriz geradora de um codificador convolucional.
$\mathbf{H}$	Matriz do canal com ISI.
$k$	$k$ -ésimo instante de tempo.
$u_k$	$k$ -ésimo componente da sequência de entrada binária.
$u_{1,k}$	$k$ -ésimo componente da sequência de entrada binária, referente ao usuário 1.
$u_{2,k}$	$k$ -ésimo componente da sequência de entrada binária, referente ao usuário 2.
$c_n$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária.
$c_{1,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária, referente ao usuário 1.
$c_{2,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária, referente ao usuário 2.
$t_n$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária entrelaçada.
$t_{1,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária entrelaçada, referente ao usuário 1.
$t_{2,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária entrelaçada, referente ao usuário 2.
$x_n$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária modulada.
$x_{1,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária modulada, referente ao usuário 1.
$x_{2,n}$	$n$ -ésimo componente da sequência código binária modulada, referente ao usuário 2.
$g_n$	$n$ -ésimo componente de ruído.
$h_n$	$n$ -ésimo componente da matriz do canal com ISI.
$s_k$	$k$ -ésimo componente de um conjunto de estados de uma treliça.
$\hat{x}_n$	Estimativa do $n$ -ésimo componente do vetor coluna $u$ .
$\mathcal{U}$	Dicionário referente aos símbolos de informação.
$\mathcal{U}_1$	Dicionário referente aos símbolos de informação do usuário 1.
$\mathcal{U}_2$	Dicionário referente aos símbolos de informação do usuário 2.
$\mathcal{C}$	Dicionário referente às sequências código.

$Q$	Dimensão do conjunto de estados $\mathcal{S}$ .
$\mathcal{S}$	Conjunto de estados de uma treliça de dimensão $Q$ .
$Q_1$	Dimensão do conjunto de estados $\mathcal{S}_1$ , para o usuário 1.
$Q_2$	Dimensão do conjunto de estados $\mathcal{S}_2$ , para o usuário 2.
$\mathcal{S}_1$	Conjunto de estados de uma treliça de dimensão $Q_1$ , referente ao usuário 1.
$\mathcal{S}_2$	Conjunto de estados de uma treliça de dimensão $Q_2$ , referente ao usuário 2.
$\mathcal{E}$	Produto cartesiano entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{U}$ , conjunto de <i>edges</i> de uma treliça.
$\mathcal{E}_1$	Produto cartesiano entre $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{U}_1$ , conjunto de <i>edges</i> de uma treliça, referente ao usuário 1.
$\mathcal{E}_2$	Produto cartesiano entre $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{U}_2$ , conjunto de <i>edges</i> de uma treliça, referente ao usuário 2.
$\mathcal{X}$	Constelação de sinais BPSK.
$\Lambda(u)$	Razão de log-verossimilhança <i>a priori</i> acerca do símbolo de informação.
$\Lambda(u_1, u_2)$	Razão de log-verossimilhança conjunta <i>a priori</i> acerca dos símbolos de informação.
$\Lambda(u \mathbf{z})$	Razão de log-verossimilhança <i>a posteriori</i> acerca do símbolo de informação.
$\Lambda(u_1, u_2 \mathbf{z})$	Razão de log-verossimilhança conjunta <i>a posteriori</i> acerca dos símbolos de informação.
$s^S(e)$	Estado inicial de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> .
$s^S(e_1)$	Estado inicial de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> , referente ao usuário 1.
$s^S(e_2)$	Estado inicial de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> , referente ao usuário 2.
$s^E(e)$	Estado final de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> .
$s^E(e_1)$	Estado final de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> , referente ao usuário 1.
$s^E(e_2)$	Estado final de uma seção de treliça em função da <i>edge</i> , referente ao usuário 2.
$\mathbf{P}(\mathbf{u}; I)$	Distribuição de probabilidade extrínseca da sequência de entrada acerca dos símbolos de informação, representada pelo vetor coluna de dimensão $K$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; I)$	Distribuição de probabilidade conjunta extrínseca da sequência de entrada acerca dos símbolos de informação, representada pelo vetor coluna de dimensão $K$ .

$\mathbf{P}(\mathbf{c}; I)$	Distribuição de probabilidade extrínseca da sequência de entrada acerca das sequências código, representada pelo vetor coluna de dimensão $N$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$	Distribuição de probabilidade conjunta extrínseca da sequência de entrada acerca das sequências código, representada pelo vetor coluna de dimensão $N$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{u}; O)$	Distribuição de probabilidade extrínseca da sequência de saída acerca dos símbolos de informação, representada pelo vetor coluna de dimensão $K$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; O)$	Distribuição de probabilidade conjunta extrínseca da sequência de saída acerca dos símbolos de informação, representada pelo vetor coluna de dimensão $K$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{c}; O)$	Distribuição de probabilidade extrínseca da sequência de saída acerca das sequências código, representada pelo vetor coluna de dimensão $N$ .
$\mathbf{P}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$	Distribuição de probabilidade conjunta extrínseca da sequência de saída acerca das sequências código, representada pelo vetor coluna de dimensão $N$ .
$\bar{x}_n$	$n$ -ésimo componente do vetor coluna média.
$v_n$	$n$ -ésimo componente do vetor coluna variância.
$\mathbf{V}_n$	Matriz diagonal variância avaliada dentro da janela de observação $W$ .
$W$	Janela de observação.
$W_1$	Parcela não causal da janela de observação.
$W_2$	Parcela causal da janela de observação.
$\mathbf{H}_n$	Matriz do canal avaliada dentro da janela de observação de dimensão $W \times (W + M_c)$ .
$E\{\cdot\}$	Operador valor esperado.
$cov\{\cdot\}$	Operador covariância.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos . . . . .	22
1.2	Organização Textual . . . . .	23
<b>2</b>	<b>EQUALIZAÇÃO ITERATIVA</b>	<b>25</b>
2.1	Modelo do Sistema de Comunicação . . . . .	25
2.2	Algoritmo SISO . . . . .	31
2.2.1	<b>Algoritmo SISO para o módulo Equalizador</b> . . . . .	38
2.3	Algoritmo MMSE . . . . .	40
2.4	Equalização Iterativa . . . . .	45
<b>3</b>	<b>EQUALIZADORES ITERATIVOS PARA O 2-BAC</b>	<b>49</b>
3.1	Canal Binário Aditivo Ruidoso com Interferência Intersimbólica para Dois Usuários	49
3.2	Algoritmo SISO para o 2-BAC . . . . .	54
3.2.1	<b>Algoritmo SISO-2BAC para o módulo Equalizador</b> . . . . .	65
3.3	Algoritmo MMSE para o 2BAC . . . . .	69
3.3.1	<b>Algoritmo Recursivo MMSE para o 2-BAC</b> . . . . .	78
3.4	Equalização Iterativa para o 2-BAC-ISI . . . . .	80
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS</b>	<b>85</b>
4.1	Descrição dos modelos simulados . . . . .	85
4.2	Simulação - Canal A . . . . .	87
4.3	Simulação - Canal B . . . . .	90
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>94</b>
5.1	Considerações Finais . . . . .	94
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	97
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>98</b>
	<b>Apêndice A MMSE - PRÍNCIPIO DA ORTOGONALIDADE</b>	<b>104</b>
	<b>Apêndice B LEMA DE INVERSÃO DE MATRIZES</b>	<b>106</b>
	<b>Apêndice C GRÁFICOS ADICIONAIS</b>	<b>107</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A principal tarefa de um sistema de comunicações é transmitir e receber informação. Devido aos fatores intrínsecos e extrínsecos condicionados ao meio de transmissão, a mensagem transmitida sofre perturbações que a degrada e, sendo assim, compromete o desempenho do sistema de comunicação. Com o uso de códigos corretores de erro e/ou técnicas de codificação de fonte, é conferido ao sistema de comunicação uma maior imunidade ao ruído.

Alguns canais seletivos em frequência e com múltiplos percursos podem causar interferência intersimbólica (ISI, *Intersymbol Interference*), nome dado à distorção causada pela superposição entre sinais adjacentes [1, p.3]. Na tentativa de reduzir a ISI, utiliza-se um equalizador, o qual tem papel fundamental na decodificação dos dados emitidos através do canal. A abordagem mais frequente no projeto de um equalizador consiste num filtro linear com resposta ao impulso finita, (FIR, *Finite Impulse Response*). Os coeficientes de tal filtro, variantes no tempo ou não, podem ser otimizados por diversos critérios, como forçar a zero, (ZF, *Zero Forcing*), mínimo erro quadrático médio (MMSE, *Minimum Mean Square Error*) [2]. Em alguns casos, como a equalização cega, a redução da ISI se dá sem conhecimento prévio do canal [3] ou de forma adaptativa [4, 5].

Em 1948, Shannon introduziu o conceito de capacidade de canal, um limite superior para a taxa máxima com a qual dados podem ser transmitidos através de um dado canal ruidoso, com probabilidade de erro arbitrariamente pequena na recepção [6]. Caso ultrapassado esse limite, não existe qualquer codificação capaz de obter probabilidades de erro tão pequenas quanto se queira. Como uma extensão do conceito de Shannon, através da expansão de Karhunen-Loève, um canal ruidoso com ISI pode ser decomposto em diversos canais paralelos sem memória e independentes [7]. Portanto, com algumas restrições, também é possível determinar a capacidade de canais com interferência intersimbólica.

Desse modo, atingir a capacidade de canal tem sido o principal objeto de estudo de algumas pesquisas [8–10]. Nesse sentido, em 1993, os códigos turbo [11] alcançaram resultados bastante

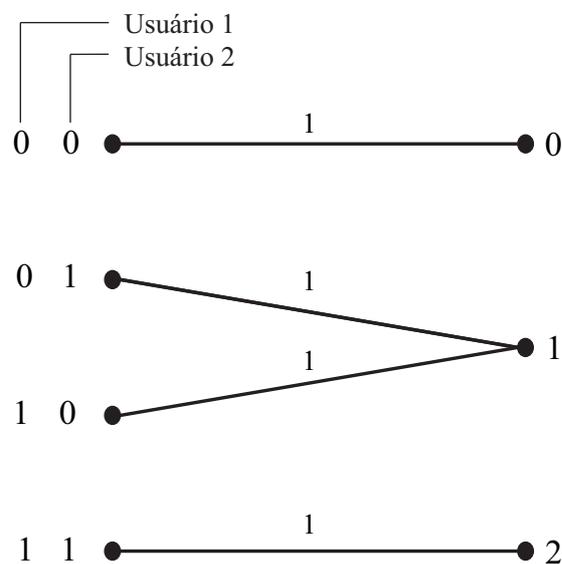
próximos ao limite estabelecido por Shannon, obtendo aplicabilidades práticas em padrões de comunicações móveis como UMTS (*Universal Mobile Telecommunications System*) [12] e LTE (*Long Term Evolution*) [13]. A estrutura de decodificação emprega dois decodificadores que trocam informações suaves entre si - informação extrínseca -, diminuindo a incerteza sobre os bits transmitidos a cada iteração. Cada decodificador faz uso de uma versão modificada do algoritmo BCJR [14], um algoritmo MAP (*Maximum A Posteriori*) que maximiza a probabilidade *a posteriori* por símbolo emitido, tendo a fonte de informação modelada como uma cadeia de Markov [14]. Uma versão mais versátil do BCJR foi apresentada por Benedetto [15], denominada algoritmo SISO (*Soft-Input Soft-Output*).

Baseado no êxito alcançado pelo processo iterativo dos códigos turbo, a equalização turbo [16] modela o canal com ISI segundo uma treliça, permitindo a completa remoção da interferência na presença de ruído gaussiano branco, porém, à custa de maior complexidade computacional. A implementação emprega uma versão modificada do algoritmo de Viterbi [17], o SOVA (*Soft Output Viterbi Algorithm*) [18], responsável pelo suprimento da informação suave, na forma de razões de log-verossimilhança (LLR, *Log-Likelihood Ratio*). Já em [2, 19], são apresentados equalizadores turbo baseados no algoritmo BCJR e em estimadores lineares sem e com realimentação de decisão (MMSE-DFE, *Decision Feedback Equalizer*). O conceito de equalização turbo tem encontrado aplicações em tecnologias como acesso múltiplo por divisão de código (CDMA, *Code Division Multiple-Access*) [20, 21], em sistemas de comunicações através múltiplos transmissores e receptores (MIMO, *Multiple-Input Multiple-Output*) [22–24], filtro de partículas [25], modulação codificada por treliça (TCM, *Trellis Coded Modulation*) [26–28].

A situação em que vários usuários transmitem através de um mesmo canal, é modelada pelo canal de acesso múltiplo (MAC, *Multiple-Access Channel*) [29]. Esses canais foram estudados inicialmente por Shannon, em 1961 [30, 31]. Técnicas como FDMA (*Frequency Division Multiple Access*), TDMA (*Time Division Multiple Access*) e CDMA [1] são alguns exemplos que exploram canais desse tipo. Em estudos mais recentes, tem-se o acesso múltiplo por divisão entrelaçada (IDMA, *Interleave Division Multiple Access*) [32]. Nas técnicas baseadas em CCMA (*Collaborative Coding Multiple-Access*) [33], a transmissão simultânea é tratada sem qualquer divisão no tempo ou na frequência.

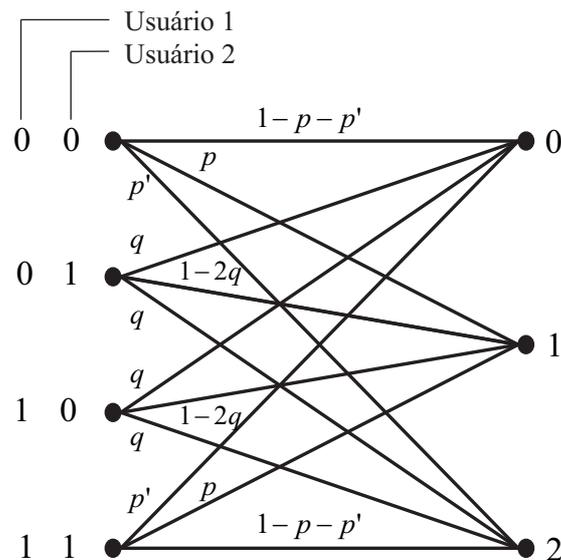
De particular interesse para este trabalho, o canal de acesso múltiplo dado pela adição aritmética das entradas binárias é denominado canal aditivo que, para o caso específico com

dois usuários binários, caracteriza o 2-BAC (*Two-User Binary Adder Channel*). A cada instante de tempo  $k$ , a saída do canal é dada pela adição, símbolo a símbolo, dos usuários 1 e 2, na forma  $u_k = u_{1,k} + u_{2,k}$ , com  $u_{1,k} \in \{0, 1\}$  e  $u_{2,k} \in \{0, 1\}$ . Dessa forma, o alfabeto de saída é dado por  $\{0, 1, 2\}$  [29, 34]. Para esses casos, considera-se que os usuários operam na mesma faixa de frequência e mantêm sincronização dos bits transmitidos. Na Figura 1.1 pode ser visto o diagrama de transição para o caso sem ruído, o qual evidencia ambiguidade para valores distintos na entrada. As linhas representam a probabilidade de transição condicional na forma  $P(u_k | u_{1,k}, u_{2,k})$ . O diagrama de transição para a hipótese com ruído simétrico é visualizada na Figura 1.2. Nota-se que todas as transições são possíveis.



**Figura 1.1:** Diagrama de transição para o canal aditivo sem ruído com dois usuários binários.

Inicialmente, tal comportamento sugere a necessidade de elaboração de códigos que superem a ambiguidade entre usuários ilustrada na Figura 1.1 e a ação do ruído, ilustrada na Figura 1.2. Dessa forma, nas referências [35–38], foi estudada a construção de códigos unicamente decodificáveis para esse tipo de canal. Entretanto, a condição de decodabilidade única em canais de acesso múltiplo é relaxada em [39–41]. Um projeto recente de códigos LDPC (*Low-Density Parity-Check*) pode ser visto em [42]. Em [41, 43], foram apresentados sistemas de comunicação que utilizam codificadores convolucionais concatenados para canais de acesso múltiplo para mais de dois usuários. O receptor utiliza módulos com entradas e saídas suaves, que permitem a decodificação conjunta ou individual das mensagens transmitidas pelos usuários, em um processo iterativo e colaborativo.



**Figura 1.2:** Diagrama de transição para o canal aditivo ruidoso com dois usuários binários.

Em alguns estudos envolvendo a detecção multiusuário em ambientes com interferência intersimbólica, os sinais transmitidos são subdivididos no tempo [44] ou na frequência, como em [45, 46]. Em técnicas que envolvem CCMA, tem-se o espalhamento espectral [21, 47], por exemplo. A ideia é permitir a superposição de vários sinais e, ainda assim, recuperá-los na recepção, mesmo quando há distorção e ruídos.

Neste trabalho, são propostos sistemas de equalização iterativa para o 2-BAC com interferência intersimbólica, baseados em algoritmos MAP e filtros lineares. Os desempenhos são comparados através da taxa de erro de bit (BER, *Bit Error Rate*).

## 1.1 Objetivos

A depender do meio de propagação, os dados enviados ao receptor podem sofrer severas alterações. Alguns canais causam dispersão temporal do sinal transmitido que interferem nos símbolos vizinhos, introduzindo erros na decodificação. Adicionalmente, canais de acesso múltiplo ainda apresentam interferências causadas pela adição de outros usuários. O emprego de equalizadores e códigos corretores de erro são fundamentais para a melhora no desempenho dos sistemas de comunicação, em termos de BER. Logo, a principal meta deste trabalho é desenvolver e avaliar algoritmos de equalização iterativa para canais de acesso múltiplo, com base na proposta, em particular, de um canal aditivo ruidoso para dois usuários binários com interferência intersimbólica, o 2-BAC-ISI.

Nesse contexto, a dissertação abrange os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar breve introdução e estudo dos canais de acesso múltiplo e equalizadores;
2. Descrever um sistema de comunicação com interferência intersimbólica para único usuário;
3. Relatar tópicos relativos aos códigos convolucionais, entrelaçadores e discussão do problema de detecção;
4. Descrever os algoritmos SISO e MMSE e suas aplicações na equalização iterativa;
5. Propor sistema de comunicação com interferência intersimbólica para canais de acesso múltiplo, em específico, o 2-BAC;
6. Propor algoritmos para emprego em equalizadores iterativos para canais de acesso múltiplo com ISI, em específico, SISO-2BAC, A-SISO-2BAC, MMSE-2BAC e RMMSE-2BAC;
7. Realizar simulações computacionais e apresentar discussão dos resultados obtidos, incluindo desempenho dos algoritmos em canais com e sem acesso múltiplo.

## 1.2 Organização Textual

- ▷ **Capítulo 1** - De caráter introdutório, expõe alguns dados históricos referentes ao plano desta dissertação. São descritos alguns tópicos como a capacidade de canal, canais de acesso múltiplo e equalização turbo;
- ▷ **Capítulo 2** - Apresenta o modelo do sistema de comunicação para único usuário e algumas características pertinentes ao problema de detecção, a saber, equalização e decodificação. Aspectos pontuais acerca dos códigos convolucionais e entrelaçadores também são abordados. Os algoritmos SISO, A-SISO e MMSE, bem como, suas aplicações na equalização iterativa são detalhados e expostos na forma de pseudocódigo;
- ▷ **Capítulo 3** - Propõe a estrutura de um sistema de comunicação para o 2-BAC-ISI. São descritos os algoritmos SISO-2BAC e A-SISO-2BAC e seus empregos na equalização iterativa para o canal de acesso múltiplo proposto. Também são desenvolvidos os algoritmos MMSE-2BAC e RMMSE-2BAC como alternativa aos algoritmos MAP;
- ▷ **Capítulo 4** - Apresenta as simulações e resultados realizados para os sistemas discutidos nos capítulos 2 e 3, com o objetivo de confrontar desempenhos em termos de BER. Também

é investigada a interferência aditiva causada pelo acesso de mais um usuário ao canal de transmissão. A análise comparativa tem em consideração o tipo de equalizador usado para canais com ISI conhecidos na literatura;

- ▷ **Capítulo 5** - Apresenta as conclusões do estudo e algumas ponderações acerca das maiores contribuições atingidas nesta dissertação. Alguns temas são sugeridos para continuação do trabalho.

## 2 EQUALIZAÇÃO ITERATIVA

Para um canal de transmissão físico, existem várias limitações que impedem a informação de chegar intacta ao seu destinatário como, por exemplo, restrições na largura de faixa, ruído aditivo, propagação em multipercurso e uso do mesmo canal por outros dispositivos, entre outras. Ou seja, em maior ou menor intensidade, o meio de propagação está suscetível às interferências que degradam o sinal transmitido, o que provoca erros na recepção e compromete o desempenho, no que se refere à probabilidade de erro de bit no processo de decodificação. Nessas circunstâncias, tem-se a figura dos equalizadores [1] e códigos corretores de erro [48] na mitigação de efeitos como distorções e ruídos aditivos.

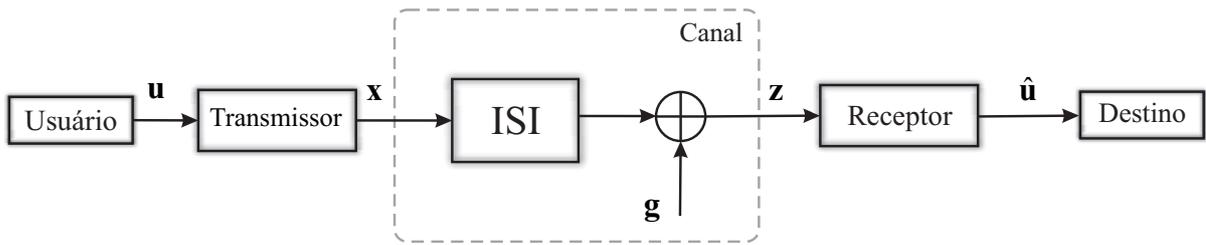
Devido à complexidade computacional relacionada ao processo de recepção ótima, uma abordagem frequente se baseia na divisão desse processo em dois subproblemas, a saber, equalização e decodificação [19], em um processo iterativo de troca de informação suave entre os blocos decodificador e equalizador. Inicialmente apresentado por Douillard [16], essa estratégia é fundamentada na estrutura dos códigos turbo [11].

Neste capítulo, faz-se um estudo dos equalizadores iterativos e dos algoritmos MMSE e SISO, que servem de inspiração à proposta deste trabalho. Questões relacionadas ao sistema de comunicação empregado, codificadores e entrelaçadores são suplementadas ao longo do texto.

### 2.1 Modelo do Sistema de Comunicação

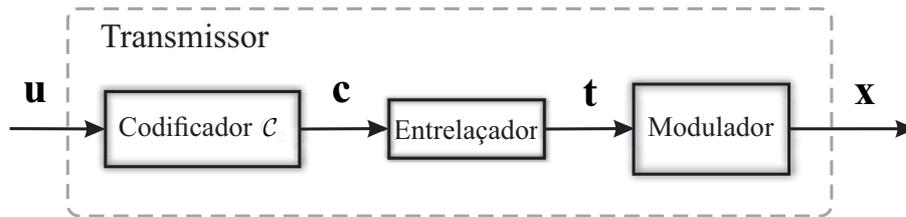
Para o sistema de comunicação proposto na Figura 2.1, algum usuário transmite símbolos binários através de um canal discreto de comunicação com ISI e ruído aditivo. O bloco transmissor tem a função de codificar e modular os dados transmitidos pelo usuário. Já o receptor possui a função de recuperar os dados e enviá-lo ao seu respectivo destino.

De acordo com a Figura 2.2, o bloco transmissor é integrado pelos sub-blocos codificador,



**Figura 2.1:** Sistema de comunicação proposto.

entrelaçador e modulador. A sequência de símbolos transmitidos pelo usuário é codificada com o intuito de superar a degradação gerada pelo canal e, logo após, entrelaçada para descorrelacionar os possíveis erros que serão introduzidos e não resolvidos pelo equalizador [19]. O modulador mapeia os símbolos binários em formas de ondas adequadas para transmissão através de um canal. Depois de realizar a demodulação, o receptor tentará recuperar a mensagem transmitida, com base na estrutura da codificação de canal aplicada e no canal de transmissão.



**Figura 2.2:** Bloco transmissor para o sistema de comunicação proposto na Seção 2.1.

A estrutura utilizada na codificação emprega códigos convolucionais com número de elementos de memória  $M$  e taxa assintótica  $R = k_o/n_o$ , com  $R < 1$ . Os códigos convolucionais produzem sequências código binárias de comprimento  $n_o$  a cada  $k_o$  bits de informação, em operações causais e aditivas módulo 2, que podem ser definidas em termos de matrizes geradoras polinomiais, diagramas de estados ou treliças. Os códigos convolucionais podem ser implementados por intermédio de registradores de deslocamento [48, p.287]. Para ilustrar a operação de codificação, o Exemplo 2.1 é apresentado.

**Exemplo 2.1** Para cada  $u_k$ , com  $k = 1, 2, \dots$ , de acordo com a Figura 2.3, o codificador convolucional não sistemático ou FIR, com matriz geradora  $\mathbf{G}(D) = [1 + D^2 \quad 1 + D + D^2]$ , taxa assintótica  $R = 1/2$  e elementos de memória  $M = 2$ , possui saídas codificadas expressas

pelas seguintes relações causais:

$$c_{2k-1} = u_k \oplus u_{k-2}$$

$$c_{2k} = u_k \oplus u_{k-1} \oplus u_{k-2},$$

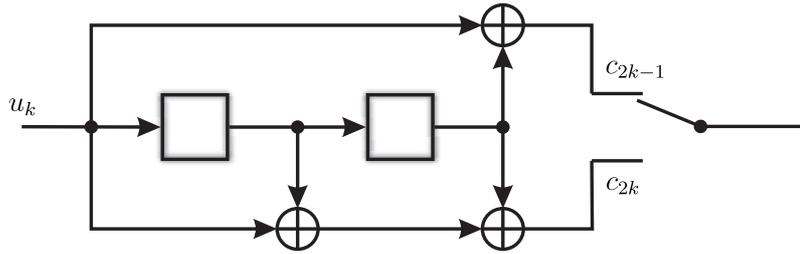
na qual,  $\oplus$  indica a operação soma módulo 2 [48]. Cada bit codificado é multiplexado para compor uma única sequência temporal na forma

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{2k-1} \quad c_{2k} \quad \dots].$$

Supondo que a sequência de entrada  $\mathbf{u} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$  e que o codificador possua todos os registradores preenchidos com zeros, a sequência de saída do decodificador é dada por

$$\mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

◇



**Figura 2.3:** Codificador convolucional FIR não sistemático dado pelo Exemplo 2.1.

Supõe-se que a fonte de informação emite símbolos binários discretos independentes e igualmente prováveis, ou IID (*Independent and Identically Distributed*), representada pelo vetor  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_k, \dots, u_K]$ , com  $u_k \in \mathcal{U} = \{0, 1\}$  e  $1 < k < K$ , gerando uma sequência de  $K$  bits de informação. A sequência de entrada  $\mathbf{u}$  é codificada na forma da sequência código binária  $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_k, \dots, c_K]$ , com  $\mathbf{c}_k = [c_k^{(1)}, \dots, c_k^{(j)}, \dots, c_k^{(n_o)}]$ , em que  $c_k^{(j)} \in \{0, 1\}$ . A sequência código binária  $\mathbf{c}$  pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n, \dots, c_N], \quad (2.1)$$

de comprimento  $N = K \times n_o$ , para  $c_n \in \{0, 1\}$ . Pelo fato do desempenho do algoritmo MMSE ser independente da codificação utilizada, a notação para  $\mathbf{c}$  apresentada em (2.1) é adotada na Seção 2.3. Desse modo, a taxa de codificação também pode ser obtida como  $R = K/N$ . Sem perda de generalidade, é considerado taxas assintóticas na forma  $R = 1/N$ .

Devido ao uso dos entrelaçadores concatenados em série com o codificador convolucional, os possíveis erros em surto gerados pelo canal podem ser convertidos em erros aleatórios, melhorando o desempenho do sistema de comunicação, quando comparado em termos de probabilidade de erro de bit [48, p.441]. Desse modo, blocos da sequência código são permutados de uma forma pseudo-aleatória utilizando alguma função de permutação  $\pi$ , em que  $i \mapsto \pi(i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , gerando o vetor coluna  $\mathbf{t} = [t_1 \ \dots \ t_n \ \dots \ t_N]^T$ , com  $t_n \in \{0, 1\}$ . Consequentemente, a função inversa  $\pi^{-1}$  presente no desentrelaçador deverá retornar os bits em suas posições originais.

Com o objetivo de adequar o código ao meio de propagação, é efetuado um mapeamento das componentes do vetor  $\mathbf{t}$  em alguma constelação de sinais  $\mathcal{X}$  com alguma forma de onda associada com duração  $T$ , para então serem transmitidas. Supondo que a modulação aplicada seja BPSK (*Binary Phase Shift Keying*), então a constelação de sinais é dada por  $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$ , ou seja,  $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n \ \dots \ x_N]^T$ , com  $x_n = 2t_n - 1$ .

A mensagem a ser transmitida pode sofrer alterações como ruídos aditivos e/ou distorções, a depender do meio de propagação empregado. Alguns canais podem causar a dispersão do sinal transmitido para além da duração do símbolo  $T$ , causando uma superposição entre sinais adjacentes e provocando ISI. Por exemplo, canais seletivos em frequência, e com múltiplos percursos produzem ISI [1, p.3]. Em aplicações práticas, é considerado que a interferência atinja um número finito de símbolos.

Para o sistema proposto, o canal discreto com ISI finita será modelado como um cascadeamento do modulador, canal físico invariante no tempo e demodulador. O demodulador é composto por um filtro casado fixo, com taxa de amostragem  $1/T$ , em série com um filtro digital branqueador [49, p.290]. Por consequência, o canal modelado pode ser representado por um filtro linear com FIR, com  $M_c + 1$  coeficientes espaçados pela duração do símbolo  $T$ , em que  $M_c$  é o número de elementos de memória considerados no modelo de canal adotado. Dessa forma, a cada instante de observação  $n$ , as amostras presentes na entrada do decodificador podem ser expressas como

$$z_n = g_n + v_n = g_n + \sum_{l=0}^{M_c} h_l x_{n-l}, \quad n = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

na qual  $h_l$  são os coeficientes da resposta ao impulso do canal simulado, com as amostras IID  $g_n$  modeladas como ruído aditivo gaussiano branco, ou AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), de média zero e variância  $\sigma^2$ , geradas pelo processo de transmissão e filtragem. Supondo a modulação BPSK, a saída do canal  $v_n = \sum_{l=0}^{M_c} h_l x_{n-l}$  assume valores tais que  $v_n \in \mathbb{R}$ .

Reescrevendo a Equação (2.2), a saída do canal  $\mathbf{z}$ , na forma matricial, é dada por

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{g}, \quad (2.3)$$

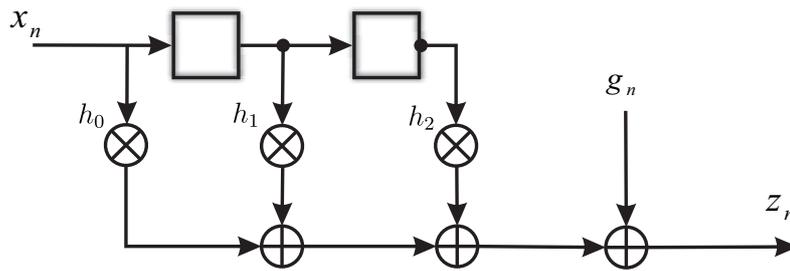
em que  $\mathbf{g} = [g_1 \ \dots \ g_n \ \dots \ g_N]^T$ . A matriz do canal  $\mathbf{H}$  possui diferentes abordagens que dependem de como os símbolos  $x_{-M_c}, \dots, x_{-2}, x_{-1}$  são tratados. Conforme a suposição de terminação [19],  $\mathbf{H}$  tem dimensão  $N \times N$  e  $x_{n-l} = 0$  para  $-M_c \leq n-l \leq -1$ . Para demonstrar esse fato, o Exemplo 2.2 é apresentado.

**Exemplo 2.2** Para o canal com coeficientes de resposta ao impulso  $h_0 = 0,407$ ,  $h_1 = 0,815$  e  $h_2 = 0,407$ ,  $M_c = 2$  e modulação BPSK, a entrada do decodificador dada pelo vetor coluna  $\mathbf{z}$  é escrita na forma

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

de acordo com a suposição de terminação para a matriz  $\mathbf{H}$ , com  $x_n \in \{-1, 1\}$  e  $g_n \in \mathbb{R}$ . O filtro FIR equivalente ao modelo de tempo discreto do canal apresentado é visto na Figura 2.4.

◇



**Figura 2.4:** Filtro FIR equivalente ao canal apresentado no Exemplo 2.2.

Diversas técnicas de decodificação são desenvolvidas e dependem basicamente do tipo de aplicação, do desempenho ou da complexidade computacional do algoritmo proposto. Com base na observação do vetor  $\mathbf{z}$ , o projeto de um algoritmo ótimo que minimize a probabilidade

de erro  $P(u_k \neq \hat{u}_k)$ <sup>1</sup> na decisão, com  $k = 1, 2, \dots, K$ , deverá decidir  $\hat{u}_k$ , para algum  $u_k \in \{0, 1\}$ , que maximize a probabilidade *a posteriori*  $P[U_k = u_k | \mathbf{z}]$  [19], ou seja,

$$\hat{u}_k = \arg \max_{u \in \{0, 1\}} P(U_k = u | \mathbf{z}). \quad (2.5)$$

Algoritmos implementados por (2.5), são ditos MAP. O objetivo do receptor MAP pode ser atingido pela soma marginal de todas as sequências possíveis  $\mathbf{u}$  nas quais  $u_k = u$ , tais que

$$P[U_k = u | \mathbf{z}] = \sum_{\forall \mathbf{u}: u_k = u} P(\mathbf{u} | \mathbf{z}), \quad (2.6)$$

na qual, pela regra de Bayes, tem-se que

$$P[U_k = u | \mathbf{z}] = \sum_{\forall \mathbf{u}: u_k = u} \frac{p(\mathbf{z} | \mathbf{u}) P(\mathbf{u})}{p(\mathbf{z})}. \quad (2.7)$$

Portanto, de acordo com (2.5),

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \arg \max_{u \in \{0, 1\}} \sum_{\forall \mathbf{u}: u_k = u} \frac{p(\mathbf{z} | \mathbf{u}) P(\mathbf{u})}{p(\mathbf{z})} \\ &= \arg \max_{u \in \{0, 1\}} \sum_{\forall \mathbf{u}: u_k = u} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}) P(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

uma vez que,  $p(\mathbf{z})$  é independente de  $u$  e permanece constante para todo  $u$ , não afetando a regra MAP aplicada em (2.8). A probabilidade  $P(\mathbf{u})$  é a informação *a priori* sobre a sequência  $\mathbf{u}$  que pode ser aplicada para detectar  $u_k$ .

A decisão sobre  $\hat{u}_k$  é dada pela escolha mais provável de  $u_k = 0$  ou  $u_k = 1$ . Uma forma conveniente de comparação entre duas variáveis é a LLR, dada na forma

$$\Lambda(u_k) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_k = 1]}{P[U_k = 0]} \right), \quad (2.9)$$

em que  $\ln(\cdot)$  é dado pelo logaritmo natural. Analogamente, para a LLR condicional, dado  $\mathbf{z}$ , escreve-se

$$\tilde{\Lambda}(u_k | \mathbf{z}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_k = 1 | \mathbf{z}]}{P[U_k = 0 | \mathbf{z}]} \right), \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup>No que se segue, será adotada a convenção: " $A$ " denota variáveis aleatórias e " $a$ " suas realizações; " $P(a) = P_A(a)$ ", " $p(b) = p_B(b)$ ", para  $A$  discreto e  $B$  real, denota distribuição de probabilidade e função densidade de probabilidade, respectivamente, com suas distribuições, funções e espaços amostrais definidos implicitamente; " $P[a] = P[A = a]$ " denota probabilidade de ocorrência do evento particular  $A = a$ .

e, por (2.8), tem-se que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}(u_k|\mathbf{z}) &= \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) P(\mathbf{u})}{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) P(\mathbf{u})} \right) \\
&= \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1}^K P(u_i)}{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1}^K P(u_i)} \right) \\
&= \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_i)}{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_i)} \right) + \Lambda(u_k) \\
&= \Lambda(u_k|\mathbf{z}) + \Lambda(u_k),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

devido a suposição de independência entre símbolos  $u_k$  de forma que  $P(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^K P(u_i)$  e

$$\Lambda(u_k|\mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_i)}{\sum_{\forall \mathbf{u}: u_k=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_i)} \right). \tag{2.12}$$

A estimativa  $\tilde{\Lambda}(u_k|\mathbf{z})$  pode ser decomposta em dois termos, ao qual  $\Lambda(u_k|\mathbf{z})$  representa a informação extrínseca sobre  $u_k$  contida em  $\mathbf{z}$ . A LLR *a priori*  $\Lambda(u_k)$  compõe a estimativa  $\tilde{\Lambda}(u_k|\mathbf{z})$  e representa o conhecimento prévio do receptor a respeito do bit de informação, em algum instante de observação  $k$ . Nota-se que, para o caso de distribuição uniforme,  $\Lambda(u_k) = 0$ .

A decisão acerca de  $u_k$  pode ser feita na forma

$$\hat{u}_k = \begin{cases} 1, & \tilde{\Lambda}(u_k|\mathbf{z}) \geq 0; \\ 0, & \tilde{\Lambda}(u_k|\mathbf{z}) < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

De forma geral, o problema na abordagem em (2.8) é a complexidade computacional para  $K$  grande, que ainda inclui a análise do canal de transmissão e entrelaçador, tornando muitas vezes a detecção conjunta inviável. Uma forma de reduzir a carga computacional é dividir a detecção em dois subproblemas, equalização e decodificação. Dessa forma, a influência de cada componente (*e.g.* canal, entrelaçador) pode ser analisada separadamente. Os algoritmos SISO e MMSE são apresentados nas próximas seções, bem como, suas aplicações na equalização iterativa de códigos convolucionais.

## 2.2 Algoritmo SISO

Também MAP, o algoritmo SISO descrito em [50] tem como objetivo estimar as distribuições de probabilidade relacionadas aos bits de informação e sequências código, mediante observações de fontes de informação Markovianas. O algoritmo SISO pode ser

aplicado no módulo Equalizador e no módulo SISO, ambos utilizados na Equalização Iterativa. O algoritmo SISO permite:

- ▷ decodificação contínua quando usada para decodificar códigos convolucionais concatenados, sem exigir a terminação da treliça;
- ▷ aplicação com símbolos M-ários;
- ▷ acomodação de ramos paralelos, isto é, treliças que possuam vários ramos unindo cada par de estados;
- ▷ uso mais versátil em diversas configurações na decodificação iterativa de códigos concatenados seja paralela, série ou híbrida.

A dinâmica que envolve os códigos convolucionais e os canais invariantes no tempo com memória pode ser especificada por uma seção de treliça, que descreve as possíveis transições para os instantes de observação  $k$  e  $k + 1$ , com símbolos de informação e sequências código pertencentes ao alfabeto  $\mathcal{U} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N_I)}\}$ , de dimensão  $N_I$ , e  $\mathcal{C} = \{c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(N_O)}\}$ , de dimensão  $N_O$ , respectivamente. A treliça é caracterizada por:

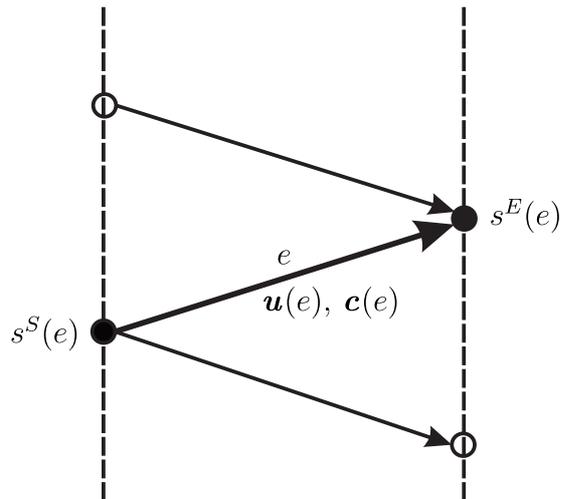
- ▷ um conjunto de  $Q$  estados  $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, \dots, s^Q\}$ . O estado da treliça no instante de observação  $k$  é dado por  $S_k = s$ , com  $s \in \mathcal{S}$ ;
- ▷ um conjunto de  $Q \times N_I$  ramos obtidos na forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \times \mathcal{U} = \{e^1, e^2, \dots, e^{Q \times N_I}\}, \quad (2.14)$$

que representa todas as possíveis transições entre os estados da treliça.

Considerando a seção de treliça apresentada na Figura 2.5, as funções  $s^S(e)$ ,  $s^E(e)$ ,  $u(e)$  e  $c(e)$  estão associadas a cada ramo  $e \in \mathcal{E}$ , as quais representam o estado inicial, o estado final, o símbolo de entrada ou de informação e o símbolo de saída ou sequência código, nessa ordem.

**Exemplo 2.3** *Supondo o codificador apresentado no Exemplo 2.1, na Figura 2.6 pode ser visualizada a representação na forma de seção de treliça do codificador convolucional apresentado. Cada ramo indica a entrada e saída na forma  $u_k/c_{2k-1}c_{2k}$ . As entradas são dadas por  $\mathcal{U} = \{0, 1\}$ . As linhas contínuas representam a entrada  $u_k = 0$  e as tracejadas a entrada  $u_k = 1$ . O conjunto de estados da treliça é dado por  $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, s^3, s^4\}$ , em*

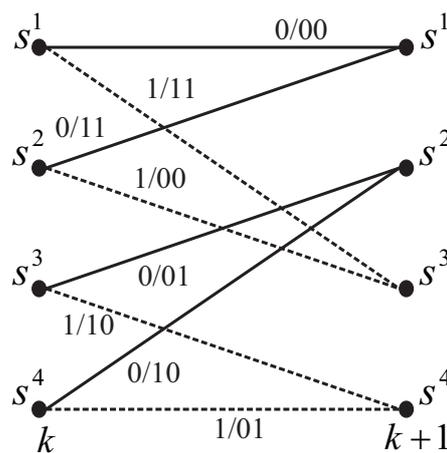


**Figura 2.5:** Um ramo  $e$  da seção de treliça.

que  $s^1 = (0, 0)$ ,  $s^2 = (0, 1)$ ,  $s^3 = (1, 0)$  e  $s^4 = (1, 1)$ . O conjunto de ramos para a seção apresentada é dado por  $\mathcal{E} = \{e^1, \dots, e_l, \dots, e^8\}$ , na forma  $e^l = (u_k, c_k, s^S, s^E)$ , em que

$$\begin{aligned} e^1 &= (0, 00, s^1, s^1); & e^2 &= (1, 11, s^1, s^2); \\ e^3 &= (0, 11, s^2, s^1); & e^4 &= (1, 00, s^2, s^3); \\ e^5 &= (0, 01, s^3, s^2); & e^6 &= (1, 10, s^3, s^4); \\ e^7 &= (0, 10, s^4, s^3); & e^8 &= (1, 01, s^4, s^4). \end{aligned}$$

◇



**Figura 2.6:** Seção de treliça referente ao codificador convolucional apresentado no Exemplo 2.3.

O cálculo da probabilidade *a posteriori* de algum símbolo de informação  $u_k$ , em algum

instante de observação  $k$ , dado o vetor de observação  $\mathbf{z}$ , da forma  $\tilde{P}_k[U_k = u|\mathbf{z}]$ , pode ser calculado pela soma marginal para todos os ramos  $e$  tal que  $u(e) = u$ , portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_k[U_k = u_k|\mathbf{z}] &= \sum_{e:u(e)=u_k} P_k[E_k = e|\mathbf{z}] \\ &= \sum_{e:u(e)=u_k} \frac{P_k[E_k = e, \mathbf{z}]}{p(\mathbf{z})}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Ou seja, é dada por todas as probabilidades conjuntas de ocorrência do ramo  $E_k = e$  em uma treliça e que a sequência de observação é  $\mathbf{z}$ , no instante de observação  $k$ . Esse fato é utilizado pelo algoritmo SISO para estimar informações suaves a respeito dos símbolos de informação e sequências código.

Define-se  $P_k(u_k; I) \triangleq P[U_k = u_k]$ , com  $1 \leq k \leq K$  e  $u \in \{0, 1\}$ , como a distribuição de probabilidade *a priori* extrínseca associada à sequência de símbolos de entrada  $\mathbf{u}$ , a cada instante de observação  $k$ . De forma semelhante, à sequência código  $\mathbf{c}_k$  é associada à distribuição de probabilidade extrínseca de entrada  $P_k(\mathbf{c}_k; I)$ .

O algoritmo SISO possui como entrada  $P_k(u_k; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_k; I)$  e apresenta na saída as distribuições de probabilidade extrínseca  $P_k(u_k; O)$  e  $P_k(\mathbf{c}_k; O)$ , baseadas no conhecimento da treliça utilizada na codificação. As estimativas extrínsecas  $P_k(u_k; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_k; I)$ , informações a serem trocadas entre os módulos Equalizador e Decodificador, podem ser obtidas a partir das distribuições de probabilidade  $\tilde{P}_k(u_k; O)$  e  $\tilde{P}_k(\mathbf{c}_k; O)$ , desse modo, a cada instante de observação  $k$ , tem-se que

$$\tilde{P}_k(u_k; O) = \sum_{e:u(e)=u_k} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]P_k[c(e); I]; \quad (2.16)$$

$$\tilde{P}_k(\mathbf{c}_k; O) = \sum_{e:c(e)=\mathbf{c}_k} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]P_k[c(e); I]. \quad (2.17)$$

Por conveniência de notação, será omitida a dependência temporal de  $U_k$  e  $C_k$ , de forma que  $P_k(u_k; I) = P_k(u; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_k; I) = P_k(\mathbf{c}; I)$ . As métricas recursivas são obtidas na forma

$$A_k(s) = \sum_{e:s^S(e)=s} A_{k-1}[s^S(e)]P_k[u(e); I]P_k[c(e); I]; \quad (2.18)$$

$$B_k(s) = \sum_{e:s^E(e)=s} B_{k+1}[s^E(e)]P_{k+1}[u(e); I]P_{k+1}[c(e); I], \quad (2.19)$$

Com condições iniciais para  $A_k(s)$   $B_k(s)$  dadas por

$$A_0(s) = \begin{cases} 1, & s = S_0; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$B_k(s) = \begin{cases} 1, & s = S_K; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.21)$$

caso sejam conhecidos os estados iniciais e finais resultantes da codificação por treliça aplicada ao bloco de  $K$  bits. Caso seja desconhecido o estado final, a seguinte condição pode ser aplicada:

$$B_k(s) = \frac{1}{Q}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.22)$$

Pelas equações (2.16) e (2.17), nota-se que os termos  $P_k[c(e); I]$  e  $P_k[u(e); I]$  não dependem de um ramo  $e$  definido em seus somatórios, podendo ser extraídos. Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(u; O) &= P_k(u; I) \sum_{e:u(e)=u} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[c(e); I] \\ &= P_k(u; I)P_k(u; O); \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\mathbf{c}; O) &= P_k(\mathbf{c}; I) \sum_{e:c(e)=\mathbf{c}} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I] \\ &= P_k(\mathbf{c}; I)P_k(\mathbf{c}; O), \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que

$$P_k(u; O) = \sum_{e:u(e)=u} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[c(e); I]; \quad (2.25)$$

$$P_k(\mathbf{c}; O) = \sum_{e:c(e)=\mathbf{c}} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]. \quad (2.26)$$

As métricas  $A_k[\cdot]$  e  $B_k[\cdot]$  são obtidas de acordo com as equações (2.18) e (2.19).

As distribuições de probabilidade  $P_k(u; O)$  e  $P_k(\mathbf{c}; O)$  representam as versões atualizadas das distribuições  $P_k(u; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}; I)$ , com base na treliça empregada na codificação, obtidas a partir de todos os símbolos, exceto para  $P_k(u; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}; I)$ . Baseando o algoritmo SISO nas estimativas  $P_k(u; O)$  e  $P_k(\mathbf{c}; O)$  ao contrário de  $\tilde{P}_k(u_k; O)$  e  $\tilde{P}_k(\mathbf{c}_k; O)$  simplifica a estrutura de equalização e decodificação. Os termos  $P_k(u; \cdot)$  e  $P_k(\mathbf{c}; \cdot)$  desempenham o papel da informação extrínseca a ser propagada na Equalização Iterativa, a informação adicionada às distribuições  $P_k(u; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}; I)$ .

Alguns algoritmos MAP não estão em um formato adequado para trabalhar com codificações por treliças mais gerais. A maioria assume apenas símbolos binários, alguns códigos sistemáticos e nenhum - nem mesmo o algoritmo BCJR - consegue lidar com treliças que possuam ramos paralelos, como em alguns casos de modulação codificada por treliça, ou TCM (*Trellis Coded Modulation*) [15]. Como pode ser notado pelos índices presentes nos somatórios que definem o algoritmo SISO, lidar com ramos, ao invés de pares de estados, confere ao algoritmo uma abordagem mais generalizada.

Para cada  $j = 1, \dots, n_o$ , a distribuição atualizada de probabilidade extrínsecas do  $j$ -ésimo bit,  $P_k(c^{(j)}; O)$ , pode ser calculada,  $\forall k$ , na seguinte forma [51]:

$$P_k(c^{(j)}; O) = \sum_{e:c^{(j)}(e)=c^{(j)}} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I], \quad (2.27)$$

com as métricas  $A_k(s)$  e  $B_k(s)$  calculadas pela equações (2.18) e (2.19). Na Equalização Iterativa, serão utilizadas as distribuições em nível de bit  $P_k(u; O)$  e  $P_k(c^{(j)}; O)$  ao invés de  $P_k(\mathbf{c}; O)$ .

As razões de log-verossimilhança extrínsecas binárias  $\Lambda_k(u; O)$  e  $\Lambda_k(c^{(j)}; O)$ , relacionadas aos símbolos de informação e sequências códigos, nessa ordem, são expressas como

$$\Lambda_k(u; O) = \ln \left( \frac{\sum_{e:u(e)=1} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[c(e); I]}{\sum_{e:u(e)=0} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[c(e); I]} \right); \quad (2.28)$$

$$\Lambda_k(c^{(j)}; O) = \ln \left( \frac{\sum_{e:c^{(j)}(e)=1} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]}{\sum_{e:c^{(j)}(e)=0} A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]} \right). \quad (2.29)$$

O algoritmo SISO pode ser visualizado na Tabela 2.1 em formato de pseudocódigo, em nível de bit, supondo terminação de treliça.

Devido a sua característica multiplicativa, o algoritmo SISO pode apresentar instabilidade para valores muito pequenos de  $P_k(u; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}; I)$ , levando à necessidade de normalização para o cálculo das métricas  $A_k(s)$  e  $B_k(s)$  utilizadas no cálculo das razões  $\Lambda_k(u; O)$  e  $\Lambda_k(\mathbf{c}; O)$ , a cada instante  $k$ . Adicionalmente, é possível reduzir a complexidade do algoritmo SISO transformando multiplicações em adições. Aplicando o logaritmo natural nas equações (2.25) e (2.27), tem-se que

$$\ln(P_k(u; O)) = \ln \left( \sum_{e:u(e)=u} \exp \{ \ln (A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[c(e); I]) \} \right); \quad (2.30)$$

$$\ln(P_k(c^{(j)}; O)) = \ln \left( \sum_{e:c^{(j)}(e)=c^{(j)}} \exp \{ \ln (A_{k-1}[s^S(e)]B_k[s^E(e)]P_k[u(e); I]) \} \right). \quad (2.31)$$

**Tabela 2.1:** *Algoritmo SISO.*

<b>ENTRADA</b>
$P_k(u; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
$P_k(\mathbf{c}; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
Conjunto de ramos $\mathcal{E}$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
$A_0(S_0) = 1$ e $A_k(s) = 0$ para $s \neq S_0$ e $k = 1, \dots, K$
$B_k(S_K) = 1$ e $B_k(s) = 0$ para $s \neq S_K$ e $k = 1, \dots, K$
<b>ALGORITMO - SISO</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$A_k(s) = \sum_{e: s^E(e)=s} A_{k-1}[s^S(e)] P_k[u(e); I] P_k[c(e); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = K - 1$ <b>ATÉ</b> $1$ , <b>FAÇA</b>
$B_k(s) = \sum_{e: s^S(e)=s} B_{k+1}[s^E(e)] P_{k+1}[u(e); I] P_{k+1}[c(e); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$P_k(u; O) = \sum_{e: u(e)=u} A_{k-1}[s^S(e)] B_k[s^E(e)] P_k[c(e); I]$
<b>PARA</b> $j = 1$ <b>ATÉ</b> $n_o$ , <b>FAÇA</b>
$P_k(c^{(j)}; O) = \sum_{e: c^{(j)}(e)=c^{(j)}} A_{k-1}[s^S(e)] B_k[s^E(e)] P_k[u(e); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>FIM PARA</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda_k(u; O) = \ln \left( \frac{P_k[u = 1; O]}{P_k[u = 0; O]} \right)$ , para $k = 1, \dots, K$
$\Lambda_k(c^{(j)}; O) = \ln \left( \frac{P_k[c^{(j)} = 1; O]}{P_k[c^{(j)} = 0; O]} \right)$ , para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$

logo,

$$\pi_k(u; O) = \ln \left( \sum_{e: u(e)=u} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \beta_k[s^E(e)] + \pi_k[c(e); I] \} \right); \quad (2.32)$$

$$\pi_k(c^{(j)}; O) = \ln \left( \sum_{e: c^{(j)}(e)=c^{(j)}} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \beta_k[s^E(e)] + \pi_k[u(e); I] \} \right). \quad (2.33)$$

nas quais,

$$\pi_k(\cdot; O) \triangleq \ln (P_k(\cdot; O)); \quad (2.34)$$

$$\pi_k(\cdot; I) \triangleq \ln (P_k(\cdot; I)); \quad (2.35)$$

$$\alpha_k[s^S(e)] \triangleq \ln (A_k[s^S(e)]); \quad (2.36)$$

$$\beta_k[s^E(e)] \triangleq \ln (B_k[s^E(e)]). \quad (2.37)$$

Por consequência, as métricas  $\alpha_k(s)$  e  $\beta_k(s)$  são obtidas de modo que

$$\alpha_k(s) = \ln \left( \sum_{e: s^E(e)=s} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \pi_k[u(e); I] + \pi_k[c(e); I] \} \right); \quad (2.38)$$

$$\beta_k(s) = \ln \left( \sum_{e: s^S(e)=s} \exp \{ \beta_{k+1}[s^E(e)] + \pi_{k+1}[u(e); I] + \pi_{k+1}[c(e); I] \} \right). \quad (2.39)$$

Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \rightarrow -\infty$ , as novas condições iniciais para  $\alpha_k(s)$  e  $\beta_k(s)$  são definidas como

$$\alpha_0(s) = \begin{cases} 0, & s = S_0; \\ -\infty, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\beta_k(s) = \begin{cases} 0, & s = S_K; \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.41)$$

apenas por conveniência de notação.

As razões de log-verossimilhança extrínsecas de saída  $\Lambda_k(u; O)$  e  $\Lambda_k(c^{(j)}; O)$  são expressas como

$$\Lambda_k(u; O) = \pi_k[u = 1; O] - \pi_k[u = 0; O] \quad (2.42)$$

$$\Lambda_k(c^{(j)}; O) = \pi_k[c^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c^{(j)} = 0; O]. \quad (2.43)$$

A versão aditiva do algoritmo SISO, aqui denotada A-SISO, é apresentada na Tabela 2.2 na forma de pseudocódigo. Caso o algoritmo possua nenhum conhecimento *a priori* dos símbolos de informação, admite-se o pior caso  $\Lambda_k(u; I) = 0$ , a cada instante de observação  $k$ , ou seja, todos os símbolos presentes em  $\mathcal{U}$  são equiprováveis.

### 2.2.1 Algoritmo SISO para o módulo Equalizador

Na tentativa de remover a ISI, o algoritmo SISO poderá explorar a estrutura sequencial da treliça do canal, para fornecer informação suave útil acerca da sequência código transmitida ao módulo decodificador SISO. Por sua vez, o decodificador SISO emprega essa informação *a priori* para detectar os símbolos de informação, em uma estrutura subótima iterativa.

Sabendo que o canal com ISI possui taxa  $R = 1$  e, sendo assim,  $K = N$  e  $n_o = 1$ , ver Seção 2.1. Dado que, qualquer caminho através da treliça corresponde a uma sequência temporal de símbolos de entrada e saída, a cada instante de observação  $k$ , a saída do modelo do canal

**Tabela 2.2:** Algoritmo A-SISO.

<b>ENTRADA</b>
$\Lambda_k(u; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
$\Lambda_k(c; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
Conjunto de ramos $\mathcal{E}$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
$\pi_k(u; I) = u \cdot \Lambda_k(u; I) - \ln(1 + \exp(\Lambda_k(u; I)))$ para $k = 1, \dots, K$
$\pi_k(c^{(j)}; I) = c^{(j)} \cdot \Lambda_k(c^{(j)}; I) - \ln(1 + \exp(\Lambda_k(c^{(j)}; I)))$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$
$\alpha_0(S_0) = 0$ e $\alpha_k(s) = -\infty$ para $s \neq S_0$ e $k = 1, \dots, K$
$\beta_k(S_K) = 0$ e $\beta_k(s) = -\infty$ para $s \neq S_K$ e $k = 1, \dots, K$
<b>ALGORITMO - A-SISO</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$\alpha_k(s) = \ln \left( \sum_{e: s^E(e)=s} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \pi_k[u(e); I] + \pi_k[c(e); I] \} \right)$
<b>FIM</b>
<b>PARA</b> $k = K - 1$ <b>ATÉ</b> $1$ , <b>FAÇA</b>
$\beta_k(s) = \ln \left( \sum_{e: s^S(e)=s} \exp \{ \beta_{k+1}[s^E(e)] + \pi_{k+1}[u(e); I] + \pi_{k+1}[c(e); I] \} \right)$
<b>FIM</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$\pi_k(u; O) = \ln \left( \sum_{e: u(e)=u} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \beta_k[s^E(e)] + \pi_k[c(e); I] \} \right)$
<b>PARA</b> $j = 1$ <b>ATÉ</b> $n_o$ , <b>FAÇA</b>
$\pi_k(c^{(j)}; O) = \ln \left( \sum_{e: c^{(j)}(e)=c^{(j)}} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e)] + \beta_k[s^E(e)] + \pi_k[u(e); I] \} \right)$
<b>FIM PARA</b>
<b>FIM PARA</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda_k(u; O) = \pi_k[u = 1; O] - \pi_k[u = 0; O]$ , para $k = 1, \dots, N$
$\Lambda_k(c^{(j)}; O) = \pi_k[c^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c^{(j)} = 0; O]$ , para $k = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, n_o$

ISI sem ruído é obtida na forma

$$v_k(e) = \sum_{l=0}^{M_c} h_l x_{k-l}(e), \quad (2.44)$$

e o algoritmo SISO pode ser aplicado adotando a seguinte relação para  $P_k[c(e); I]$ ,

$$p_k(z|v(e)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{(z_k - v_k(e))^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.45)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído aditivo. Para  $P_k[u(e); I]$ , adota-se a seguinte relação

$$P_k[u(e); I] = P_k[T_k = t(e)], \quad (2.46)$$

com  $z_k$  dado pela Equação (2.2). A constante presente na Equação (2.45) pode ser omitida por não afetar a razão dada pelas equações (2.28) e (2.29). Caso seja aplicado o algoritmo

A-SISO, as estimativas dadas pelas equações (2.45) e (2.46) são dadas na forma

$$\pi_k[c(e); I] = -\frac{(z_k - v_k(e))^2}{2\sigma^2} \quad (2.47)$$

$$\pi_k[u(e); I] = \ln(P_k[T_k = t(e)]). \quad (2.48)$$

Para demonstrar a aplicação do algoritmo SISO no equalizador, bem como, a descrição do canal como treliça, é apresentado o Exemplo 2.4.

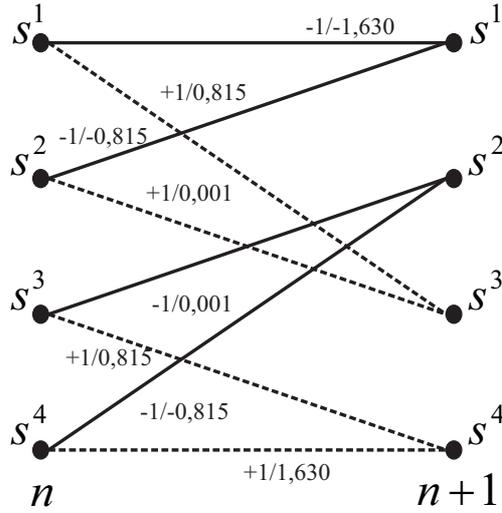
**Exemplo 2.4** Para o canal apresentado no Exemplo 2.2, a seção de treliça do canal para os instantes  $k$  e  $k + 1$  é apresentada na Figura 2.7. As entradas são dadas por  $\mathcal{U} = \{-1, +1\}$  para modulação BPSK e as saídas pela Equação (2.44). As linhas contínuas representam a entrada  $x_k = -1$  e as tracejadas a entrada  $x_k = +1$ . O conjunto de estados da treliça é dado por  $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, s^3, s^4\}$ , em que  $s^1 = (-1, -1)$ ,  $s^2 = (-1, +1)$ ,  $s^3 = (+1, -1)$  e  $s^4 = (+1, +1)$ . O conjunto de ramos para a seção apresentada é dado por  $\mathcal{E} = \{e^1, \dots, e_l, \dots, e^8\}$ , na forma  $e^l = (x_k, v_k, s^S, s^E)$ , em que

$$\begin{aligned} e^1 &= (-1, -1.630, s^1, s^1); & e^2 &= (+1, +0.815, s^1, s^2); \\ e^3 &= (-1, -0.815, s^2, s^1); & e^4 &= (+1, +0.001, s^2, s^3); \\ e^5 &= (-1, +0.001, s^3, s^2); & e^6 &= (+1, +0.815, s^3, s^4); \\ e^7 &= (-1, -0.815, s^4, s^3); & e^8 &= (+1, +1.630, s^4, s^4). \end{aligned}$$

Caso o módulo Equalizador não possua informação sobre os símbolos transmitidos, considere-se o pior caso, ou seja, todos os símbolos são equiprováveis, portanto, tem-se  $\pi_k[u(e); I] = 0$ , para todo  $k = 1, \dots, K$ . A aplicação do algoritmo SISO no módulo Equalizador, segue como apresentada na Tabela 2.1, com uso das equações (2.45) e (2.46), determinadas a partir de  $\mathbf{z}$ , ou na Tabela 2.2 para o A-SISO, com o uso das equações (2.47) e (2.48), também obtidas a partir de  $\mathbf{z}$ .  $\diamond$

### 2.3 Algoritmo MMSE

Ao aplicar o algoritmo SISO no módulo Equalizador, o custo computacional cresce exponencialmente, em relação ao aumento do número de elementos de memórias no canal [19]. Uma abordagem mais prática, do ponto de vista computacional, se baseia no projeto de um estimador linear ótimo no sentido de minimizar o erro médio quadrático entre o sinal



**Figura 2.7:** Seção de treliça para o canal apresentado no Exemplo 2.2.

transmitido e o estimado para o  $n$ -ésimo símbolo transmitido pela fonte de informação, ou seja,

$$\hat{x}_n = \arg \min_{x_n \in \{+1, -1\}} (E \{(e_n)^2\}), \quad (2.49)$$

em que

$$e_n = x_n - \hat{x}_n. \quad (2.50)$$

Como a aplicação do algoritmo MMSE independe da codificação utilizada, é preferida a notação adotada para  $\mathbf{c}$ , ver a Equação (2.1).

Em acordo com [19], o primeiro passo é integrar a LLR extrínseca de entrada  $\Lambda_n(c_n; I)$  no processo de equalização. Isso é feito pelo mapeamento da LLR extrínseca

$$\Lambda_n(c_n; I) = \Lambda(u) \triangleq \ln \left( \frac{P_n[c_n = 1]}{P_n[c_n = 0]} \right), \quad (2.51)$$

nas probabilidades *a priori*  $P[c_n = 0]$  e  $P[c_n = 1]$  e, em seguida, determinando a média  $\bar{x}_n = E\{x_n\}$  e variância  $v_n = cov\{x_n, x_n\}$ , para  $n = 1, \dots, N$ . Os operadores  $E\{\cdot\}$  e  $cov\{\cdot, \cdot\}$  representam o valor esperado e a covariância, respectivamente. Novamente, será omitida a dependência temporal de  $c_n$  e  $x_n$ , assumindo que  $\Lambda_n(c_n; I) = \Lambda_n(c; I)$ . Considerando a

modulação BPSK, tem-se que

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x P_n[x] = P_n[x = 1] - P_n[x = 0] \\ &= \frac{\exp(\Lambda_n(c; I))}{1 + \exp(\Lambda_n(c; I))} - \frac{1}{1 + \exp(\Lambda_n(c; I))} = \tanh\left(\frac{\Lambda_n(c; I)}{2}\right); \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$v_n = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \bar{x})^2 P_n[x] = 1 - (\bar{x}_n)^2. \quad (2.53)$$

A estimativa  $\hat{x}_n$  é baseada na janela de observação arbitrária da sequência  $\mathbf{z}_n = [z_{n-W_2} \ z_{n-W_2+1} \ \dots \ z_n \ \dots \ z_{n+W_1}]^T$ , de comprimento  $W = W_2 + W_1 + 1$ , sendo  $W_2$  e  $W_1$  parcelas causais e não causais do estimador, respectivamente, com  $1 \leq n \leq N$ . Desse modo, com base em  $\mathbf{H}$ , a matriz do canal de transmissão avaliada dentro da janela de observação possui dimensão  $W \times (W + M_c)$ , portanto,

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Para ilustrar a análise em torno da janela de observação  $W$ , ver Exemplo 2.5

**Exemplo 2.5** Para um canal com  $M_c = 2$  elementos de memória, coeficientes  $h_0 = 0,407$ ,  $h_1 = 0,815$  e  $h_2 = 0,407$ ,  $W_1 = 4$  e  $W_2 = 6$ ,  $\mathbf{z}_n = [z_{n-4} \ \dots \ z_n \ \dots \ z_{n+6}]^T$  é expresso na seguinte forma,

$$\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-6} \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{n-4} \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \\ g_{n+6} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

◇

Devido à suposição de terminação de treliça, será considerado que a variável  $z_n$  é zero se  $n$  estiver fora do intervalo para  $n < 1$  e  $n > N$  [19].

O estimador linear para o  $n$ -ésimo símbolo  $\hat{x}_n$  dado por

$$\hat{x}_n = \mathbf{a}_n^T \mathbf{z}_n + b_n \quad (2.56)$$

é solução ótima para a Equação (2.49), com  $\mathbf{a}_n = [a_{n-W_2} \ a_{n-W_2+1} \ \dots \ a_k \ \dots \ a_{n-W_1}]^T \in \mathbb{R}^W$  e  $b_n \in \mathbb{R}$  escalar. A estimativa de  $x_n$  é reescrita na forma

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + \text{cov}\{x_n, \mathbf{z}_n\} \text{cov}\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\}^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n), \quad (2.57)$$

que, de acordo com o modelo apresentado pela Equação (2.3), é dada por

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + v_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n), \quad (2.58)$$

com  $\bar{\mathbf{x}}_n = [x_{n-M_c-W_2} \ x_{n-M_c-W_2+1} \ \dots \ x_{n+W_1}]^T$  e  $\mathbf{h}_n$  a  $(W_2 + M_c)$ -ésima coluna da submatriz  $\mathbf{H}_n$ . A matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  é expressa como

$$\boldsymbol{\Sigma}_n = \sigma^2 \mathbf{I}_W + \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T, \quad (2.59)$$

na qual,  $\mathbf{I}_W$  representa uma matriz identidade de dimensão  $W \times W$  e  $\mathbf{V}_n$  a matriz diagonal com as variâncias ao longo da diagonal principal, considerando a janela  $W$ , portanto,

$$\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} v_{n-M_c-W_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_{n-M_c-W_2+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{n+W_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_{n+W_1} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Sob a condição de terminação utilizada em  $\mathbf{H}$ , a média  $\bar{x}_n$  e  $v_n$  são zero e um, nessa ordem, para instantes de observação  $n < 1$  e  $n > N$ . Isso equivale afirmar que, nesses instantes de observação, nenhum conhecimento sobre a variável aleatória  $x_n$  está disponível no decodificador, ou seja, são modeladas como independentes e igualmente prováveis no processo de decodificação.

A estimativa  $\hat{x}_n$  depende da LLR  $\Lambda_n(c; I)$  por intermédio de  $\bar{x}_n$  e  $v_n$ , ver Equação (2.52). Para utilização de  $\hat{x}_n$  na decodificação iterativa, é preciso eliminar essa dependência e não realimentar informação redundante nas iterações. Dessa forma, faz-se  $\hat{x}_n = 0$  e  $v_n = 1$  somente durante o cálculo da  $n$ -ésima estimativa, portanto,

$$\hat{x}_n = \mathbf{h}_n^T [\boldsymbol{\Sigma}_n + (1 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T]^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \bar{x}_n \mathbf{h}_n). \quad (2.61)$$

Após aplicação do Lema de Inversão de Matrizes no termo  $[\boldsymbol{\Sigma}_n + (1 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T]^{-1}$  da Equação (2.61), ver Apêndice B, tem-se  $\hat{x}_n$  na forma

$$\hat{x}_n = \frac{\mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n}{1 + (1 - v_n) s_n}, \quad (2.62)$$

em que  $\mathbf{f}_n = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n$  e  $s_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n = \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n$ .

A decisão sobre  $x_n$  com base em  $\hat{x}$  pode ser feita no sentido de minimizar o erro estimado  $e_n = x_n - \hat{x}_n$ . Dado pela Equação (2.50), o erro associado à estimativa  $\hat{x}$  será modelado como uma variável aleatória com PDF  $p(e_n)$  gaussiana. Dessa forma,

$$p_n(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{e_n}} \exp\left(-\frac{(e_n - \bar{e}_n)^2}{2\sigma_{e_n}^2}\right), \quad (2.63)$$

na qual,  $\bar{e}_n$  e  $\sigma_{e_n}$  são a média e a variância do erro estimado, respectivamente.

Aplicando o operador valor esperado  $E\{\cdot\}$  na Equação (2.50) para encontrar a média de  $e_n$ , com as mesmas restrições impostas na Equação (2.61),  $\bar{x}_n = 0$  e  $v_n = 1$ , tem-se que

$$\begin{aligned} E\{e_n\} &= E\{x_n\} - E\{\hat{x}_n\} \\ &= \mathbf{f}_n^T (E\{\mathbf{z}_n\} - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) \\ &= \mathbf{f}_n^T (\mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

De forma análoga, a variância  $\sigma_{e_n}$  é dada por

$$\begin{aligned} cov\{e_n, e_n\} &= E\{e_n^2\} - E^2\{e_n\} \\ &= cov\{x_n, x_n\} - 2cov\{x_n, \hat{x}_n\} + cov\{\hat{x}_n, \hat{x}_n\} \\ &= v_n - 2cov\{x_n, \mathbf{z}_n\} \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_n^T cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\} \mathbf{f}_n \\ &= v_n - 2v_n \mathbf{h}_n^T \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{f}_n \\ &= 1 - \mathbf{h}_n^T (\boldsymbol{\Sigma}_n + (1 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T)^{-1} \mathbf{h}_n, \end{aligned} \quad (2.65)$$

e aplicando o Lema de Inversão de Matrizes na Equação (2.65), tem-se que

$$\begin{aligned} cov\{e_n, e_n\} &= 1 - \frac{\mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n}{1 + (1 - v_n) \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n} \\ &= 1 - \frac{s_n}{1 + (1 - v_n) s_n}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Para calcular a LLR extrínseca  $\Lambda_n(c; O) = \ln \left( \frac{P_n[c = 1 | \mathbf{z}]}{P_n[c = 0 | \mathbf{z}]} \right)$ , é suposto que

$$\begin{aligned} P_n[x | \mathbf{z}] &= P_n[p | \mathbf{z}] \\ &\approx P(e_n | x_n = x), \end{aligned} \quad (2.67)$$

com  $p \in \{0, 1\}$  e  $x \in \{-1, +1\}$ . Consequentemente,  $\Lambda_n(c; O)$  é escrito na forma

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n(c; O) &= \ln \left( \frac{p_n(e|x = +1)}{p_n(e|x = -1)} \right) \\
 &= \ln \left( \frac{\exp(-(\hat{x}_n - 1)^2 / (2\sigma_{e_n}))}{\exp(-(\hat{x}_n + 1)^2 / (2\sigma_{e_n}))} \right) \\
 &= \frac{2\hat{x}_n}{1 - s_n / (1 + (1 - v_n)s_n)} \\
 &= \frac{2[\mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n]}{1 - v_n s_n}. \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

Inicialmente, como o equalizador não possui conhecimento sobre os símbolos transmitidos, estima-se que o conhecimento *a priori* é dado por  $\Lambda_n(c; I) = 0$ , para as condições iniciais do equalizador MMSE. O procedimento acima descrito é denominado algoritmo MMSE e pode ser visualizado na Tabela 2.3 em pseudocódigo, com modulação BPSK.

**Tabela 2.3:** Algoritmo MMSE.

<b>ENTRADA</b>
$\Lambda(c_n; I)$ para $n = 1, \dots, N$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
Calcule $\bar{x}_n = \tanh\left(\frac{\Lambda(c_n; I)}{2}\right)$ e $v_n = 1 - (\bar{x}_n)^2$ para $n = 1, \dots, N$
<b>ALGORITMO - MMSE</b>
<b>PARA</b> $n = 1$ <b>ATÉ</b> $N$ , <b>FAÇA</b>
$\mathbf{f}_n = (\sigma^2 \mathbf{I}_W + \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T)^{-1} \mathbf{h}_n$
$s_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n$
$\Lambda(c_n; O) = \frac{2[\mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n]}{1 - v_n s_n}$
<b>FIM PARA</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda(c_n; O)$ para $n = 1, \dots, N$

## 2.4 Equalização Iterativa

Como discutido na Seção 2.1, um sistema de detecção MAP ótimo se torna inviável a medida que  $K$  cresce. Uma alternativa subótima consiste na divisão do problema em dois, equalização e decodificação, formando um sistema de detecção iterativo inspirado na estrutura dos códigos turbo. Aqui denotado Equalização Iterativa, o sistema consiste na concatenação em série de dois sub-blocos, um equalizador, responsável por tentar eliminar os efeitos do canal com ISI; e um decodificador, que decodifica com base na informação fornecida pelo equalizador e na estrutura do código. Com a realimentação das estimativas *a priori* disponibilizadas pelo

bloco decodificador, o equalizador deverá ser capaz de produzir informações mais confiáveis acerca dos símbolos transmitidos, a cada iteração. Dessa forma, os efeitos do canal e da codificação são avaliados separadamente.

Para o bloco decodificador, é utilizado o módulo SISO, um dispositivo com 2 entradas,

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}; I) = [\Lambda_1(u_1; I), \dots, \Lambda_k(u_k; I), \dots, \Lambda_K(u_K; I)]^T; \quad (2.69)$$

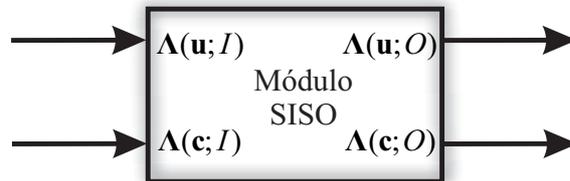
$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}; I) = [\Lambda_1(c_1; I), \dots, \Lambda_n(c_n; I), \dots, \Lambda_N(c_N; I)]^T, \quad (2.70)$$

e 2 saídas,

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}; O) = [\Lambda_1(u_1; O), \dots, \Lambda_k(u_k; O), \dots, \Lambda_K(u_K; O)]^T; \quad (2.71)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}; O) = [\Lambda_1(c_1; O), \dots, \Lambda_n(c_n; O), \dots, \Lambda_N(c_N; O)]^T, \quad (2.72)$$

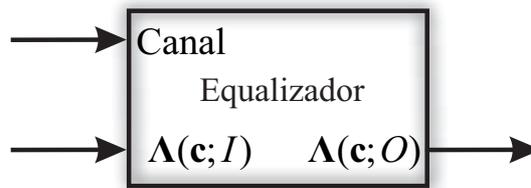
que possui o algoritmo A-SISO embarcado. Tem como função o fornecimento de estimativas atualizadas a respeito dos símbolos de informação e sequências código, baseadas nas entradas e na estrutura do código. Por possuir entradas e saídas de mesma natureza, o uso do módulo SISO fornece maior flexibilidade na decodificação de códigos concatenados, quando codificados por treliça, assim como os códigos convolucionais. O módulo SISO pode ser visto na Figura 2.8.



**Figura 2.8:** *Módulo SISO.*

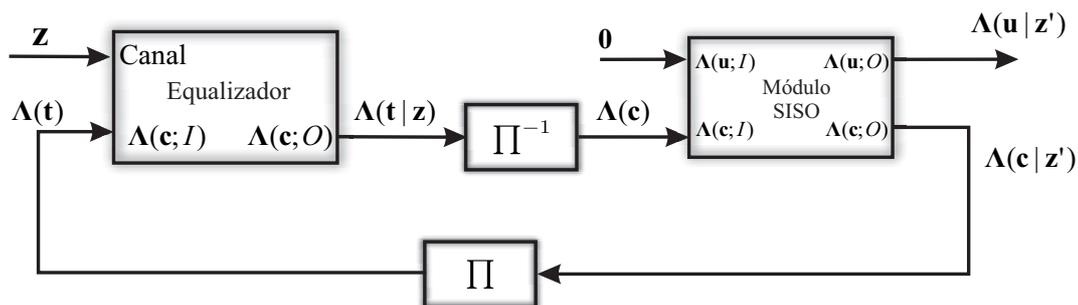
Já para o bloco equalizador, são abordadas duas técnicas, uma baseada em filtragem linear, algoritmo MMSE, e outra na representação do canal como uma treliça, algoritmo SISO. Na Figura 2.9 é apresentado o módulo equalizador, que possui duas entradas e uma saída. O módulo deverá fornecer a sequência de informação extrínseca de saída  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}; O)$  mediante observação do vetor  $\mathbf{z}$ , dada pela entrada *Canal*, e da sequência de informação *a priori*  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}; I)$ .

Para efeito de distinção, um sistema de Equalização Iterativa que utilize o algoritmo SISO embutido no módulo equalizador é denotado equalizador SISO, caso aplicado o algoritmo MMSE, tem-se o equalizador MMSE.



**Figura 2.9:** *Módulo Equalizador.*

Na Figura 2.10 pode ser visto o sistema de Equalização Iterativa proposto. Inicialmente, o módulo equalizador recebe as observações do canal  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n, \dots, z_N]^T$  e fornece na saída a sequência de informação suave *a posteriori* a respeito dos símbolos transmitidos  $\Lambda(\mathbf{t}|\mathbf{z}) = [\Lambda_1(t_1|\mathbf{z}), \dots, \Lambda_n(t_n|\mathbf{z}), \dots, \Lambda_N(t_N|\mathbf{z})]^T$  com base na sequência *a priori*  $\Lambda(\mathbf{t}) = [\Lambda_1(t_1), \dots, \Lambda_n(t_n), \dots, \Lambda_N(t_N)]^T$ . Como o módulo inicialmente não possui informação sobre  $\mathbf{t}$ , tem-se que  $\Lambda(\mathbf{t}) = \mathbf{0}_{N \times 1}$ <sup>2</sup>. Embora os algoritmos produzam estimativas  $\hat{x}_n$ , nota-se que  $P_n[t_n = t] = P_n[x_n = x]$ , com  $t \in \{0, 1\}$  e  $x \in \{-1, 1\}$ , portanto,  $\Lambda_n(t_n) = \Lambda_n(x_n)$ .



**Figura 2.10:** *Equalização Iterativa.*

Na sequência, a LLR condicional  $\Lambda(\mathbf{t}|\mathbf{z})$  é desentrelaçada, gerando a LLR acerca das sequências código  $\Lambda(\mathbf{c}) = [\Lambda_1(c_1), \dots, \Lambda_n(c_n), \dots, \Lambda_N(c_N)]^T$ , para que seja utilizada como informação extrínseca *a priori* pelo módulo SISO. Por conveniência de exposição, faz-se  $\Lambda(\mathbf{c}) = \mathbf{z}'$ .

Devido ao equalizador SISO fornecer somente estimativas a respeito da sequência código  $\mathbf{c}$ , tem-se que  $\Lambda(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{K \times 1}$ . O módulo SISO fornece as estimativas atualizadas  $\Lambda(\mathbf{u}|\mathbf{z}') = [\Lambda_1(u_1|\mathbf{z}'), \dots, \Lambda_k(u_k|\mathbf{z}'), \dots, \Lambda_K(u_K|\mathbf{z}')]^T$ , a respeito dos símbolos de informação, e  $\Lambda(\mathbf{c}|\mathbf{z}') = [\Lambda_1(c_1|\mathbf{z}'), \dots, \Lambda_n(c_n|\mathbf{z}'), \dots, \Lambda_N(c_N|\mathbf{z}')]^T$ , a respeito das sequências código, sendo essa última entrelaçada para formar a LLR *a priori* dada vetor coluna  $\Lambda(\mathbf{t}) =$

<sup>2</sup>Considera-se os termos  $\mathbf{0}_{N \times M}$  e  $\mathbf{1}_{N \times M}$  como matrizes de dimensão  $N \times M$  com todos os seus elementos iguais a zero e um, nessa ordem.

$[\Lambda_1(t_1), \dots, \Lambda_n(t_n), \dots, \Lambda_N(t_N)]^T$  e ser empregada como informação suave pelo módulo equalizador na próxima iteração. O ciclo se repete até que algum critério de parada seja atingido, com a decisão ocorrendo para  $\Lambda(\mathbf{u}|\mathbf{z}')$ .

O sistema de Equalização Iterativa é apresentado na Tabela 2.4 na forma de pseudocódigo. Para o algoritmo apresentado, a equalização terminará quando o número máximo de iterações " $i_{max}$ " for atingido.

**Tabela 2.4:** *Equalização Iterativa.*

<b>ENTRADA</b>
Vetor de observação $\mathbf{z}$ e $i_{max}$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
Faça $\Lambda(\mathbf{t}) = \mathbf{0}_{N \times 1}$ , $\Lambda(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{K \times 1}$ e $i = 1$
<b>ALGORITMO - Equalização Iterativa</b>
<b>ENQUANTO</b> $i \leq i_{max}$ , <b>FAÇA</b>
$\Lambda(\mathbf{t} \mathbf{z}) = \text{Equalizador}(\mathbf{z}, \Lambda(\mathbf{t}))$
$\Lambda(\mathbf{c}) = \text{Desentrelaçador}(\Lambda(\mathbf{t} \mathbf{z}))$
$\Lambda(\mathbf{u} \mathbf{z}'), \Lambda(\mathbf{c} \mathbf{z}') = \text{Módulo\_SISO}(\Lambda(\mathbf{u}), \Lambda(\mathbf{c}))$
$\Lambda(\mathbf{t}) = \text{Entrelaçador}(\Lambda(\mathbf{c} \mathbf{z}'))$
$i = i + 1$
<b>FIM ENQUANTO</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda(\mathbf{u} \mathbf{z}')$

No Capítulo 4, são apresentados alguns resultados referentes ao desempenho da Equalização Iterativa, quando empregados os algoritmos SISO e MMSE. Esses resultados são obtidos por intermédio de simulações computacionais, cujo propósito é compará-los com os de transmissões através de canais com acesso múltiplo.

### 3 EQUALIZADORES ITERATIVOS PARA O 2-BAC

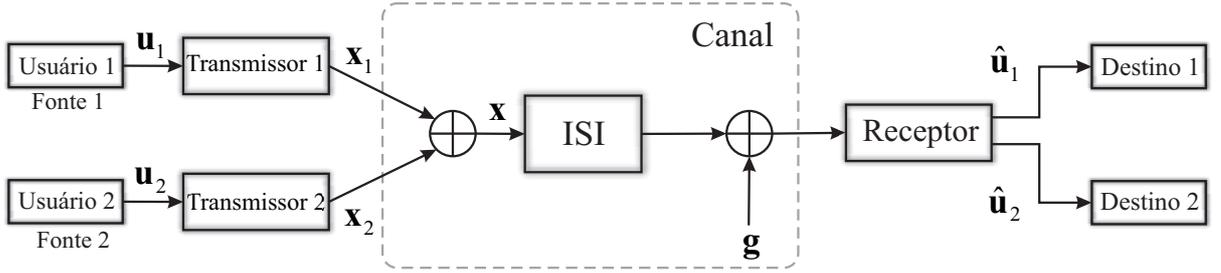
No capítulo 2, a equalização iterativa foi abordada com ênfase na aplicação em um canal discreto ruidoso sem múltiplo acesso. Especificamente na recepção, os blocos equalizador e decodificador estavam dispostos em série, separados apenas por um entrelaçador. Com essa configuração, o objetivo é eliminar a ISI introduzida pelo canal, em uma estrutura de colaboração mútua. Os algoritmos MMSE e SISO que compunham os blocos foram baseados em [19] e [15].

Entretanto, com o número crescente de usuários, é natural o estudo de casos em que vários usuários desejam transmitir através de um mesmo canal, denominado MAC. Neste capítulo, é proposto um 2-BAC [34], com ISI e transmissão na presença de AWGN, ou 2-BAC-ISI. Para esse canal em específico, foram desenvolvidos algoritmos de equalização iterativa, ora baseado em um estimador linear, o algoritmo MMSE-2BAC, ora baseado na regra MAP, o algoritmo SISO-2BAC.

#### 3.1 Canal Binário Aditivo Ruidoso com Interferência Intersimbólica para Dois Usuários

O canal binário aditivo ruidoso com ISI é um modelo de canal discreto de acesso múltiplo com memória em que, a cada período de tempo, dois usuários compartilham o mesmo meio de transmissão para enviar dados, na presença de ruído gaussiano branco. No modelo proposto, um canal com dispersão possui como entrada a soma aritmética, símbolo a símbolo, dos dois usuários, o que resulta em ISI entre ambos. Na Figura 3.1 é apresentado o referido sistema de comunicação, com notações dadas pela extensão do caso sem acesso múltiplo, apresentadas no capítulo 2.

Na Figura 3.2 são vistos os diagramas de bloco para os transmissores de ambos os usuários. Novamente, a estrutura utilizada na codificação emprega códigos convolucionais com número



**Figura 3.1:** Sistema de comunicação proposto para o canal binário aditivo ruidoso com ISI para 2 usuários.

de elementos de memória  $M_1$  e  $M_2$ , para os usuários 1 e 2, nessa ordem. É considerado que ambos os usuários possuem taxa assintótica  $R = k_o/n_o$ , com  $R < 1$  e sincronização dos bits e blocos enviados ao canal entre os usuários e o receptor. Também será assumido que, para os usuários 1 e 2, a codificação se inicia no estado zero antes de cada transmissão, bem como, o receptor desconhece seus estados finais.

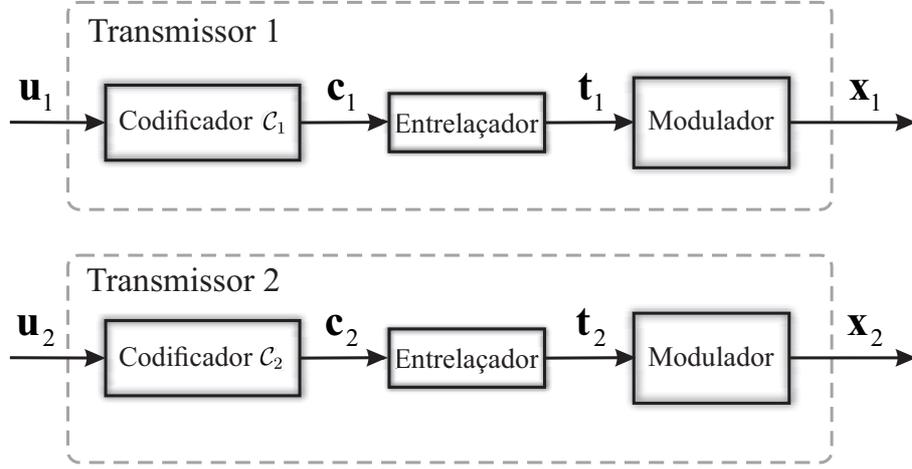
Os usuários emitem símbolos binários discretos IID, formando uma sequência de  $K$  bits. Ao usuário 1, é associada a sequência de símbolos de informação  $\mathbf{u}_1 = [u_{1,1}, \dots, u_{1,k}, \dots, u_{1,K}]^T$ , com  $u_{1,k} \in \mathcal{U}_1 = \{0, 1\}$ . Ao usuário 2 é associada a sequência de símbolos de informação  $\mathbf{u}_2 = [u_{2,1}, \dots, u_{2,k}, \dots, u_{2,K}]^T$ , com  $u_{2,k} \in \mathcal{U}_2 = \{0, 1\}$ . As sequências de entrada  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são codificadas na forma das sequências código  $\mathbf{c}_1 = [c_{1,1}, \dots, c_{1,k}, \dots, c_{1,K}]^T$  e  $\mathbf{c}_2 = [c_{2,1}, \dots, c_{2,k}, \dots, c_{2,K}]^T$ , em que  $\mathbf{c}_{1,k} = [c_{1,k}^{(1)}, \dots, c_{1,k}^{(j)}, \dots, c_{1,k}^{(n_o)}]^T$  e  $\mathbf{c}_{2,k} = [c_{2,k}^{(1)}, \dots, c_{2,k}^{(j)}, \dots, c_{2,k}^{(n_o)}]^T$ , com  $c_{1,k}, c_{2,k} \in \{0, 1\}$ , para  $1 \leq k \leq K$  e  $1 \leq j \leq n_o$ . As sequências código, associadas aos usuários 1 e 2, podem ser reescritas na forma

$$\mathbf{c}_1 = [c_{1,1}, \dots, c_{1,n}, \dots, c_{1,N}]; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{c}_2 = [c_{2,1}, \dots, c_{2,n}, \dots, c_{2,N}], \quad (3.2)$$

de comprimento  $N = K \times n_o$ , em que  $c_{1,n}, c_{2,n} \in \{0, 1\}$ , com taxa de codificação dada por  $R = K/N$ . Novamente, sem perda de generalidade, é considerado taxas assintóticas na forma  $R = 1/N$  para ambos os usuários. Assim como abordado na Seção 2.1, a notação em (3.1) e (3.2) será adotada quando discutido o algoritmo MMSE-2BAC.

Na sequência, com o objetivo de converter possíveis erros em surto gerados pelo canal em erros aleatórios [48, p.441], os blocos de sequências código são permutados de uma forma pseudo-aleatória utilizando alguma função de permutação  $\pi$ , em que  $i \mapsto \pi(i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, são gerados os vetores coluna  $\mathbf{t}_1 = [t_{1,1} \ \dots \ t_{1,n} \ \dots \ t_{1,N}]^T$  e



**Figura 3.2:** Blocos transmissores dos usuários 1 e 2 propostos para o sistema de comunicação com acesso múltiplo dado pela Seção 3.1.

$\mathbf{t}_2 = [t_{2,1} \ \dots \ t_{2,n} \ \dots \ t_{2,N}]^T$ , com  $t_{1,n} \in \{0, 1\}$  e  $t_{2,n} \in \{0, 1\}$ , referente aos usuários 1 e 2, nessa ordem. Consequentemente, a função inversa  $\pi^{-1}$  presente no desentrelaçador deverá retornar os blocos em suas posições originais.

Para cada usuário, é efetuado um mapeamento das componentes dos vetores  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  em alguma forma de onda adequada ao canal de transmissão. Supondo que a modulação aplicada seja BPSK para os usuários 1 e 2, então a constelação de sinais é dada por  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{-1, 1\}$ , ou seja,  $\mathbf{x}_1 = [x_{1,1} \ \dots \ x_{1,n} \ \dots \ x_{1,N}]^T$  e  $\mathbf{x}_2 = [x_{2,1} \ \dots \ x_{2,n} \ \dots \ x_{2,N}]^T$ , com  $x_{1,n} = 2t_{1,n} - 1$  e  $x_{2,n} = 2t_{2,n} - 1$ .

O canal proposto é constituído pela concatenação de um 2-BAC [52] em série a um canal com ISI, cuja estrutura em blocos será explorada para análise dos seus efeitos separadamente, quando tratados pelo receptor. Dessa forma, as sequências  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  permutadas são inicialmente combinadas componente a componente, de modo que

$$\begin{aligned} x_n &= x_{1,n} + x_{2,n} \\ &= (2t_{1,n} - 1) + (2t_{2,n} - 1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

com  $x_n \in \mathcal{X} = \{+2, 0, -2\}$ .

O canal com ISI é representado por um filtro linear FIR e invariante no tempo, com  $M_c + 1$  coeficientes espaçados pela duração dos símbolos  $T$ , em que  $M_c$  é o número de elementos de

memória considerados no canal com ISI. Dessa forma, as amostras presentes na entrada do decodificador podem ser expressas como

$$\begin{aligned} z_n &= g_n + v_n = g_n + \sum_{l=0}^{M_c} h_l(x_{1,n-l} + x_{2,n-l}) \\ &= g_n + \sum_{l=0}^{M_c} h_l x_{n-l}, \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.4)$$

na qual  $h_l$  são os coeficientes da resposta ao impulso do canal com ISI, com as amostras IID  $g_n$  modeladas como ruído AWGN de média zero e variância  $\sigma^2$ , geradas pelo processo de transmissão e filtragem. Reescrevendo a Equação (3.4), a saída do canal  $\mathbf{z}$ , na forma matricial, é dada por

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{g}, \quad (3.5)$$

com  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{g} = [g_1 \ \dots \ g_n \ \dots \ g_N]^T$ . Novamente, será aplicada a suposição de terminação, dessa forma, a matriz do canal  $\mathbf{H}$  tem dimensão  $N \times N$  e  $x_{n-l} = 0$  para  $-M_c \leq n-l \leq -1$ , ver Exemplo 2.2.

Com base na observação do vetor  $\mathbf{z}$ , o projeto de um algoritmo conjunto ótimo que minimize a probabilidade conjunta de erro  $P(u_{1,k} \neq \hat{u}_{1,k}, u_{2,k} \neq \hat{u}_{2,k})$  na decisão, com  $k = 1, 2, \dots, K$ , deverá estimar  $\hat{u}_{1,k}$  e  $\hat{u}_{2,k}$ , para  $u_{1,k}, u_{2,k} \in \{0, 1\}$ , que maximize a probabilidade conjunta *a posteriori*  $P[U_{1,k} = u_{1,k}, U_{2,k} = u_{2,k} | \mathbf{z}]$ , ou seja,

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{1,k}, \hat{u}_{2,k}) &= \arg \max_{u_{1,k}, u_{2,k} \in \{0,1\}} P[U_{1,k} = u_{1,k}, U_{2,k} = u_{2,k} | \mathbf{z}] \\ &= \arg \max_{u_{1,k}, u_{2,k} \in \{0,1\}} \sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k} = u_1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k} = u_2} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) P(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A função densidade de probabilidade  $p(\mathbf{z})$  pode ser removida por não afetar a regra MAP aplicada na Equação (3.6). Para os usuários 1 e 2, as estimativas  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  são dadas pelas escolhas conjuntas mais prováveis de  $u_{1,k} = 0, u_{1,k} = 1, u_{2,k} = 0$  ou  $u_{2,k} = 1$ . As seguintes LLR's conjuntas são definidas:

$$\Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 1]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right); \quad (3.7)$$

$$\Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 0]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right); \quad (3.8)$$

$$\Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 1]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right). \quad (3.9)$$

Analogamente, para as LLR's conjuntas condicionais, dado  $\mathbf{z}$ , escreve-se

$$\tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 1|\mathbf{z}]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0|\mathbf{z}]} \right); \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 0|\mathbf{z}]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0|\mathbf{z}]} \right); \quad (3.11)$$

$$\tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) \triangleq \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 1|\mathbf{z}]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0|\mathbf{z}]} \right); \quad (3.12)$$

e, pela Equação (3.6), tem-se que

$$\tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right); \quad (3.13)$$

$$\tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right); \quad (3.14)$$

$$\tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right), \quad (3.15)$$

devido a suposição de independência conjunta entre símbolos  $u_{1,k}$  e  $u_{2,k}$ , de forma que  $P(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \prod_{i=1}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})$ . Nota-se que a probabilidade conjunta  $P(u_{1,k}, u_{2,k})$  não depende do somatório e pode ser retirada, de forma que

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) &= \\ \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right) &+ \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 1]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) &= \\ \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right) &+ \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 0]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right); \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) &= \\ \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z}|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right) &+ \ln \left( \frac{P[U_{1,k} = 1, U_{2,k} = 1]}{P[U_{1,k} = 0, U_{2,k} = 0]} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

logo

$$\tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) + \Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k}); \quad (3.19)$$

$$\tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) + \Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k}); \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) = \Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k}|\mathbf{z}) + \Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k}), \quad (3.21)$$

em que

$$\Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right); \quad (3.22)$$

$$\Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right); \quad (3.23)$$

$$\Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) = \ln \left( \frac{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=1} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=1} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})}{\sum_{\forall \mathbf{u}_1: u_{1,k}=0} \sum_{\forall \mathbf{u}_2: u_{2,k}=0} p(\mathbf{z} | \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \prod_{i=1, i \neq k}^K P(u_{1,i}, u_{2,i})} \right). \quad (3.24)$$

As estimativas  $\tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$ ,  $\tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  e  $\tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  podem ser decompostas em dois termos, no qual  $\Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$ ,  $\Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  e  $\Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  representam a informação suave conjunta extrínseca sobre  $u_{1,k}$  e  $u_{2,k}$  contida em  $\mathbf{z}$ . As LLR's *a priori*  $\Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k})$ ,  $\Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k})$  e  $\Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k})$  compõem as estimativas para  $\tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$ ,  $\tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  e  $\tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z})$  e representam o conhecimento conjunto prévio do receptor a respeito dos símbolos transmitidos pelos usuários 1 e 2, em um dado instante de observação  $k$ . Nota-se que, para o caso de distribuição uniforme para ambos os usuários,  $\Lambda^1(u_{1,k}, u_{2,k}) = \Lambda^2(u_{1,k}, u_{2,k}) = \Lambda^3(u_{1,k}, u_{2,k}) = 0$ . A decisão acerca de  $u_{1,k}$  e  $u_{2,k}$  pode ser feita na forma

$$(\hat{u}_{1,k}, \hat{u}_{2,k}) = \begin{cases} (0, 0), & \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \leq 0, \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \leq 0, \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \leq 0; \\ (0, 1), & \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > 0, \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \geq \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}), \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \geq \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}). \\ (1, 0), & \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > 0, \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}), \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) \geq \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}). \\ (1, 1), & \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > 0, \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > \tilde{\Lambda}^1(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}), \tilde{\Lambda}^3(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}) > \tilde{\Lambda}^2(u_{1,k}, u_{2,k} | \mathbf{z}). \end{cases} \quad (3.25)$$

Como discutido na Seção 2.1, um receptor ótimo que execute tal tarefa provavelmente se tornará inviável conforme  $K$  cresce, pois terá que considerar os efeitos das codificações de ambos os usuários, do 2-BAC e da ISI de forma conjunta. Um modelo desse receptor seria inviável, porém, uma proposta subótima é apresentada nesse capítulo, que analisa separadamente os efeitos de cada sub-bloco, em uma estrutura que permite equalização e decodificação de forma iterativa.

### 3.2 Algoritmo SISO para o 2-BAC

O algoritmo SISO apresentado na Seção 2.2 pode ser empregado na Equalização Iterativa para o 2-BAC [43]. Tem sua aplicação no fornecimento de estimativas *a posteriori* acerca dos símbolos de informação e sequências código transmitidos pelos usuários 1 e 2, a cada instante de observação  $k$ .

Antes de propor o algoritmo SISO-2BAC, é importante firmar algumas considerações que influenciarão na abordagem do texto. O algoritmo deverá explorar a estrutura de codificação utilizada pelos usuários, na qual pode ser especificada diretamente a partir de suas treliças para instantes consecutivos  $k$  e  $k + 1$ . Dessa forma, tem-se que

- ▷ para o usuário 1, um conjunto de  $Q_1$  estados  $\mathcal{S}_1 = \{s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^{Q_1}\}$ . O estado da treliça no instante de observação  $k$  é dado por  $S_{1,k} = s_1$ , em que  $s_1 \in \mathcal{S}_1$ ;
- ▷ para o usuário 2, um conjunto de  $Q_2$  estados  $\mathcal{S}_2 = \{s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^{Q_2}\}$ , com estado da treliça no instante de observação  $k$  dado por  $S_{2,k} = s_2$ , em que  $s_2 \in \mathcal{S}_2$ ;
- ▷ para o usuário 1, um conjunto de  $Q_1 \times N_{1,I}$  ramos obtidos na forma

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{U}_1 = \{e_1^1, e_1^2, \dots, e_1^{Q_1 \times N_{1,I}}\}, \quad (3.26)$$

que representa todas as possíveis transições entre os estados da treliça referentes ao usuário 1;

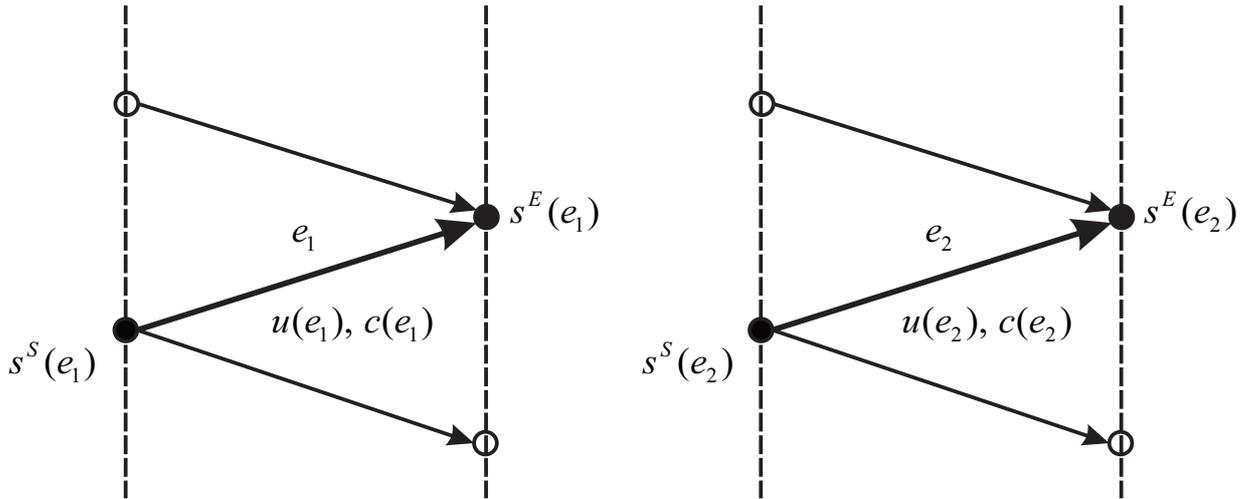
- ▷ para o usuário 2, um conjunto de  $Q_2 \times N_{2,I}$  ramos obtidos na forma

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{S}_2 \times \mathcal{U}_2 = \{e_2^1, e_2^2, \dots, e_2^{Q_2 \times N_{2,I}}\}, \quad (3.27)$$

que representa todas as possíveis transições entre os estados da treliça referentes ao usuário 2.

Considerando as seções de treliça apresentadas na Figura 3.3 referentes a cada usuário, as funções  $s^S(e_1)$ ,  $s^E(e_1)$ ,  $u(e_1)$  e  $c(e_1)$  estão associadas a cada ramo  $e_1 \in \mathcal{E}_1$ , as quais, representam o estado inicial, o estado final, o símbolo de informação e a sequência código, nessa ordem, para o usuário 1. Da mesma forma, para o usuário 2, as funções  $s^S(e_2)$ ,  $s^E(e_2)$ ,  $u(e_2)$  e  $c(e_2)$  estão associadas a cada ramo  $e_2 \in \mathcal{E}_2$ . Como exposto na Seção 2.2, as relações entre essas funções dependem do código utilizado. Por exemplo, o par referente ao usuário 1,  $(u(e_1), s^S(e_1))$  também identifica  $(c(e_1), s^E(e_1))$  para códigos unicamente decodificáveis. Cada ramo  $e_i \in \mathcal{E}_i$  identifica uma 4-tupla na forma  $(u(e_i), c(e_i), s^S(e_i), s^E(e_i))$ , com  $i = 1, 2$ .

Define-se  $P_k(u_{1,k}, u_{2,k}; I) \triangleq P_k[U_{1,k} = u_1, U_{2,k} = u_2]$  como distribuição de probabilidade conjunta extrínseca *a priori* associada aos símbolos de entrada  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , referente aos usuários 1 e 2, em algum instante de observação  $k$ . De forma semelhante, às sequências código de entrada  $\mathbf{c}_{1,k}$  e  $\mathbf{c}_{2,k}$  é associada a distribuição de probabilidade conjunta  $P_k(\mathbf{c}_{1,k}, \mathbf{c}_{2,k}; I)$ , em algum instante de observação  $k$ . As distribuições extrínsecas  $P_k(u_{1,k}, u_{2,k}; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_{1,k}, \mathbf{c}_{2,k}; I)$  compõem as estimativas  $\tilde{P}_k(u_{1,k}, u_{2,k}; O)$  e  $\tilde{P}_k(\mathbf{c}_{1,k}, \mathbf{c}_{2,k}; O)$ , nessa ordem. A estimativa



**Figura 3.3:** Ramos  $e_1$  e  $e_2$  das seções de treliça para os usuários 1 e 2, nessa ordem.

$P_k(\mathbf{c}_{1,k}, \mathbf{c}_{2,k}; I)$  depende da aplicação do algoritmo SISO ou da estrutura de concatenação ao qual está empregado. Para facilitar a exposição, será novamente omitida a dependência temporal sobre as variáveis aleatórias  $U_{1,k}$ ,  $U_{2,k}$ ,  $C_{1,k}$  e  $C_{2,k}$ , assumindo que  $P_k(u_{1,k}, u_{2,k}; I) = P_k(u_1, u_2; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_{1,k}, \mathbf{c}_{2,k}; I) = P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ .

O objetivo do algoritmo SISO para o 2-BAC é estimar as distribuições de probabilidade conjunta dos símbolos de informação e sequências código dos usuários 1 e 2, a cada instante  $k$ , com base na observação  $\mathbf{z}_1^N \triangleq \mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n, \dots, z_N]^T$ . Por facilidade de exposição, considera-se que  $R = 1$ , ou seja  $K = N$ , portanto,  $\mathbf{z}_1^N = \mathbf{z}_1^K$ , desse modo, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(u_1, u_2; O) &\triangleq \tilde{P}_k[U_1 = u_{1,k}, U_2 = u_{2,k} | \mathbf{z}_1^K] \\ &= \frac{\tilde{P}_k[U_1 = u_{1,k}, U_2 = u_{2,k}, \mathbf{z}_1^K]}{p(\mathbf{z}_1^K)}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) &\triangleq \tilde{P}_k[C_1 = \mathbf{c}_{1,k}, C_2 = \mathbf{c}_{2,k} | \mathbf{z}_1^K] \\ &= \frac{\tilde{P}_k[C_1 = \mathbf{c}_{1,k}, C_2 = \mathbf{c}_{2,k}, \mathbf{z}_1^K]}{p(\mathbf{z}_1^K)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A função densidade de probabilidade  $p(\mathbf{z})$  é independente de  $U_1$  e  $U_2$  e permanece constante para todo  $u_1, u_2 \in \{0, 1\}$ , não afetando a aplicação da regra MAP, portanto, pode ser omitida. A igualdade nas equações (3.28) e (3.29) será mantida apenas por conveniência de notação.

Portanto,

$$\tilde{P}_k(u_1, u_2; O) = \sum_{e_1: u(e_1)=u_{1,k}} \sum_{e_2: u(e_2)=u_{2,k}} P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K]; \quad (3.30)$$

$$\tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) = \sum_{e_1: c(e_1)=\mathbf{c}_{1,k}} \sum_{e_2: c(e_2)=\mathbf{c}_{2,k}} P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K], \quad (3.31)$$

uma vez que, para determinar as probabilidades *a posteriori* dadas pelas equações (3.28) e (3.29), é necessário somar para todos os ramos  $e_1$  e  $e_2$  tais que  $u(e_1) = u_{1,k}$ ,  $u(e_2) = u_{2,k}$ ,  $c(e_1) = \mathbf{c}_{1,k}$  e  $c(e_2) = \mathbf{c}_{2,k}$  são verdadeiros.

A abordagem inicialmente terá foco na Equação (3.30), ao passo que a Equação (3.31) será dada por consequência. Desse modo, sabendo que a  $e_1 = (u(e_1), c(e_1), s^S(e_1), s^E(e_1))$  e  $e_2 = (u(e_2), c(e_2), s^S(e_2), s^E(e_2))$ , a  $P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K]$  é reescrita na forma

$$\begin{aligned} P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K] &= \\ &P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), U_{1,k} = u(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{2,k} = u(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}, z_k, \mathbf{z}_{k+1}^K]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nota-se que a sequência  $\mathbf{z}_1^K$  foi particionada em três parcelas referentes às observações passadas e futuras, além da observação no instante atual  $k$ . Aplicando a regra de Bayes na Equação (3.32) tem-se que

$$\begin{aligned} P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K] &= \\ &= P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}] \\ &\quad \times P_k[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), z_k, \mathbf{z}_{k+1}^K | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2)] \\ &= P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}] \\ &\quad \times P_k[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), z_k | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2)] \\ &\quad \times p_k(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

na qual, foi usado o fato de que, dado um estado no instante  $k$ , observações futuras são independentes das observações passadas. Pela definição dos ramos  $e_1$  e  $e_2$ , tem-se que

$$\begin{aligned} P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K] &= \\ &= P_k[S_{k-1} = s^S(e_1), S_{k-1} = s^S(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}] \\ &\quad \times P_k[U_k = u(e_1), U_k = u(e_2), z_k | S_{k-1} = s^S(e_1), S_{k-1} = s^S(e_2)] \\ &\quad \times p_k(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_k = s^E(e_1), S_k = s^E(e_2)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

O segundo termo do lado direito da Equação (3.34) é escrito como

$$\begin{aligned}
P_k[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), z_k | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2)] &= \\
&= p_k(z_k | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2)) \\
&\quad \times P_k[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2) | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2)] \\
&= p_k(z_k | C_{1,k} = c(e_1), C_{2,k} = c(e_2)) P[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2)] \\
&= P_k[c(e_1), c(e_2); I] P[u(e_1), u(e_2); I], \tag{3.35}
\end{aligned}$$

na qual, por definição, tem-se que  $P_k[c(e_1), c(e_2); I] \triangleq p_k(z_k | C_{1,k} = c(e_1), C_{2,k} = c(e_2))$  e  $P_k[u(e_1), u(e_2); I] \triangleq P_k[U_1 = u(e_1), U_2 = u(e_2)]$ . A estimativa  $p_k(z_k | C_{1,k} = c(e_1), C_{2,k} = c(e_2))$  relaciona a probabilidade *a posteriori* de transição conjunta dos usuários 1 e 2, em uma cadeia de Markov ruidosa no instante  $k$ , enquanto  $P_k[U_1 = u(e_1), U_2 = u(e_2)]$  a probabilidade conjunta *a priori* de emissão de algum símbolo de informação, também para  $k$ . Consequentemente, tem-se  $P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K]$  na forma

$$\begin{aligned}
P_k[E_1 = e_1, E_2 = e_2, \mathbf{z}_1^K] &= \\
&= P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}] P_k[c(e_1), c(e_2); I] P[u(e_1), u(e_2); I] \\
&\quad \times p_k(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2)). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

De acordo com (3.34), define-se  $A_k(s_1, s_2) \triangleq P_k[S_{1,k} = s_1, S_{2,k} = s_2, \mathbf{z}_1^k]$ , ao qual está relacionado com a estimativa conjunta de algum estado  $s_1$  e  $s_2$ , referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente, dispondo das observações passadas  $\mathbf{z}_1^k$ . De forma análoga, define-se  $B_k(s_1, s_2) \triangleq p_k(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_k = s_1, S_k = s_2)$ , ao qual relaciona os estados  $s_1$  e  $s_2$  às observações futuras. Substituindo as definições na Equação (3.36) e, em seguida, na Equação (3.30), tem-se que

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k(u_1, u_2; O) &= \\
&\quad \sum_{e_1: u(e_1)=u_{1,k}} \sum_{e_2: u(e_2)=u_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] \\
&\quad \quad \quad \times P_k[c(e_1), c(e_2); I] P_k[u(e_1), u(e_2); I]. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Similarmente, para a estimativa à respeito das sequências código dada pela Equação (3.31),

faz-se

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) = & \\ & \sum_{e_1: c(e_1)=\mathbf{c}_{1,k}} \sum_{e_2: c(e_2)=\mathbf{c}_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] \\ & \times P_k[c(e_1), c(e_2); I] P_k[u(e_1), u(e_2); I]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pelas equações (3.37) e (3.38) observa-se que, a partir das distribuições de probabilidade conjunta de entrada,  $P_k[u(e_1), u(e_2); I]$  e  $P_k[c(e_1), c(e_2); I]$ , relacionadas aos símbolos de informação e sequências código dos usuários 1 e 2, respectivamente, o algoritmo SISO-2BAC fornece estimativas conjuntas atualizadas a cada instante  $k$ .

A métrica  $A_k(s_1, s_2)$  pode ser calculada recursivamente, para todos os ramos  $e_1$  e  $e_2$  aos quais  $S_{1,k-1} = s_1$  e  $S_{2,k-1} = s_2$  são verdadeiros, de forma que

$$\begin{aligned} A_k(s_1, s_2) &= P_k[S_{1,k} = s_1, S_{2,k} = s_2, \mathbf{z}_1^k] = \\ &= \sum_{e_1: s^E(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^E(e_2)=s_2} P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), \mathbf{z}_1^k] \\ &= \sum_{e_1} \sum_{e_2} P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}, z_k], \end{aligned} \quad (3.39)$$

em que os índices dos somatórios foram simplificados por conveniência de notação. Aplicando Bayes novamente na Equação (3.39), tem-se que

$$\begin{aligned} A_k(s_1, s_2) &= \\ &= \sum_{e_1} \sum_{e_2} P_k[S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2), U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), \mathbf{z}_1^{k-1}] \\ &\quad \times P_k[U_{1,k} = u(e_1), U_{2,k} = u(e_2), z_k | S_{1,k-1} = s^S(e_1), S_{2,k-1} = s^S(e_2)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Considerando a definição de  $A_k(s_1, s_2)$  e substituindo a Equação (3.35) em (3.40),

$$\begin{aligned} A_k(s_1, s_2) &= \\ &= \sum_{e_1: s^E(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^E(e_2)=s_2} A_{k-1}[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c_k(e_2); I] P_k[u(e_1), u(e_2); I]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A métrica  $B_k(s_1, s_2)$  pode ser definida de forma similar, portanto,

$$\begin{aligned}
B_k(s_1, s_2) &= p(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_k = s_1, S_k = s_2) = \\
&= \sum_{e_1: s^S(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^S(e_2)=s_2} P_k[U_{1,k+1} = u(e_1), U_{2,k+1} = u(e_2), \mathbf{z}_{k+1}^K | S_{1,k} = s^S(e_1), S_{2,k} = s^S(e_2)] \\
&= \sum_{e_1} \sum_{e_2} p_k(\mathbf{z}_{k+1}^K | S_k = s^S(e_1), S_k = s^S(e_2), U_{1,k+1} = u(e_1), U_{2,k+1} = u(e_2)) \\
&\quad \times P_k[U_{1,k+1} = u(e_1), U_{2,k+1} = u(e_2), z_{k+1} | S_{1,k} = s^S(e_1), S_{2,k} = s^S(e_2)]. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Pela definição de  $B_k(s_1, s_2)$  e substituindo a Equação (3.35) na (3.42),

$$\begin{aligned}
B_k(s_1, s_2) &= \\
&\sum_{e_1: s^S(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^S(e_2)=s_2} B_{k+1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] P_{k+1}[c(e_1), c(e_2); I] P_{k+1}[u(e_1), u(e_2); I] \quad (3.43)
\end{aligned}$$

As condições iniciais conjuntas para  $A_k(s_1, s_2)$   $B_k(s_1, s_2)$ , para os usuários 1 e 2, são dadas por

$$A_0(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, & s_1 = S_{1,0} \text{ e } s_2 = S_{2,0}; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$B_k(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, & s_1 = S_{1,K} \text{ e } s_2 = S_{2,K}; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.45)$$

caso sejam conhecidos os estados iniciais e finais resultantes da codificação por treliça de cada usuário, aplicada ao bloco de  $K$  bits. Caso seja desconhecido o estado final de ambos, a seguinte condição pode ser aplicada:

$$B_k(s_1, s_2) = \frac{1}{(Q_1 Q_2)}, \quad \forall s_1 \in \mathcal{S}_1, \forall s_2 \in \mathcal{S}_2. \quad (3.46)$$

Para obter a estimativa extrínseca conjunta utilizada na Equalização Iterativa para o 2-BAC, nota-se que as quantidades  $P_k[c(e_1), c(e_2); I]$  e  $P_k[u(e_1), u(e_2); I]$  não dependem dos somatórios presentes nas equações (3.37) e (3.38), nessa ordem, e podem ser retirados de modo que  $\tilde{P}_k(u_1, u_2; O)$  é escrito como

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k(u_1, u_2; O) &= P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I) \\
&\quad \times \sum_{e_1: u(e_1)=u_{1,k}} \sum_{e_2: u(e_2)=u_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I] \\
\tilde{P}_k(u_1, u_2; O) &= P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I) P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) \quad (3.47)
\end{aligned}$$

e, por sua vez,  $\tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$  é escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) &= P_k(u_1, u_2; I) \\ &\times \sum_{e_1: c(e_1)=\mathbf{c}_{1,k}} \sum_{e_2: c(e_2)=\mathbf{c}_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I] \\ \tilde{P}_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) &= P_k(u_2, u_2; I) P_k(u_1, u_2; O), \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que

$$\begin{aligned} P_k(u_1, u_2; O) &= \\ &\sum_{e_1: u(e_1)=u_{1,k}} \sum_{e_2: u(e_2)=u_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I] \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O) &= \\ &\sum_{e_1: c(e_1)=\mathbf{c}_{1,k}} \sum_{e_2: c(e_2)=\mathbf{c}_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

As distribuições de probabilidade conjunta  $P_k(u_1, u_2; O)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$  representam as versões extrínsecas atualizadas das distribuições conjuntas  $P_k(u_1, u_2; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ , referentes aos usuários 1 e 2, com base na treliça empregada na codificação para ambos, obtidas a partir de todos os símbolos, exceto para  $P_k(u_1, u_2; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ .

Como visto, as estimativas extrínsecas  $P_k(u_1, u_2; O)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$  podem ser obtidas a partir do algoritmo SISO, o que simplifica a estrutura de equalização e decodificação, uma vez que, os blocos presentes no receptor trocam informação extrínseca entre si. Os termos  $P_k(u_1, u_2; \cdot)$  e  $P_k(c_1, c_2; \cdot)$  desempenham o papel da informação extrínseca a ser propagada na Equalização Iterativa para o 2-BAC, a informação a ser adicionada às distribuições  $P_k(u_1, u_2; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ .

Para cada  $k = 1, \dots, K$  e  $j = 1, \dots, n_o$ , as distribuições de probabilidade conjuntas extrínsecas do  $k, j$ -ésimos bits,  $P_k(u_1, u_2; O)$  e  $P_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O)$ , podem ser calculadas,  $\forall k$ , na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P_k(u_1, u_2; O) = & \\
& \sum_{e_1:u(e_1)=u_{1,k}} \sum_{e_2:u(e_2)=u_{2,k}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
P_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = & \\
& \sum_{e_1:c(e_1)=c_{1,k}^{(j)}} \sum_{e_2:c(e_2)=c_{2,k}^{(j)}} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

com as métricas  $A_k(s_1, s_2)$  e  $B_k(s_1, s_2)$  calculadas pela equações (3.41) e (3.43). Na Equalização Iterativa para o 2-BAC, é utilizada a distribuição conjunta em nível de bit  $P_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O)$  ao invés de  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$ .

As razões de log-verossimilhança extrínsecas binárias para os símbolos de informação  $\Lambda_k^1(u_1, u_2; O)$ ,  $\Lambda_k^2(u_1, u_2; O)$  e  $\Lambda_k^3(u_1, u_2; O)$  são escritas como

$$\begin{aligned}
\Lambda_k^1(u_1, u_2; O) = & \\
& \frac{\sum_{e_1:u(e_1)=0} \sum_{e_2:u(e_2)=1} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]}{\sum_{e_1:u(e_1)=0} \sum_{e_2:u(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]};
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_k^2(u_1, u_2; O) = & \\
& \frac{\sum_{e_1:u(e_1)=1} \sum_{e_2:u(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]}{\sum_{e_1:u(e_1)=0} \sum_{e_2:u(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]};
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_k^3(u_1, u_2; O) = & \\
& \frac{\sum_{e_1:u(e_1)=1} \sum_{e_2:u(e_2)=1} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]}{\sum_{e_1:u(e_1)=0} \sum_{e_2:u(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]};
\end{aligned} \tag{3.55}$$

e, para as sequências código  $\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O)$ ,  $\Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O)$  e  $\Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O)$ , são expressas

como

$$\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \frac{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=0} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=1} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=0} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}; \quad (3.56)$$

$$\Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \frac{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=1} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=0} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}; \quad (3.57)$$

$$\Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \frac{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=1} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=1} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}{\sum_{e_1:c^{(j)}(e_1)=0} \sum_{e_2:c^{(j)}(e_2)=0} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]}. \quad (3.58)$$

O algoritmo SISO-2BAC pode ser visualizado na Tabela 3.1 em formato de pseudocódigo, em nível de bit.

Como discutido na Seção 2.2, o algoritmo SISO pode apresentar instabilidade para valores muito pequenos de  $P_k(u_1, u_2; I)$  e  $P_k(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ , e ainda agravada pela adição de mais um usuário no canal de transmissão. Logo, é importante a normalização das métricas  $A_k(s_1, s_2)$  e  $B_k(s_1, s_2)$  utilizadas no cálculo das razões nas equações (3.53), (3.54) e (3.55) para os símbolos de informação, e nas equações (3.56), (3.57) e (3.58) para as sequências código, a cada instante  $k$ .

A complexidade do algoritmo SISO pode ser reduzida transformando multiplicações em adições. Aplicando o logaritmo natural nas equações (3.51) e (3.52), tem-se que

$$\pi_k(u_1, u_2; O) = \ln \left( \sum_{e_1:u(e_1)=u_1} \sum_{e_2:u(e_2)=u_2} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \beta_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_k[c(e_1), c(e_2); I] \} \right) \quad (3.59)$$

$$\pi_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \ln \left( \sum_{e_1:c(e_1)=c_1^{(j)}} \sum_{e_2:c(e_2)=c_2^{(j)}} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \beta_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_k[u(e_1), u(e_2); I] \} \right), \quad (3.60)$$

Tabela 3.1: Algoritmo SISO-2BAC.

<b>ENTRADA</b>
$P_k(u_1, u_2; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
$P_k(c_1, c_2; I)$ , para $k = 1, \dots, K$
Conjuntos de ramos $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
$A_0(S_{1,0}, S_{2,0}) = 1$ e $A_k(s_1, s_2) = 0$ para $s_1 \neq S_{1,0}$ , $s_2 \neq S_{2,0}$ e $k = 1, \dots, K$
$B_k(S_{1,K}, S_{2,K}) = 1$ e $B_k(s_1, s_2) = 0$ para $s_1 \neq S_{1,0}$ , $s_2 \neq S_{2,0}$ e $k = 1, \dots, K$
<b>ALGORITMO - SISO-2BAC</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$A_k(s_1, s_2) =$
$\sum_{e_1: s^E(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^E(e_2)=s_2} A_{k-1}[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c_k(e_2); I] P_k[u(e_1), u(e_2); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = K - 1$ <b>ATÉ</b> $1$ , <b>FAÇA</b>
$B_k(s_1, s_2) =$
$\sum_{e_1: s^S(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^S(e_2)=s_2} B_{k+1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] P_{k+1}[c(e_1), c_k(e_2); I] P_{k+1}[u(e_1), u(e_2); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$P_k(u_1, u_2; O) =$
$\sum_{e_1: u(e_1)=u_1} \sum_{e_2: u(e_2)=u_2} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[c(e_1), c(e_2); I]$
<b>PARA</b> $j = 1$ <b>ATÉ</b> $n_o$ , <b>FAÇA</b>
$P_k(c_1, c_2; O) =$
$\sum_{e_1: c(e_1)=c_1} \sum_{e_2: c(e_2)=c_2} A_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] B_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] P_k[u(e_1), u(e_2); I]$
<b>FIM PARA</b>
<b>FIM PARA</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda_k^1(u_1, u_2; O) = \ln \left( \frac{P_k[u_1 = 0, u_2 = 1; O]}{P_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$
$\Lambda_k^2(u_1, u_2; O) = \ln \left( \frac{P_k[u_1 = 1, u_2 = 0; O]}{P_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$
$\Lambda_k^3(u_1, u_2; O) = \ln \left( \frac{P_k[u_1 = 1, u_2 = 1; O]}{P_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$
$\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \ln \left( \frac{P_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 1; O]}{P_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$
$\Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \ln \left( \frac{P_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 0; O]}{P_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$
$\Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \ln \left( \frac{P_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 1; O]}{P_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]} \right)$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$

adotando as seguintes definições

$$\pi_k(\cdot; O) \triangleq \ln(P_k(\cdot; O)); \quad (3.61)$$

$$\pi_k(\cdot; I) \triangleq \ln(P_k(\cdot; I)); \quad (3.62)$$

$$\alpha_k[s^S(e_1), s^S(e_2)] \triangleq \ln(A_k[s^S(e_1), s^S(e_2)]); \quad (3.63)$$

$$\beta_k[s^E(e_1), s^S(e_2)] \triangleq \ln(B_k[s^S(e_1), s^S(e_2)]). \quad (3.64)$$

Por consequência, as métricas  $\alpha_k(s_1, s_2)$  e  $\beta_k(s_1, s_2)$  são obtidas de modo que

$$\alpha_k(s_1, s_2) = \ln \left( \sum_{e_1: s^E(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^S(e_2)=s_2} \exp \left\{ \alpha_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \pi_k[u(e_1), u(e_2); I] + \pi_k[c(e_1), c(e_2); I] \right\} \right); \quad (3.65)$$

$$\beta_k(s_1, s_2) = \ln \left( \sum_{e_1: s^S(e_1)=s_1} \sum_{e_2: s^E(e_2)=s_2} \exp \left\{ \beta_{k+1}[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_{k+1}[u(e_1), u(e_2); I] + \pi_{k+1}[c(e_1), c(e_2); I] \right\} \right). \quad (3.66)$$

Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \rightarrow -\infty$ , as novas condições iniciais para  $\alpha_k(s_1, s_2)$  e  $\beta_k(s_1, s)$  são definidas como

$$\alpha_0(s_1, s_2) = \begin{cases} 0, & s_1 = S_{1,0} \text{ e } s_2 = S_{2,0}; \\ -\infty, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\beta_k(s_1, s_2) = \begin{cases} 0, & s_1 = S_{1,K} \text{ e } s_2 = S_{2,K}; \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.68)$$

apenas por conveniência de notação.

As razões de log-verossimilhança extrínsecas de saída relacionadas aos símbolos de informação são expressas como

$$\Lambda_k^1(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 0, u_2 = 1; O] - \pi_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O]; \quad (3.69)$$

$$\Lambda_k^2(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 1, u_2 = 0; O] - \pi_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O]; \quad (3.70)$$

$$\Lambda_k^3(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 1, u_2 = 1; O] - \pi_k[u_1 = 0, u_2 = 0; O], \quad (3.71)$$

e às seqüências código, na forma

$$\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]; \quad (3.72)$$

$$\Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 0; O] - \pi_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]; \quad (3.73)$$

$$\Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]. \quad (3.74)$$

A versão aditiva do algoritmo SISO-2BAC, aqui denotada A-SISO-2BAC, é apresentada na Tabela 3.2 na forma de pseudocódigo. Caso o algoritmo não possua conhecimento *a priori* dos símbolos de informação, admite-se o pior caso  $\Lambda_k^1(u_1, u_2; I) = \Lambda_k^2(u_1, u_2; I) = \Lambda_k^3(u_1, u_2; I) = 0$  para ambos os usuários, ou seja, todos os símbolos presentes em  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$  são equiprováveis.

### 3.2.1 Algoritmo SISO-2BAC para o módulo Equalizador

Assim como descrito na Seção 2.4, na tentativa de remover a ISI, o equalizador SISO-2BAC poderá explorar a estrutura sequencial da treliça do canal, com o propósito de fornecer

**Tabela 3.2:** Algoritmo A-SISO-2BAC.

<b>ENTRADA</b>
$\Lambda_k^1(u_1, u_2; I), \Lambda_k^2(u_1, u_2; I), \Lambda_k^3(u_1, u_2; I), \quad \text{para } k = 1, \dots, K$ $\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I), \Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I), \Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I), \quad \text{para } k = 1, \dots, K \text{ e } j = 1, \dots, n_o$ Conjuntos de ramos $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
$\pi_k(u_1, u_2; I) = \Lambda_k(u_1, u_2) - \ln [1 + \exp(\Lambda_k^1(u_1, u_2; I)) + \Lambda_k^2(u_1, u_2; I) + \Lambda_k^3(u_1, u_2; I)]$ $\pi_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I) = \Lambda_k(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}) - \ln [1 + \exp(\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I)) + \Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I) + \Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I)]$ $\alpha_0(S_{1,0}, S_{2,0}) = 0$ e $\alpha_k(s_1, s_2) = -\infty$ para $s_1 \neq S_{1,0}, s_2 \neq S_{2,0}$ e $k = 1, \dots, K$ $\beta_k(S_{1,K}, S_{2,K}) = 0$ e $\beta_k(s_1, s_2) = -\infty$ para $s_1 \neq S_{1,0}, s_2 \neq S_{2,0}$ e $k = 1, \dots, K$
<b>ALGORITMO - A-SISO-2BAC</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$\alpha_k(s_1, s_2) =$ $\ln \left( \sum_{e_1} \sum_{e_2} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_k[c(e_1), c_k(e_2); I] + \pi_k[u(e_1), u(e_2); I] \} \right)$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = K - 1$ <b>ATÉ</b> $1$ , <b>FAÇA</b>
$\beta_k(s_1, s_2) =$ $\ln \left( \sum_{e_1} \sum_{e_2} \exp \{ \beta_{k+1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \pi_{k+1}[c(e_1), c_k(e_2); I] + \pi_{k+1}[u(e_1), u(e_2); I] \} \right)$
<b>FIM PARA</b>
<b>PARA</b> $k = 1$ <b>ATÉ</b> $K$ , <b>FAÇA</b>
$\pi_k(u_1, u_2; O) =$ $\ln \left( \sum_{e_1} \sum_{e_2} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \beta_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_k[c(e_1), c(e_2); I] \} \right)$
<b>PARA</b> $j = 1$ <b>ATÉ</b> $n_o$ , <b>FAÇA</b>
$\pi_k(c_1, c_2; O) =$ $\ln \left( \sum_{e_1} \sum_{e_2} \exp \{ \alpha_{k-1}[s^S(e_1), s^S(e_2)] + \beta_k[s^E(e_1), s^E(e_2)] + \pi_k[u(e_1), u(e_2); I] \} \right)$
<b>FIM PARA</b>
<b>FIM PARA</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda_k^1(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 0, u_2 = 1; O] - \pi_k[u = 0, u_2 = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ $\Lambda_k^2(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 1, u_2 = 0; O] - \pi_k[u = 0, u_2 = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ $\Lambda_k^3(u_1, u_2; O) = \pi_k[u_1 = 1, u_2 = 1; O] - \pi_k[u = 0, u_2 = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ $\Lambda_k^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$ $\Lambda_k^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 0; O] - \pi_k[c^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$ $\Lambda_k^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; O) = \pi_k[c_1^{(j)} = 1, c_2^{(j)} = 1; O] - \pi_k[c^{(j)} = 0, c_2^{(j)} = 0; O]$ para $k = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, n_o$

informação suave útil acerca da sequência código transmitida pelos usuários 1 e 2. Por sua vez, o decodificador SISO-2BAC emprega essa informação *a priori* para estimar os símbolos de informação por cada usuário, em uma estrutura de detecção subótima iterativa anteriormente citado.

Novamente, considera-se que o canal com ISI possui taxa  $R = 1$ , portanto,  $K = N$  e  $n_o = 1$ . Uma vez que, qualquer caminho através da treliça para cada usuário corresponde a

uma sequência temporal de símbolos de entrada e saída em que, a cada instante de observação  $k$ , sendo representada pela saída do modelo do canal ISI-2BAC sem ruído, de forma que

$$v_k(e_1, e_2) = \sum_{l=0}^{M_c} v_{1,k}(e_1) + v_{2,k}(e_2) = \sum_{l=0}^{M_c} h_l x_{1,k-l}(e_1) + h_l x_{2,k-l}(e_2), \quad (3.75)$$

com  $v_{1,k}(e_1) = h_l x_{1,k-l}(e_1)$  e  $v_{2,k}(e_2) = h_l x_{2,k-l}(e_2)$ . O algoritmo SISO-2BAC pode ser aplicado adotando a seguinte relação para  $P_k[c(e_1), c(e_2); I]$

$$P_k[c(e_1), c(e_2); I] = p_k(z|v(e_1, e_2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z_k - v_k(e_1, e_2))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.76)$$

em que  $\sigma^2$  é a variância do ruído aditivo. Para a estimativa *a priori* conjunta  $P_k[u(e_1), u(e_2); I]$ , adota-se a seguinte relação

$$P_k[u(e_1), u(e_2); I] = P_k[T_{1,k} = t(e_1), T_{2,k} = t(e_2)], \quad (3.77)$$

com  $z_k$  dado pela Equação (3.4). A constante presente em (3.76) pode ser omitida por não afetar a razão dada pelas equações (3.56), (3.57) e (3.58).

Caso seja aplicado o algoritmo A-SISO, as estimativas dadas pelas equações (3.76) e (3.77) são dadas na forma

$$\pi_k[c(e_1), c(e_2); I] = -\frac{(z_k - v_k(e_1, e_2))^2}{2\sigma^2} \quad (3.78)$$

$$\pi_k[u(e_1), u(e_2); I] = \ln(P_k[T_{1,k} = t(e_1), T_{2,k} = t(e_2)]), \quad (3.79)$$

e o algoritmo apresentado na Tabela 3.2 pode ser aplicado.

Para demonstrar a aplicação do algoritmo SISO-2BAC no equalizador, bem como, a descrição do canal como treliça, é apresentado o Exemplo 3.1.

**Exemplo 3.1** *Para o canal apresentado no Exemplo 2.2, a seção de treliça para os usuários 1 e 2, nos instantes  $k$  e  $k + 1$ , é apresentada na Figura 3.4. As entradas são dadas por  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \{-1, +1\}$  para modulação BPSK e as saídas pela Equação (2.44). As linhas contínuas representam a entrada  $x_{1,k} = -1$  e  $x_{2,k} = -1$  e as linhas tracejadas representam a entrada  $x_{1,k} = +1$  e  $x_{2,k} = +1$ . O conjunto de estados da treliça para os usuários 1 e 2 é dado por  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \{s^1, s^2, s^3, s^4\}$ , em que  $s_1^1 = s_2^1 = (-1, -1)$ ,  $s_1^2 = s_2^2 = (-1, +1)$ ,  $s_1^3 = s_2^3 = (+1, -1)$  e  $s_1^4 = s_2^4 = (+1, +1)$ . O conjunto de ramos para a seção apresentada é dado por  $\mathcal{E}_1 = \{e_1^1, e_1^2, e_1^3, e_1^4\}$  e  $\mathcal{E}_2 = \{e_2^1, e_2^2, e_2^3, e_2^4\}$ , na forma  $e_1^l = (x_{1,k}, v_{1,k}, s^S, s^E)$  e  $e_2^l = (x_{2,k}, v_{2,k}, s^S, s^E)$ , respectivamente. Portanto, para o usuário 1,*

$$\begin{aligned}
e_1^1 &= (-1, -1.630, s^1, s^1); & e_1^2 &= (+1, +0.815, s^1, s^2); \\
e_1^3 &= (-1, -0.815, s^2, s^1); & e_1^4 &= (+1, +0.001, s^2, s^3); \\
e_1^5 &= (-1, +0.001, s^3, s^2); & e_1^6 &= (+1, +0.815, s^3, s^4); \\
e_1^7 &= (-1, -0.815, s^4, s^3); & e_1^8 &= (+1, +1.630, s^4, s^4),
\end{aligned}$$

e, para o usuário 2,

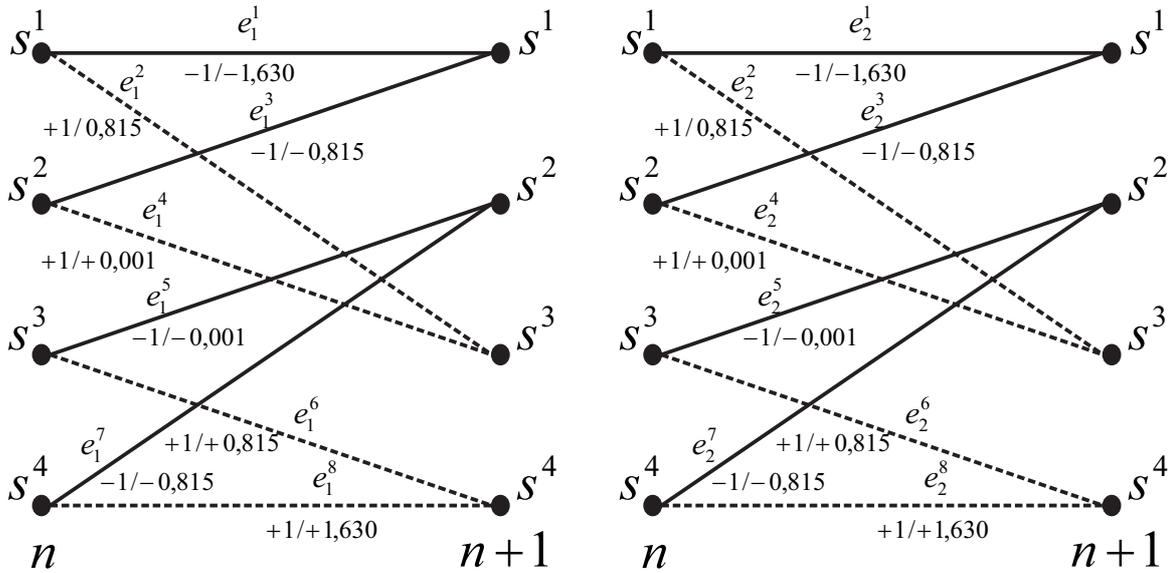
$$\begin{aligned}
e_2^1 &= (-1, -1.163, s^1, s^1); & e_2^2 &= (+1, +0.815, s^1, s^2); \\
e_2^3 &= (-1, -0.815, s^2, s^1); & e_2^4 &= (+1, +0.001, s^2, s^3); \\
e_2^5 &= (-1, +0.001, s^3, s^2); & e_2^6 &= (+1, +0.815, s^3, s^4); \\
e_2^7 &= (-1, -0.815, s^4, s^3); & e_2^8 &= (+1, +1.163, s^4, s^4).
\end{aligned}$$

Desse modo,  $v_k(e_1, e_2)$  pode ser determinado pela combinação das seções individuais de treliça dos usuários 1 e 2. A aplicação da algoritmo SISO-2BAC, para o módulo Equalizador, segue como apresentada na Tabela 2.1 com o uso das equações (3.76) e (3.77), calculadas a partir do vetor  $\mathbf{z}$ , ou na Tabela 2.2 para o A-SISO, com o uso das equações (3.78) e (3.79), também estimadas a partir de  $\mathbf{z}$ . Caso o módulo Equalizador não possua informação sobre os símbolos transmitidos, considera-se o pior caso, ou seja, todos os símbolos para os usuários 1 e 2 são equiprováveis, portanto, tem-se  $\pi_k[u_1(e_1), u_2(e_2); I] = 0$ , para todo  $k = 1, \dots, K$ .

As treliças individuais dos usuários 1 e 2 podem ser agrupadas em apenas uma treliça que descreve o comportamento conjunto durante a transmissão. A aplicação no algoritmo SISO segue como descrito anteriormente. Na Figura 3.5, é apresentado a treliça conjunta para os instantes  $k$  e  $k + 1$ . As linhas contínuas representam a entrada  $x_k = -2$ , para  $x_{1,k} = -1$  e  $x_{2,k} = -1$ ; as linhas tracejadas com ponto representam a entrada  $x_n = 0$ , para  $x_{1,k} = -1$  e  $x_{2,k} = +1$  ou  $x_{1,k} = +1$  e  $x_{2,k} = -1$ ; e as linhas tracejadas representam a entrada  $x_k = +2$ , para  $x_{1,k} = +1$  e  $x_{2,k} = +1$ . O conjunto de estados da treliça conjunta é dado por  $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, s^3, s^4, s^5, s^6, s^7, s^8, s^9\}$ , em que  $s^1 = (-2, -2)$ ,  $s^2 = (-2, 0)$ ,  $s^3 = (-2, +2)$  e  $s^4 = (0, -2)$ ,  $s^5 = (0, 0)$ ,  $s^6 = (0, +2)$ ,  $s^7 = (+2, -2)$ ,  $s^8 = (+2, 0)$  e  $s^9 = (+2, +2)$ . O conjunto de ramos para a seção apresentada é dado por  $\mathcal{E} = \{e^1, \dots, e^l, \dots, e^{27}\}$ , na forma  $e^l = (x_k, v_k, s^S, s^E)$ , em que

$$\begin{aligned}
e^1 &= (-2, -3.258, s^1, s^1); & e^2 &= (0, -2.444, s^1, s^4); & e^3 &= (+2, -1, 630, s^1, s^7); \\
e^4 &= (-2, -2.444, s^2, s^1); & e^5 &= (0, -1.630, s^2, s^4); & e^6 &= (+2, -0.816, s^2, s^7); \\
e^7 &= (-2, -1.630, s^3, s^1); & e^8 &= (0, -0.816, s^3, s^4); & e^9 &= (+2, -0.002, s^3, s^7); \\
e^{10} &= (-2, -1.628, s^4, s^2); & e^{11} &= (0, -0.814, s^4, s^5); & e^{12} &= (+2, 0.000, s^4, s^8); \\
e^{13} &= (-2, -0.814, s^5, s^2); & e^{14} &= (0, 0.000, s^5, s^5); & e^{15} &= (+2, +0.814, s^5, s^8); \\
e^{16} &= (-2, 0.000, s^6, s^2); & e^{17} &= (0, +0.814, s^6, s^5); & e^{18} &= (+2, +1.628, s^6, s^8); \\
e^{19} &= (-2, +0.002, s^7, s^3); & e^{20} &= (0, +0.816, s^7, s^6); & e^{21} &= (+2, +1.630, s^7, s^9); \\
e^{22} &= (-2, +0.816, s^8, s^3); & e^{23} &= (0, +1.630, s^8, s^6); & e^{24} &= (+2, +2.444, s^8, s^9); \\
e^{25} &= (-2, +1.630, s^9, s^3); & e^{26} &= (0, +2.444, s^9, s^6); & e^{27} &= (+2, +3.258, s^9, s^9).
\end{aligned}$$

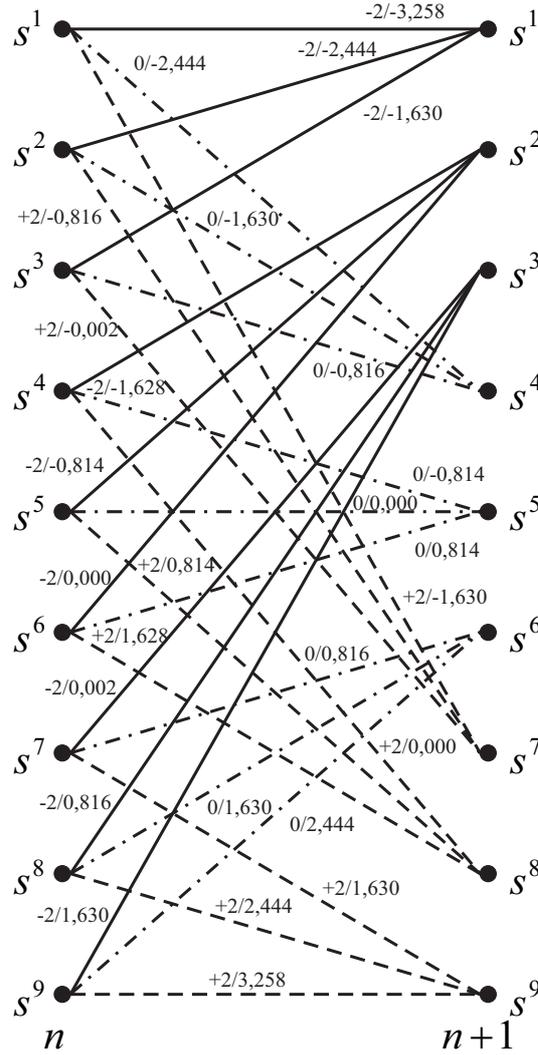
◇



**Figura 3.4:** Seção de treliça individual para os usuários 1 e 2 para o canal apresentado no Exemplo 3.1.

### 3.3 Algoritmo MMSE para o 2BAC

Do mesmo modo como apresentado na Seção 2.3, o projeto de um estimador ótimo, no sentido de minimizar o erro médio quadrático conjunto entre o sinal transmitido e o estimado



**Figura 3.5:** Seção de treliça conjunta para o canal apresentado no Exemplo 3.1.

para o  $n$ -ésimo símbolo transmitido pelos usuários 1 e 2, é dado na forma

$$\hat{x}_n = \arg \min_{x_n \in \{+2, 0, -2\}} (E \{(e_n)^2\}), \quad (3.80)$$

em que

$$e_n = x_n - \hat{x}_n, \quad (3.81)$$

na qual  $x_n = x_{1,n} + x_{2,n}$ . Como a aplicação do algoritmo MMSE-2BAC também independe da codificação utilizada, é preferida a notação adotada para  $\mathbf{c}$ , ver (3.1) e (3.2).

O projeto do algoritmo é baseado na janela de observação arbitrária da sequência  $\mathbf{z}_n = [z_{n-W_2}, \dots, z_{n-W_2+1}, \dots, z_n, \dots, z_{n+W_1}]^T$ , de comprimento  $W = W_2 + W_1 + 1$ , sendo  $W_2$  e  $W_1$  parcelas causais e não causais do estimador, respectivamente, com  $1 \leq n \leq N$ .

Desse modo, com base em  $\mathbf{H}$ , a matriz do canal de transmissão avaliada dentro da janela de observação possui dimensão  $W \times (W + M_c)$ , portanto,

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & h_{M_c} & h_{M_c-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Para ilustrar a operação de convolução discreta do sinal transmitido  $\mathbf{x}$  com o canal simulado  $\mathbf{H}_n$ , dentro da janela  $W$ , ver Exemplo 2.5.

Devido à suposição de terminação de treliça, será considerado que a variável  $z_n$  é zero para  $n < 1$  e  $n > N$ . As notações utilizadas seguem como as apresentadas na Seção 3.2.

A princípio, é considerado que  $E\{x_n^2\} < \infty$  e  $E\{z_n^2\} < \infty$ , permitindo que as variáveis aleatórias sejam modeladas estatisticamente apenas em termos de média e variância [53, p.223], assim, tem-se a média de  $x_n$  na forma

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &\triangleq E\{x_n\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} x P_n[x] \\ &= 2(P_n[x = +2] - P_n[x = -2]) \\ &= 2(P_n[c_1 = 1, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 0, c_2 = 0]), \end{aligned} \quad (3.83)$$

e variância

$$\begin{aligned} v_n &\triangleq cov\{x_n, x_n\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x_n - \bar{x}_n)^2 P_n[x] \\ &= 4(1 - P_n[c_1 = 0, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 1, c_2 = 0] - (\bar{x}_n)^2), \end{aligned} \quad (3.84)$$

considerando modulação BPSK e probabilidade  $P_n[c_1, c_2] = P_n[x]$  igual a

$$\begin{aligned} P_n[C_1 = 0, C_2 = 0] &= P_n[X = -2] = \\ &= \frac{1}{1 + \exp(\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^3(c_1, c_2; I))}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} P_n[C_1 = 0, C_2 = 1] &= P_n[X = 0] = \\ &= \frac{\Lambda_n^1(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I)}{1 + \exp(\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^3(c_1, c_2; I))}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} P_n[C_1 = 1, C_2 = 0] &= P_n[X = 0] = \\ &= \frac{\Lambda_n^2(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I)}{1 + \exp(\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^3(c_1, c_2; I))}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} P_n[C_1 = 1, C_2 = 1] &= P_n[X = +2] = \\ &= \frac{\Lambda_n^3(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}; I)}{1 + \exp(\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)) + \exp(\Lambda_n^3(c_1, c_2; I))}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

sendo obtidas a partir das definições apresentadas em (3.7), (3.8) e (3.9).

Para o cálculo das LLR's conjuntas extrínsecas relacionadas aos símbolos transmitidos pelos usuários 1 e 2,  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; O)$ ,  $\Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$  e  $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$ , a partir da estimativa  $\hat{x}_n$ , as seguintes definições são utilizadas

$$\begin{aligned} \Lambda_n^1(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 0, c_2 = 1 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\ &\approx \ln \left( \frac{P_n[\hat{x} | x = 0]}{P_n[\hat{x} | x = -2]} \right); \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_n^2(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 1, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\ &\approx \ln \left( \frac{P_n[\hat{x} | x = 0]}{P_n[\hat{x} | x = -2]} \right); \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_n^3(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 1, c_2 = 1 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = +2 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\ &\approx \ln \left( \frac{P_n[\hat{x} | x = +2]}{P_n[\hat{x} | x = -2]} \right), \end{aligned} \quad (3.91)$$

considerando modulação BPSK, ou seja,  $x \in \{-2, 0, 2\}$ . Vale salientar que a dependência temporal sobre os símbolos  $c_1$ ,  $c_2$  e  $x$  foi omitida, de mesmo modo como apresentado na Seção 3.2.

A solução para o projeto de um estimador linear ótimo pode ser definida pelo Princípio da Ortogonalidade, ver Apêndice A, assim sendo

$$E\{(x_n - \hat{x}_n)^T \mathbf{z}_n\} = \mathbf{0}_{W \times 1}, \quad \text{para todo } W_2 \leq n \leq W_1, \quad (3.92)$$

ou seja,  $x_n$  pode ser estimado por  $\hat{x}_n$  como uma projeção ortogonal ao longo da sequência  $\mathbf{z}_n$ , no intervalo  $W_2 \leq n \leq W_1$ , para funções da seguinte forma:

$$\hat{x}_n = \mathbf{a}_n^T \mathbf{z}_n + b_n, \quad (3.93)$$

com  $\mathbf{a}_n = [a_{n-W_2}, a_{n-W_2+1}, \dots, a_k, \dots, a_{n-W_1}]^T \in \mathbb{R}^W$  e  $b_n \in \mathbb{R}$  escalar [53, p.221].

Para determinar os coeficientes  $\mathbf{a}_n$  e  $b_n$ , as variáveis aleatórias  $x_n$  e  $\mathbf{z}_n$  podem ser inicialmente reduzidas para o caso de média zero fazendo  $x'_n = x_n - \bar{x}_n$  e  $\mathbf{z}'_n = \mathbf{z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n$ , em que  $\bar{x}_n \triangleq E\{x_n\}$  e  $\bar{\mathbf{z}}_n \triangleq E\{\mathbf{z}_n\}$  representam as médias das variáveis aleatórias  $x_n$  e  $\mathbf{z}_n$ , respectivamente [54, p.439]. Determinando a estimativa  $\hat{x}'_n$  a respeito de  $x'_n$  na forma  $\mathbf{a}_n^T \mathbf{z}'_n$ , tem-se que

$$\hat{x}'_n = \mathbf{a}_n^T \mathbf{z}'_n, \quad (3.94)$$

na qual, de acordo com o Princípio da Ortogonalidade,

$$\begin{aligned} E\{(x'_n - \hat{x}'_n)\mathbf{z}'_n{}^T\} &= \mathbf{0}_{W \times 1} \\ E\{\hat{x}'_n \mathbf{z}'_n{}^T\} &= E\{x'_n \mathbf{z}'_n{}^T\} \\ \mathbf{a}_n^T E\{\mathbf{z}_n \mathbf{z}'_n{}^T\} &= E\{x'_n \mathbf{z}'_n{}^T\} \\ \mathbf{a}_n^T &= E\{x'_n \mathbf{z}'_n\} (E\{\mathbf{z}'_n \mathbf{z}'_n{}^T\})^{-1} \\ \mathbf{a}_n^T &= cov\{x'_n, \mathbf{z}'_n\} cov\{\mathbf{z}'_n, \mathbf{z}'_n\}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

em que  $cov\{x'_n, \mathbf{z}'_n\}$  representa a covariância entre as variáveis aleatórias  $x'_n$  e  $\mathbf{z}'_n$  e  $cov\{\mathbf{z}'_n, \mathbf{z}'_n\}$  entre  $\mathbf{z}'_n$  e ela mesma. Usando o fato de que a covariância é invariante à adição de uma constante, então

$$\mathbf{a}_n^T = cov\{x_n, \mathbf{z}_n\} cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\}^{-1}. \quad (3.96)$$

Associando o resultado encontrado acima com a Equação (3.94), tem-se que

$$\hat{x}_n - \bar{x}_n = cov\{x_n, \mathbf{z}_n\} cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\}^{-1} (\mathbf{z}_n - \bar{\mathbf{z}}_n)$$

logo,

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + cov\{x_n, \mathbf{z}_n\} cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\}^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n). \quad (3.97)$$

Como as amostras do ruído  $n_n$  são IID, bem como, independentes de  $x_n$ , tem-se

$$\begin{aligned}
cov\{x_n, \mathbf{z}_n\} &= E\{x_n \mathbf{z}_n^T\} - E\{x_n\}E\{\mathbf{z}_n^T\} \\
&= E\{x_n \mathbf{x}_n^T\} \mathbf{H}_n^T - E\{x_n\}E\{\mathbf{x}_n^T\} \mathbf{H}^T \\
&= cov\{x_n, \mathbf{x}_n\} \mathbf{H}_n^T \\
&= cov\{x_n, x_n\} [\mathbf{0}_{1 \times (N_2 + M_c - 1)} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{(1 \times N_1)}] \mathbf{H}_n^T \\
&= v_n [\mathbf{0}_{1 \times (N_2 + M_c - 1)} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times N_1}] \mathbf{H}_n^T.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Fazendo  $\mathbf{h}_n \triangleq \mathbf{H}_n [\mathbf{0}_{1 \times (N_2 + M_c - 1)} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{(1 \times N_1)}]^T$  e  $\Sigma_n \triangleq cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\}$  e substituindo na Equação (3.97), tem-se que,

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + v_n \mathbf{h}_n^T \Sigma_n^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n). \tag{3.99}$$

em que  $\mathbf{h}_n$  é a  $(W_2 - M_c)$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{H}_n$ . Embora o canal seja considerado invariante no tempo durante a decodificação e os subscritos em  $\mathbf{H}_n$  e  $\mathbf{h}_n$  indiquem dependência temporal, serão mantidos devido à possibilidade de aplicação do algoritmo em canais com ISI variantes no tempo [19]. A matriz de covariância  $\Sigma_n$  é determinada da forma:

$$\begin{aligned}
\Sigma_n &= cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n\} = E\{\mathbf{z}_n \mathbf{z}_n^T\} - E\{x_n\}E\{\mathbf{z}_n^T\} \\
&= E\{(\mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{n}_n)(\mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{n}_n)^T\} - E\{x_n\}E\{\mathbf{x}_n^T\} \mathbf{H}^T \\
&= \mathbf{H}_n cov\{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n\} \mathbf{H}_n^T + E\{\mathbf{n}_n \mathbf{n}_n^T\} \\
&= \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T + \sigma^2 \mathbf{I}_W,
\end{aligned} \tag{3.100}$$

na qual tem  $\mathbf{I}_W$  como matriz identidade de dimensão  $W \times W$ ,  $\sigma^2$  a variância do ruído e  $\mathbf{V}_n = cov\{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n\} = diag\{v_{n-M_c-W_2} \quad v_{n-M_c-W_2+1} \quad \dots \quad v_n \quad \dots \quad v_{n+W_1}\}$  a matriz com as variâncias de  $\mathbf{x}_n$  ao longo da sua diagonal principal.

Devido à dependência da estimativa  $\hat{x}_n$  das LLR's  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)$ ,  $\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)$  e  $\Lambda_n^3(c_1, c_2; I)$ , por intermédio de  $\bar{x}_n$  e  $\bar{v}_n$ , deve ser imposto que  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; I) = \Lambda_n^2(c_1, c_2; I) = \Lambda_n^3(c_1, c_2; I) = 0$ , durante o cálculo de  $\hat{x}_n$ . É equivalente dizer que, no instante de observação  $n$ , apenas a variável aleatória  $x_n$  é igualmente distribuída, ou seja,  $P_n[c_1 = 0, c_2 = 0] = P_n[c_1 = 0, c_2 = 1] = P_n[c_1 = 1, c_2 = 0] = P_n[c_1 = 1, c_2 = 1] = 1/4$ . Desse modo,  $\bar{x}_n$  e  $\bar{v}_n$  devem ser substituídos por 0 e 2, respectivamente, ver equações (3.83) e (3.84). Portanto, pela Equação

(3.100),

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T &= \\
&= [\mathbf{h}_{n-M_c-W_2} \cdots \mathbf{h}_n \cdots \mathbf{h}_{n+W_1}] [\mathbf{v}_{n-M_c-W_2} \cdots \mathbf{v}_n \cdots \mathbf{v}_{n+W_1}] [\mathbf{h}_{n-M_c-W_2}^T \cdots \mathbf{h}_n^T \cdots \mathbf{h}_{n+W_1}^T] \\
&= v_n \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T + \sum_{\substack{i=n-M_c-W_2 \\ i \neq n}}^{n+W_1} v_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T,
\end{aligned} \tag{3.101}$$

e impondo a condição  $v_n = 2$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T |_{v_n=2} &= v_n \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T + 2\mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T - v_n \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T + \sum_{\substack{i=n-M_c-W_2 \\ i \neq n}}^{n+W_1} v_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T \\
&= (2 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T + \sum_{i=n-M_c-W_2}^{n+W_1} v_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

De forma análoga, para  $\bar{x}_n = 0$ , faz-se

$$\mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n |_{\bar{x}_n=0} = \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n - \bar{x}_n \mathbf{h}_n, \tag{3.103}$$

e, substituindo as equações (3.102) e (3.103) na Equação (3.99), tem-se que

$$\hat{x}_n = 2\mathbf{h}_n^T [\boldsymbol{\Sigma}_n + (2 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T]^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \bar{x}_n \mathbf{h}_n). \tag{3.104}$$

Utilizando o Lema de Inversão de Matrizes [55], ver Apêndice B, o termo  $[\boldsymbol{\Sigma}_n + (2 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T]^{-1}$  da Equação (3.104) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\Sigma}_n + (2 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T]^{-1} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n [(2 - v_n)^{-1} + \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n]^{-1} \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}}{(2 - v_n)^{-1} + \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n} \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} - \frac{(2 - v_n) \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}}{1 + (2 - v_n) \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n},
\end{aligned} \tag{3.105}$$

e, substituindo na Equação (3.104), tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n &= 2\mathbf{h}_n^T \left[ \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} - \frac{(2 - v_n) \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}}{1 + (2 - v_n) \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n} \right] (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \bar{x}_n \mathbf{h}_n) \\
&= 2 \left[ \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} - \frac{(2 - v_n) \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}}{1 + (2 - v_n) \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n} \right] (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \bar{x}_n \mathbf{h}_n),
\end{aligned} \tag{3.106}$$

bem como, definindo  $s_n \triangleq \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n$ , devido a  $\mathbf{f}_n \triangleq \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n$ , com isso,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n &= 2 \left[ 1 - \frac{(2 - v_n) s_n}{1 + (2 - v_n) s_n} \right] \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \bar{x}_n \mathbf{h}_n) \\
&= \frac{2 \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right]}{1 + (2 - v_n) s_n},
\end{aligned} \tag{3.107}$$

e, ainda

$$\hat{x}_n = 2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right], \quad (3.108)$$

com  $K_n = [1 + (2 - v_n) s_n]^{-1}$ .

É assumido que a estimativa  $\hat{x}_n$  possui FDP gaussiana  $p_n(\hat{x}|x)$  de média  $E\{\hat{x}_n|x_n = x\}$  e variância  $cov\{\hat{x}_n, \hat{x}_n|x_n = x\}$  [56]. Assim, o cálculo das LLR's  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; O)$ ,  $\Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$  e  $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$  é simplificado. Portanto, a média condicional de  $\hat{x}_n$  é dada por

$$\begin{aligned} \mu_{n,x} &= E\{\hat{x}_n|x_n = x\} = E\{2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right] | x_n = x\} \\ &= 2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (E\{\mathbf{z}_n|x_n = x\} - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right] \\ &= 2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{H}E\{\mathbf{x}_n|x_n = x\} - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right] \\ &= 2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{H}E\{\mathbf{x}_n|x_n = x\} - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

sabendo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}E\{\mathbf{x}_n|x_n = x\} - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) &= x \mathbf{h}_n + \sum_{\substack{i=n-M_c-W_2 \\ i \neq n}}^{n+W_1} \bar{x}_i \mathbf{h}_i - \left( \bar{x}_n \mathbf{h}_n + \sum_{\substack{i=n-M_c-W_2 \\ i \neq n}}^{n+W_1} \bar{x}_i \mathbf{h}_i \right), \\ &= x \mathbf{h}_n - \bar{x}_n \mathbf{h}_n \end{aligned} \quad (3.110)$$

e, substituindo o resultado na Equação (3.109), tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mu_{n,x} &= 2K_n \left[ \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} (x \mathbf{h}_n - \bar{x}_n \mathbf{h}_n) + \bar{x}_n s_n \right] \\ &= 2x K_n s_n. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Por sua vez, o cálculo da variância condicional de  $\hat{x}_n$  é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{n,x}^2 &= cov\{\hat{x}_n, \hat{x}_n|x_n = x\} = 4K_n^2 \mathbf{f}_n^T cov\{\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n|x_n = x\} \mathbf{f}_n \\ &= 4K_n^2 \mathbf{f}_n^T (\boldsymbol{\Sigma}_n + v_n \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T) \mathbf{f}_n \\ &= 4K_n^2 (\mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n - v_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n) \\ &= 4K_n^2 s_n (1 - v_n s_n). \end{aligned} \quad (3.112)$$

A função densidade de probabilidade gaussiana  $p(\hat{x}_n|x_n = x)$  é dada por intermédio de

$$p_n(\hat{x}|x = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n,x}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x}_n - \mu_{n,x})^2}{2\sigma_{n,x}^2}\right), \quad (3.113)$$

que, por sua vez, tem como LLR's associadas aos usuários 1 e 2 na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Lambda_n^1(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 0, c_2 = 1 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\
&= \ln \left( \frac{p_n(\hat{x} | x = 0)}{p_n(\hat{x} | x = -2)} \right) = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n,x}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x}_n - \mu_{n,0})^2}{2\sigma_{n,x}^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n,x}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x}_n - \mu_{n,-2})^2}{2\sigma_{n,x}^2}\right)} \\
&= -\frac{(\hat{x}_n)^2}{2\sigma_{n,x}^2} + \frac{(\hat{x}_n + 4K_n s_n)^2}{2\sigma_{n,x}^2} \\
&= \frac{8\hat{x}_n K_n s_n + 16K_n^2 s_n^2}{8K_n^2 s_n (1 - v_n s_n)} = \frac{\hat{x}_n + 2K_n s_n}{K_n (1 - v_n s_n)} \\
&= \frac{2K_n \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right] + 2K_n s_n}{K_n (1 - v_n s_n)} \\
&= \frac{2 \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + s_n (1 + \bar{x}_n) \right]}{1 - v_n s_n}; \tag{3.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_n^2(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 1, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = 0 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\
&= \ln \left( \frac{p_n(\hat{x} | x = 0)}{p_n(\hat{x} | x = -2)} \right) \\
&= \frac{2 \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + s_n (1 + \bar{x}_n) \right]}{1 - v_n s_n}; \tag{3.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_n^3(c_1, c_2; O) &= \ln \left( \frac{P_n[c_1 = 1, c_2 = 1 | \mathbf{z}_n]}{P_n[c_1 = 0, c_2 = 0 | \mathbf{z}_n]} \right) = \ln \left( \frac{P_n[x = +2 | \mathbf{z}_n]}{P_n[x = -2 | \mathbf{z}_n]} \right) \\
&= \ln \left( \frac{p_n(\hat{x} | x = +2)}{p_n(\hat{x} | x = -2)} \right) = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n,x}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x}_n - \mu_{n,+2})^2}{2\sigma_{n,x}^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n,x}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x}_n - \mu_{n,-2})^2}{2\sigma_{n,x}^2}\right)} \\
&= -\frac{(\hat{x}_n - 4K_n s_n)^2}{2\sigma_{n,x}^2} + \frac{(\hat{x}_n + 4K_n s_n)^2}{2\sigma_{n,x}^2} \\
&= \frac{8\hat{x}_n K_n s_n}{4K_n^2 s_n (1 - v_n s_n)} = \frac{2\hat{x}_n}{K_n (1 - v_n s_n)} \\
&= \frac{4 \left[ \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \bar{\mathbf{x}}_n) + \bar{x}_n s_n \right]}{1 - v_n s_n}. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Inicialmente, como o equalizador não possui conhecimento sobre os usuários 1 e 2, estima-se que o conhecimento *a priori*  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; I) = \Lambda_n^2(c_1, c_2; I) = \Lambda_n^3(c_1, c_2; I) = 0$ , durante a inicialização do algoritmo MMSE-2BAC. Na Tabela 3.3, pode ser visualizado o algoritmo MMSE em pseudocódigo proposto para o 2-BAC, com modulação BPSK. O algoritmo pode ser utilizado sem a existência de informação *a priori* a respeito dos usuários, o que torna

$\bar{x}_n = 0$  e  $v_n = 2, \forall n$ , portanto,

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{h}_n |_{v_n=2, \forall n} = (\sigma^2 \mathbf{I}_W + 2\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^T)^{-1} \mathbf{h}_n. \quad (3.117)$$

**Tabela 3.3:** *Algoritmo MMSE-2BAC.*

<b>ENTRADA</b>	
$\Lambda_n(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
$\Lambda_n(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
$\Lambda_n(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>	
Calcule (ver Equação (3.85))	
$\bar{x}_n = 2[P_n[c_1 = 1, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 0, c_2 = 0]]$ e	
$v_n = 4[1 - P_n[c_1 = 0, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 1, c_2 = 0] - (\bar{x}_n)^2]$ para $n = 1, \dots, N$	
<b>ALGORITMO - MMSE-2BAC</b>	
<b>PARA</b> $n = 1$ <b>ATÉ</b> $N$ , <b>FAÇA</b>	
$\mathbf{f}_n = (\sigma^2 \mathbf{I}_W + \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T)^{-1} \mathbf{h}_n$	
$r_n = \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H} \mathbf{x}_n)$	
$s_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n$	
$\Lambda_n^1(c_1, c_2; O) = \Lambda_n^2(c_1, c_2; O) = \frac{2[r_n + s_n(1 + \bar{x}_n)]}{1 - v_n s_n}$	
$\Lambda_n^3(c_1, c_2; O) = \frac{4[r_n + \bar{x}_n s_n]}{1 - v_n s_n}$	
<b>FIM PARA</b>	
<b>SAÍDA</b>	
$\Lambda_n^1(c_1, c_2; O), \Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$ e $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$ para $n = 1, \dots, N$	

### 3.3.1 Algoritmo Recursivo MMSE para o 2-BAC

O algoritmo MMSE-2BAC requer o cálculo das LLR's  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; O)$ ,  $\Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$  e  $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$  para cada  $n$ . O alto custo computacional está vinculado à obtenção da matriz inversa  $\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}$ , uma operação que depende do número de elementos de memórias  $M_c$  consideradas no canal, da janela de observação  $W$ , e ainda, ampliado quando utilizado em algoritmos de decodificação iterativa. Entretanto, é possível explorar a dependência temporal da matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  para desenvolver um algoritmo recursivo mais eficiente de um estimador linear ótimo, no sentido de minimizar o erro médio quadrático conjunto [56], aqui denominado RMMSE-2BAC.

Inicialmente, pela Equação (3.100), a matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  pode ser reescrita para instantes consecutivos de observação,  $n$  e  $n + 1$ , desse modo,

$$\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{H}_n^T = v_{n-M_c-W_2} \mathbf{h}_{n-M_c-W_2} \mathbf{h}_{n-M_c-W_2}^T + \sum_{i=n-M_c-W_2+1}^{n+W_1} v_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T \quad (3.118)$$

e

$$\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{V}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^T = \sum_{i=n-M_c-W_2+1}^{n+W_1} v_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T + v_{n+W_1+1} \mathbf{h}_{n+W_1+1} \mathbf{h}_{n+W_1+1}^T \quad (3.119)$$

sendo, portanto, factível o particionamento das matrizes  $\mathbf{\Sigma}_n$  e  $\mathbf{\Sigma}_{n+1}$  no seguinte formato:

$$\mathbf{\Sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_A & \boldsymbol{\sigma}_A^T \\ \boldsymbol{\sigma}_A & \mathbf{\Sigma}_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_P & \boldsymbol{\sigma}_P \\ \boldsymbol{\sigma}_P^T & \sigma_P \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

nas quais,  $\mathbf{\Sigma}_A$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_P$  são matrizes de dimensão  $(W-1) \times (W-1)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_A$  e  $\boldsymbol{\sigma}_P$  são vetores coluna de dimensão  $(W-1) \times 1$ , e  $\sigma_A$  e  $\sigma_P$  escalares. Os subscritos  $A$  e  $P$  representam quantidades no tempo atual e próximo, nessa ordem. Pelas equações (3.118), (3.119) e (3.120), nota-se que as matrizes  $\mathbf{\Sigma}_A$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_P$  são iguais. Realizando o mesmo particionamento para as inversas  $\mathbf{\Sigma}_n^{-1}$  e  $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^{-1}$ , tem-se que

$$\mathbf{\Sigma}_n^{-1} = \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} u_A & \mathbf{u}_A^T \\ \mathbf{u}_A & \mathbf{U}_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Sigma}_{n+1}^{-1} = \mathbf{U}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_P & \mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P^T & u_P \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

A construção do algoritmo recursivo MMSE-2BAC consiste na observação de que, dado  $\mathbf{\Sigma}_A = \boldsymbol{\Sigma}_P$ , então  $\mathbf{U}_A = \mathbf{U}_P$ , sendo necessário apenas a atualização das submatrizes  $u_P$ ,  $\mathbf{u}_P$  e  $\mathbf{U}_A$  por intermédio de  $\mathbf{U}_P$ .

Desse modo, o sistema de equação  $\mathbf{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_W$  pode ser resolvido para  $\mathbf{\Sigma}_A^{-1}$ , conseqüentemente,

$$\begin{bmatrix} \sigma_A & \boldsymbol{\sigma}_A^T \\ \boldsymbol{\sigma}_A & \mathbf{\Sigma}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A & \mathbf{u}_A^T \\ \mathbf{u}_A & \mathbf{U}_A \end{bmatrix} = \mathbf{I}_W \quad (3.122)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{u}_A^T + \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{U}_A = \mathbf{I}_{W-1} \\ \boldsymbol{\sigma}_A u_A + \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{u}_A = \mathbf{0}_{W-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{u}_A^T + \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{U}_A = \mathbf{I}_{W-1} \\ \boldsymbol{\sigma}_A u_A + \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{u}_A = \mathbf{0}_{W-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\Sigma}_A^{-1} = \mathbf{\Sigma}_A^{-1} \boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{u}_A^T + \mathbf{U}_A \\ \mathbf{\Sigma}_A^{-1} \boldsymbol{\sigma}_A = -\frac{\mathbf{u}_A}{u_A} \end{cases}, \quad (3.123)$$

portanto,

$$\mathbf{\Sigma}_A^{-1} = \mathbf{U}_A - \frac{\mathbf{u}_A \mathbf{u}_A^T}{u_A} \quad (3.124)$$

na qual  $\mathbf{\Sigma}_A^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_P^{-1}$ . Pelas equações (3.100) e (3.118), as quantidades  $\boldsymbol{\sigma}_P$  e  $\sigma_P$  são expressas de modo que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_P \\ \sigma_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W-1 \\ & \sigma^2 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{V}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W-1 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

e, em conjunto com  $\Sigma_P^{-1}$ , definem as submatrizes  $\mathbf{U}_P$ ,  $\mathbf{u}_P$  e  $u_P$  a partir de  $\Sigma_{n+1}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{I}_W$ , logo

$$\begin{bmatrix} \Sigma_P & \sigma_P \\ \sigma_P^T & \sigma_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_P & \mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P^T & u_P \end{bmatrix} = \mathbf{I}_W \Rightarrow \begin{cases} \Sigma_P \mathbf{U}_P + \sigma_P \mathbf{u}_P^T = \mathbf{I}_{W-1} \\ \Sigma_P \mathbf{u}_P + \sigma_P u_P = \mathbf{0}_{W-1} \\ \sigma_P^T \mathbf{u}_P + \sigma_P u_P = 1 \end{cases}, \quad (3.126)$$

desse modo,

$$u_P = \frac{1}{\sigma_P - \sigma_P^T \sigma'_P} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{u}_P = -u_P \sigma'_P \quad (3.128)$$

$$\mathbf{U}_P = \Sigma_P^{-1} + \mathbf{u}_P^T \sigma'_P \sigma'^T_P, \quad (3.129)$$

em que  $\sigma'_P = \Sigma_P^{-1} \sigma_P$ .

Pode ser visto que, pelas equações (3.125), (3.128) e (3.129) e tendo a expressão  $\Sigma_A^{-1} = \Sigma_P^{-1}$  como base, as submatrizes  $\mathbf{U}_P$ ,  $\mathbf{u}_P$  e  $u_P$  são obtidas para compor recursivamente a matriz inversa  $\Sigma_{n+1}^{-1}$  com ponto de partida  $\Sigma_1^{-1} = \sigma^2 \mathbf{I}_W + \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{H}_1^T$ . As LLR's  $\Lambda_n^1(c_1, c_2; O)$ ,  $\Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$  e  $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$  são igualmente obtidas pelas equações (3.114), (3.115) e (3.116). O algoritmo recursivo para o estimador linear do  $n$ -ésimo símbolo transmitido  $\hat{x}_n = \hat{x}_{1,n} + \hat{x}_{2,n}$  pelos usuários 1 e 2, RMMSE-2BAC, é descrito em pseudocódigo na Tabela 3.4.

### 3.4 Equalização Iterativa para o 2-BAC-ISI

Um sistema de detecção MAP ótimo para o sistema apresentado se torna inviável quando  $K$  cresce, conforme discutido na Seção 2.1. Uma alternativa subótima consiste na divisão do problema em dois, equalização e decodificação, formando um sistema de detecção iterativo inspirado na estrutura dos códigos concatenados apresentados em [43, 57]. Aqui denotado Equalização Iterativa para o 2-BAC, a técnica consiste em avaliar separadamente os efeitos do canal e da codificação utilizada pelos usuários 1 e 2. Assim como apresentado na Seção 2.4, o sistema consiste na concatenação em série de dois sublocos, um Equalizador, responsável por tentar eliminar os efeitos de um MAC com ISI; e um decodificador, que decodifica com base na informação fornecida pelo Equalizador e na estrutura dos códigos aplicados aos usuários. A troca de informações extrínsecas entre equalizador e decodificador, a cada iteração, permite uma estimativa mais confiável acerca dos símbolos transmitidos por ambos os usuários.

**Tabela 3.4:** Algoritmo RMMSE-2BAC.

<b>ENTRADA</b>	
$\Lambda_n^1(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
$\Lambda_n^2(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
$\Lambda_n^3(c_1, c_2; I)$	para $n = 1, \dots, N$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>	
Calcule (ver Equação (3.85))	
$\bar{x}_n = 2[P_n[c_1 = 1, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 0, c_2 = 0]]$ e	
$v_n = 4[1 - P_n[c_1 = 0, c_2 = 1] - P_n[c_1 = 1, c_2 = 0] - (\bar{x}_n)^2]$ para $n = 1, \dots, N$	
e	
$\mathbf{R} = (\sigma^2 \mathbf{I}_W + \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{H}_1^T)^{-1}$	
<b>ALGORITMO - RMMSE-2BAC</b>	
<b>PARA</b> $n = 1$ <b>ATÉ</b> $N$ , <b>FAÇA</b>	
$\mathbf{f}_n = \mathbf{R} \mathbf{h}_n$	
$r_n = \mathbf{f}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H} \mathbf{x}_n)$	
$s_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{h}_n$	
$\Lambda_n^1(c_1, c_2; O) = \Lambda_n^2(c_1, c_2; O) = \frac{2[r_n + s_n(1 + \bar{x}_n)]}{1 - v_n s_n}$	
$\Lambda_n^3(c_1, c_2; O) = \frac{4[r_n + \bar{x}_n s_n]}{1 - v_n s_n}$	
<b>SE</b> $n < N$ <b>FAÇA</b>	
$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & u \end{bmatrix} = \mathbf{R}$	
$\mathbf{U} = \mathbf{U} - \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^T}{u}$	
$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{W-1} \\ \sigma^2 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{V}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{W-1} \\ 1 \end{bmatrix}$	
$\mathbf{u}' = \mathbf{U} \mathbf{u}$	
$u = \frac{1}{u - \mathbf{u}^T \mathbf{u}'}$	
$\mathbf{u} = -u \mathbf{u}'$	
$\mathbf{U} = \mathbf{U} + u \mathbf{u}' \mathbf{u}'^T$	
$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u & \mathbf{u}^T \\ \mathbf{u} & \mathbf{U} \end{bmatrix}$	
<b>FIM SE</b>	
<b>FIM PARA</b>	
<b>SAÍDA</b>	
$\Lambda_n^1(c_1, c_2; O)$ , $\Lambda_n^2(c_1, c_2; O)$ e $\Lambda_n^3(c_1, c_2; O)$ para $n = 1, \dots, N$	

Denotado SISO-2BAC, o bloco decodificador utilizado é o mesmo apresentado na Figura

2.8, com

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \cdot) = \begin{bmatrix} \Lambda^1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \cdot) \\ \Lambda^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \cdot) \\ \Lambda^3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \cdot) \end{bmatrix}; \quad (3.130)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; \cdot) = \begin{bmatrix} \Lambda^1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; \cdot) \\ \Lambda^2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; \cdot) \\ \Lambda^3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; \cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

em que,  $\Lambda^i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \cdot) = [\Lambda^i(u_{1,1}, u_{2,1}; \cdot) \dots \Lambda^i(u_{1,k}, u_{2,k}; \cdot) \dots \Lambda^i(u_{1,K}, u_{2,K}; \cdot)]^T$  e  $\Lambda^i(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; \cdot) = [\Lambda^i(c_{1,1}, c_{2,1}; \cdot) \dots \Lambda^i(c_{1,n}, c_{2,n}; \cdot) \dots \Lambda^i(c_{1,N}, c_{2,N}; \cdot)]^T$ , para  $i = 1, 2, 3$ . O decodificador possui o algoritmo A-SISO-2BAC embarcado, com a função de fornecer estimativas conjuntas atualizadas acerca dos símbolos de informação e sequências código transmitidos pelos usuários 1 e 2.

Para o bloco Equalizador, são abordadas duas técnicas, uma baseada em filtragem linear, o algoritmo MMSE-2BAC, e outra na representação do canal como uma treliça, o algoritmo SISO-2BAC. O bloco utilizado é o mesmo apresentado na Seção 2.4, ver Figura 2.9. O módulo Equalizador possui duas entradas e uma saída, que fornece a sequência de informação extrínseca atualizada de saída  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$ , mediante observação do canal e da sequência de informação *a priori*  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$ . A definição para  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; I)$  e  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2; O)$  é a mesma adotada pela Equação (3.131).

Será adotada a distinção em que, um sistema de Equalização Iterativa que faça uso do algoritmo SISO-2BAC embutido no módulo Equalizador é denotado Equalizador SISO-2BAC, caso aplicado o algoritmo MMSE-2BAC, tem-se o Equalizador MMSE-2BAC.

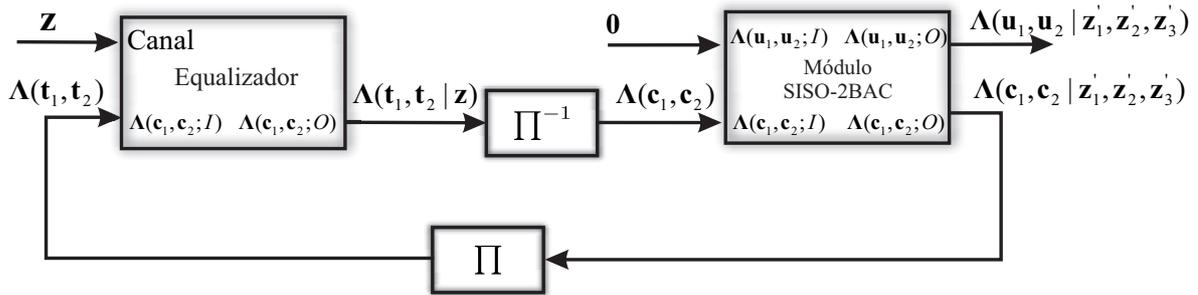
Na Figura 3.6 pode ser visto o sistema de Equalização Iterativa para o 2-BAC proposto. A metodologia segue como descrito na Seção 2.4. Desse modo, o módulo Equalizador recebe as observações do canal  $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_n \dots z_N]^T$  e fornece na saída as sequências de informação conjunta suave *a posteriori* a respeito dos símbolos transmitidos pelos usuários 1 e 2,  $\Lambda^1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$  e  $\Lambda^3(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$ . Como o módulo inicialmente desconhece qualquer informação sobre  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , tem-se que  $\Lambda^1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Lambda^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Lambda^3(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \mathbf{0}_N$ . Embora os algoritmos propostos produzam estimativas  $\hat{x}_n$ , nota-se que  $P_n[t_{1,n} = t_1, t_{2,n} = t_2] = P_n[x_n = x]$ , com  $t_1, t_2 \in \{0, 1\}$  e  $x \in \{+2, 0, -2\}$ , portanto,  $\Lambda_n(t_{1,n}, t_{2,n}) = \Lambda_n(x_n)$ .

Logo após, os vetores  $\Lambda^1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$  e  $\Lambda^3(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2|\mathbf{z})$  são desentrelaçados gerando as sequências  $\Lambda^1(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2)$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  e  $\Lambda^3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ , para que sejam utilizadas como informação

extrínseca *a priori* pelo módulo SISO.

Por conveniência de exposição, faz-se  $\Lambda^1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{z}'_1$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{z}'_2$  e  $\Lambda^3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{z}'_3$ . Devido ao Equalizador SISO fornecer somente estimativas a respeito das sequências código  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$ , tem-se que  $\Lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}_K$ . O módulo SISO fornece as estimativas atualizadas a respeito dos símbolos de informação  $\Lambda^1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ , e  $\Lambda^3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ , e a respeito das sequências código  $\Lambda^1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$  e  $\Lambda^3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ .

A informação extrínseca suave associada às sequências código são entrelaçadas para formar os vetores  $\Lambda^1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  e  $\Lambda^3(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ . Dessa forma, a informação extrínseca *a priori* acerca das sequências código é utilizada pelo módulo Equalizador na próxima iteração, com o objetivo de melhorar as estimativas sobre esses símbolos. O ciclo se repete até que algum critério de parada seja atingido, com a decisão ocorrendo para  $\Lambda^1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ ,  $\Lambda^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$  e  $\Lambda^3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 | \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$ , de acordo com a Equação (3.25).



**Figura 3.6:** *Equalização Iterativa para o 2-BAC.*

O sistema de Equalização Iterativa para o 2-BAC é apresentado na Tabela 3.5 na forma de pseudocódigo. Para o algoritmo apresentado, a equalização terminará quando o número máximo de iterações " $i_{max}$ " for atingido.

No Capítulo 4 são apresentados alguns resultados referentes à aplicação da Equalização Iterativa, obtidos por intermédio de simulações computacionais, quando empregados os algoritmos SISO-2BAC e MMSE-2BAC.

**Tabela 3.5:** *Equalização Iterativa para o 2-BAC.*

<b>ENTRADA</b>
Vetor de observação $\mathbf{z}$ e $i_{max}$
<b>INICIALIZAÇÃO</b>
Faça $\Lambda(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \mathbf{0}_{N \times 3}$ , $\Lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}_{K \times 3}$ e $i = 1$
<b>ALGORITMO - Equalização Iterativa 2-BAC</b>
<b>ENQUANTO</b> $i \leq i_{max}$ , <b>FAÇA</b>
$\Lambda(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2   \mathbf{z}) = \text{Equalizador}(\mathbf{z}, \Lambda(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2))$
$\Lambda(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \text{Desentrelaçador}(\Lambda(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2   \mathbf{z}))$
$\Lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2   \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3), \Lambda(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2   \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3) = \text{Módulo\_SISO}(\Lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \Lambda(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2))$
$\Lambda(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \text{Entrelaçador}(\Lambda(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2   \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3))$
$i = i + 1$
<b>FIM ENQUANTO</b>
<b>SAÍDA</b>
$\Lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2   \mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3)$

## 4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo são aplicadas as teorias descritas nos capítulos 2 e 3. O objetivo é confrontar desempenhos, em termos de BER, para os equalizadores iterativos propostos para dois canais com ISI distintos, denotados canais A e B, com simulações realizadas em computador. Também é investigada a interferência aditiva causada pelo acesso de mais um usuário ao canal de transmissão. No Apêndice C, é apresentado os mesmo resultados, porém, de forma isolada, para melhor visualização das figuras. Os usuários utilizam codificadores convolucionais e entrelaçadores pseudo-aleatórios de comprimento  $L = 1024$ , bem como, a modulação BPSK em mesma faixa de frequência. O receptor realiza a equalização e decodificação em blocos de  $K = 1024$  bits, com a suposição de sincronização dos bits e blocos transmitidos entre os usuários e o receptor [52]. Admite-se que o canal é conhecido pelo receptor e é invariante no tempo durante o período de detecção.

### 4.1 Descrição dos modelos simulados

Para investigar o desempenho dos equalizadores SISO-2BAC e MMSE-2BAC propostos, em termos de BER versus relação sinal ruído (SNR, *signal-to-noise ratio*), dois canais com ISI são considerados, denominados canais A e B, com número de elementos de memórias 2 e 4, respectivamente. Ambos podem ser vistos na Tabela 4.1, e apresentam severa ISI [1, p.654].

**Tabela 4.1:** *Canais com ISI simulados.*

Canal simulado	Coefficientes
Canal A	$h_A = [0,407 \quad 0,815 \quad 0,407]$
Canal B	$h_B = [0,227 \quad 0,460 \quad 0,688 \quad 0,460 \quad 0,227]$

As simulações são realizadas segundo os sistemas propostos nas Seções 2.1 e 3.1, com o objetivo de confrontar desempenhos entre canais com e sem acesso múltiplo, visto o caso

particular 2-BAC.

Para os usuários 1 e 2, são utilizados códigos convolucionais de taxa de código 1/2, quando transmitidos pelo canal A, e taxa de código 1/3, quando transmitidos pelo canal B. Ambos possuem  $M_1 = M_2 = 3$  elementos de memória. As matrizes geradoras utilizadas pelos usuários são vistas nas Tabelas 4.2 e 4.3.

**Tabela 4.2:** Matrizes geradoras - Canal A.

Canal A	
Usuário 1	$G_{1A}(D) = [1 + D + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3]$
Usuário 2	$G_{2A}(D) = [1 + D + D^2 + D^3 \quad 1 + D^2 + D^3]$

**Tabela 4.3:** Matrizes geradoras - Canal B

Canal B	
Usuário 1	$G_{1B}(D) = [1 + D + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 \quad 1 + D^2 + D^3]$
Usuário 2	$G_{2B}(D) = [1 + D + D^2 + D^3 \quad 1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D^3]$

São utilizados entrelaçadores pseudo-aleatórios de comprimento  $L = 1024$  e modulação BPSK na sequência código permutada, para ambos usuários. O receptor é formado pelos sub-blocos equalizador e decodificador, com esse último tendo o algoritmo SISO 2-BAC embutido. O equalizador MMSE-2BAC aplica o algoritmo MMSE-2BAC na sequência recebida, ao passo que o SISO-2BAC aplica o algoritmo SISO-2BAC.

A BER é apresentada em função da SNR,  $E_b/N_0$  em dB, em que  $E_b$  é a energia por bit do sinal e  $N_0$  é a potência do ruído. A energia por bit pode ser obtida na forma

$$E_b = \frac{E_s}{R}, \quad (4.1)$$

ao qual  $E_s$  é a energia por bloco de sinal e  $R$  é a taxa do código dada por

$$R = R_1 + R_2, \quad (4.2)$$

com  $R_1$  e  $R_2$  dadas pela taxas individuais dos códigos dos usuários 1 e 2, respectivamente.

A SNR por bit pode ser escrita na forma

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{RN_0}, \quad (4.3)$$

que, caso expressa em dB, tem-se

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR, \quad (4.4)$$

ou seja,

$$SNR = 10^{\frac{SNR_{dB}}{10}}. \quad (4.5)$$

A variância AWGN é dada por

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}, \quad (4.6)$$

e substituindo na Equação (4.3), tem-se que

$$SNR = \frac{E_s}{2R\sigma^2}, \quad (4.7)$$

permitindo que, desse modo, a variância seja expressa na forma

$$\sigma^2 = \frac{E_s}{2R \times 10^{\left(\frac{SNR_{dB}}{10}\right)}}. \quad (4.8)$$

Considerando que, por exemplo, a transmissão ocorra através de um canal com ISI normalizado e  $P[x_1 = -1, x_2 = -1] = P[x_1 = -1, x_2 = +1] = P[x_1 = -1, x_2 = +1] = P[x_1 = +1, x_2 = +1]$ , a energia média por bloco de sinal é dada por

$$E_s = \frac{1}{4} \left[ (-2)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (+2)^2 \right] = 2. \quad (4.9)$$

Para o caso particular das taxas de código  $R_1 = R_2 = 1/2$ , a variância dada pela Equação (4.8) pode ser reescrita na forma

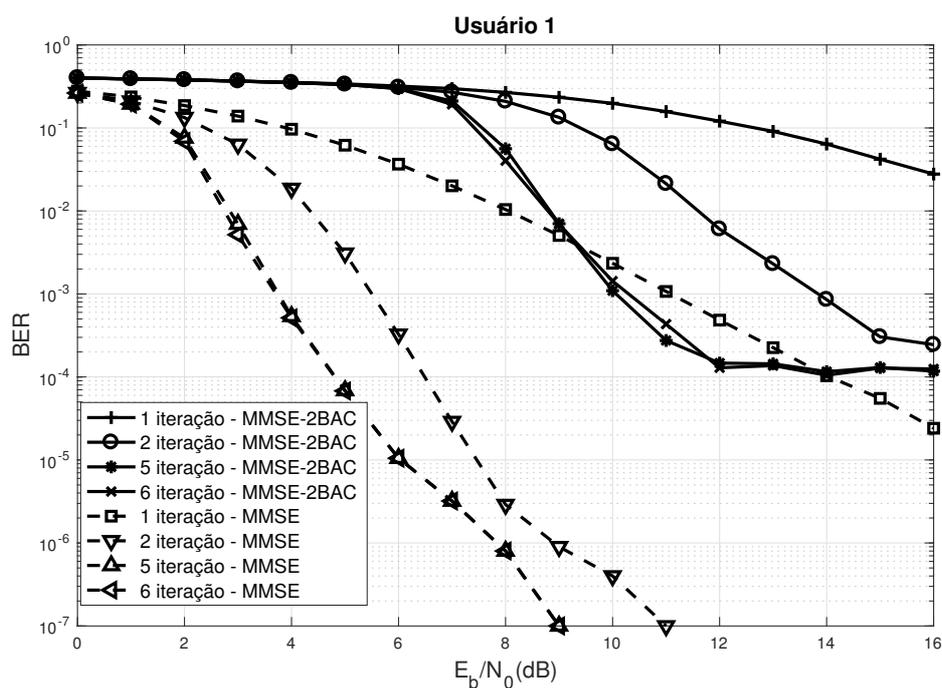
$$\sigma^2 = \frac{1}{10^{\left(\frac{SNR_{dB}}{10}\right)}}, \quad (4.10)$$

ou, ainda, para taxas de código  $R_1 = R_2 = 1/3$ ,

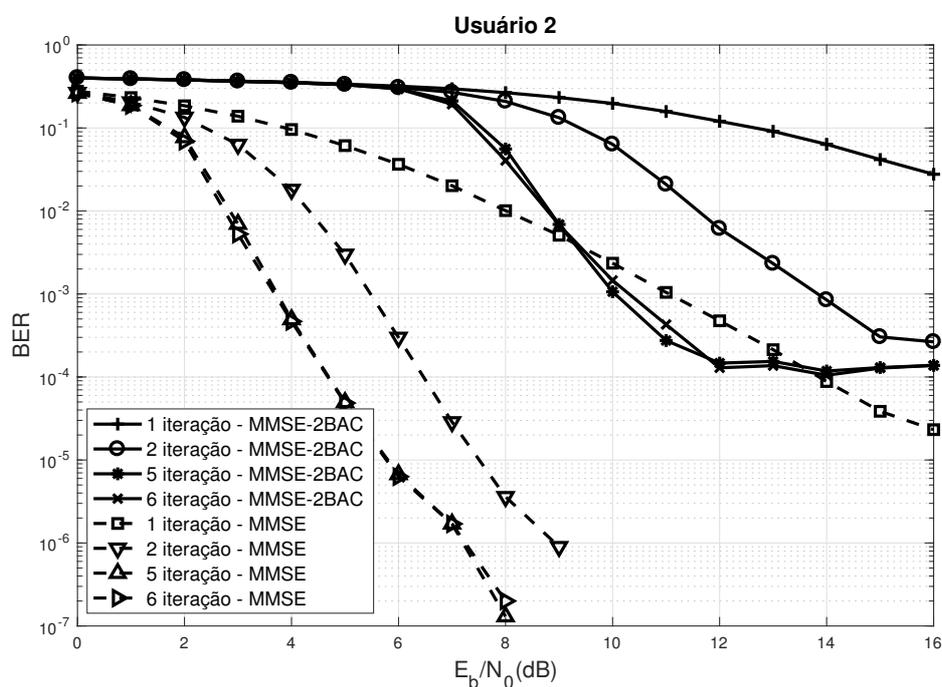
$$\sigma^2 = \frac{3}{2 \times 10^{\left(\frac{SNR_{dB}}{10}\right)}}. \quad (4.11)$$

## 4.2 Simulação - Canal A

Nas figuras 4.1 e 4.2 são vistas as curvas de BER em função da SNR, em dB, dos usuários 1 e 2, com transmissão através do canal A. Para efetuar a comparação entre as transmissões com e sem acesso múltiplo, inicialmente, os usuários transmitem isoladamente e empregam o equalizador MMSE na recepção, com seis iterações. Posteriormente, é empregado



**Figura 4.1:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem acesso múltiplo - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 1.



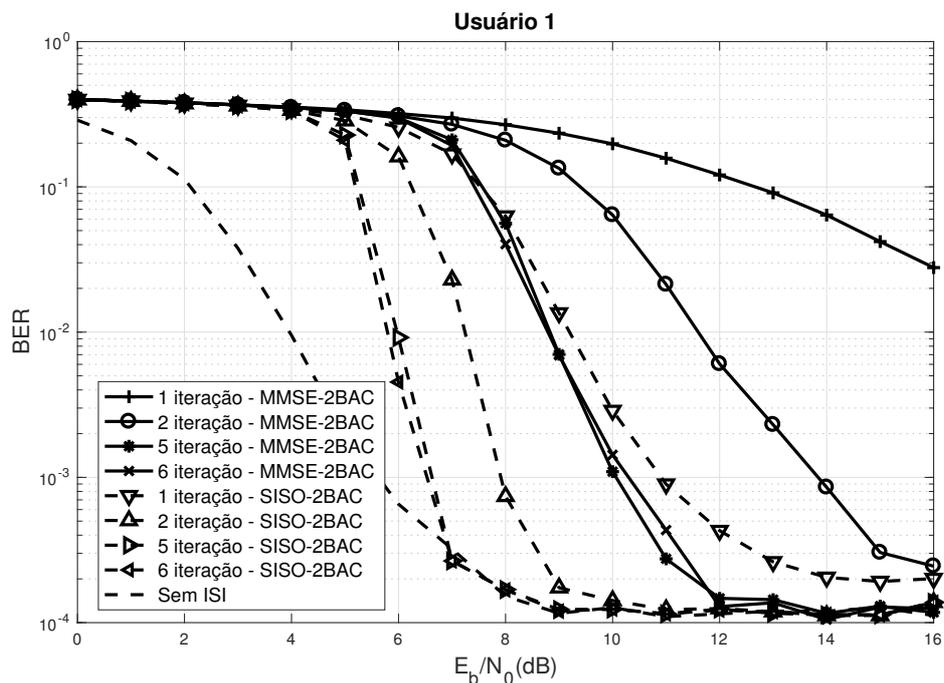
**Figura 4.2:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem acesso múltiplo - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 2.

o equalizador MMSE-2BAC com  $W_1 = 15$  e  $W_2 = 11$ , para transmissão através do 2-BAC. Os usuários fazem uso de codificadores convolucionais de taxa de código 1/2, memória  $M_1 = M_2 = 3$ , como apresentados na Tabela 4.2.

Dentro da faixa de SNR simulada, nota-se que o comportamento para ambos os usuários é semelhante. A adição de um usuário resulta em uma perda de, aproximadamente, 7 dB, quando avaliados na sexta iteração, para uma BER em torno de  $10^{-4}$ .

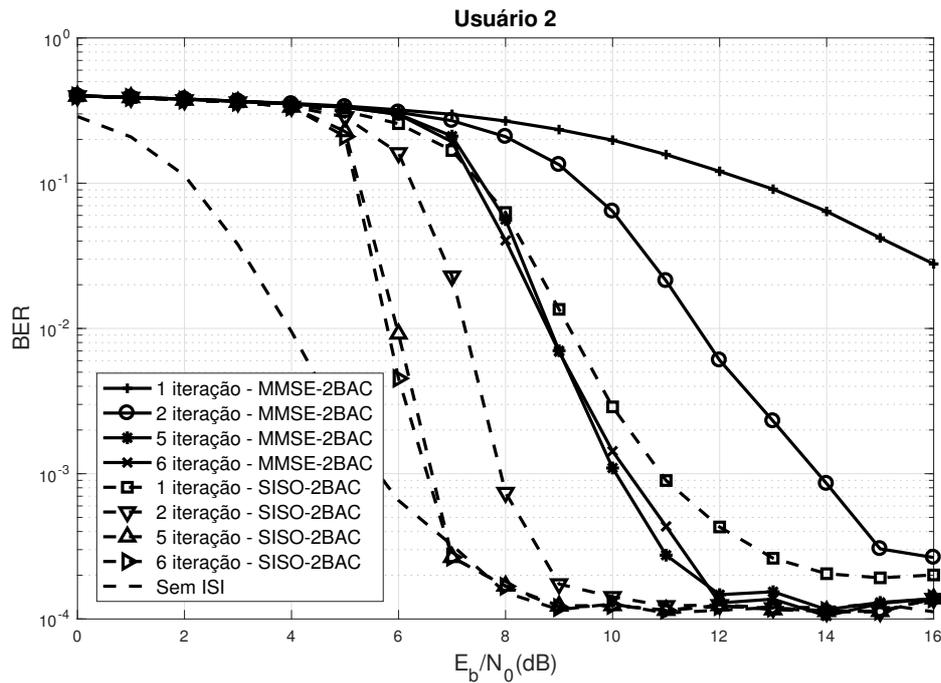
Também é possível notar que existe pouco ganho de desempenho nas últimas iterações, o que sugere a irrelevância de iterações maiores que 5 para o sistema proposto. Ou seja, nesse caso, o Equalizador Iterativo poderia parar na quinta iteração sem perdas significantes de desempenho em termos de BER.

Nas Figuras 4.3 e 4.4 são confrontadas as curvas de desempenho dos equalizadores SISO-2BAC e MMSE 2-BAC. Adicionalmente, os dois algoritmos são comparados com o caso da transmissão através do 2-BAC sem ISI, apenas na presença de AWGN. A ideia é avaliar a capacidade de redução da ISI para cada um dos algoritmos citados.



**Figura 4.3:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 1.

De acordo com as Figuras 4.3 e 4.4, é possível notar o desempenho superior do algoritmo SISO-2BAC em relação ao MMSE-2BAC. Para a sexta iteração, existe um ganho em torno



**Figura 4.4:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 2.

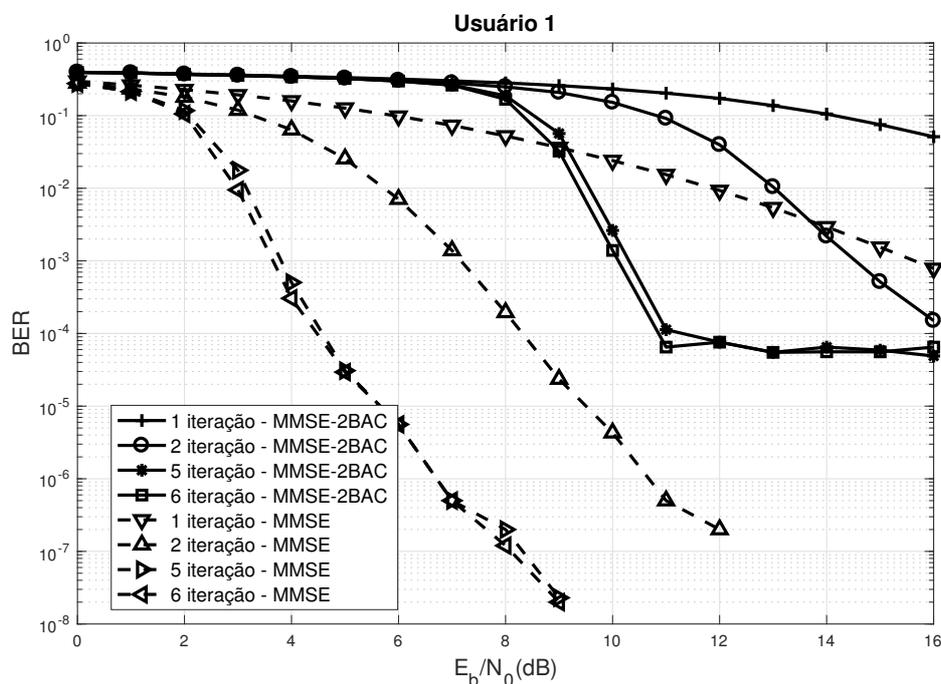
de 5 dB do algoritmo SISO-2BAC em relação ao MMSE-2BAC, para uma BER em torno de  $10^{-4}$ . Dentro da faixa de SNR avaliada, nota-se que, na Figura 4.3, a simulação para o canal sem ISI não apresenta ganho com o aumento de energia do sinal, o que sugere uma estrutura de codificação mais eficiente, no que se refere ao desempenho em termos de BER.

O algoritmo SISO-2BAC se mostra muito eficiente na remoção da ISI imposta pelo canal A, com a quinta iteração aparentemente razoável para o propósito. Nota-se a mesma tendência para o algoritmo MMSE-2BAC, porém à custa de maior energia na transmissão, como pode ser visto nas Figuras 4.3 e 4.4.

### 4.3 Simulação - Canal B

Nas Figuras 4.5 e 4.6 são vistas as curvas de BER em função da SNR, em dB, dos usuários 1 e 2, com transmissão através do canal B. Novamente, as simulações são realizadas com e, posteriormente, sem acesso múltiplo, para o máximo de 6 iterações, sendo empregado o equalizador MMSE-2BAC com  $W_1 = 15$  e  $W_2 = 11$ . Os usuários fazem uso de codificadores convolucionais de taxa de código  $1/3$ , memória  $M_1 = M_2 = 3$ , como apresentados na Tabela 4.3. A taxa de transmissão de ambos os usuários é alterada devido ao canal B apresentar

maior degradação ao sinal transmitido, enquanto codificados com as matrizes geradoras da Tabela 4.2.

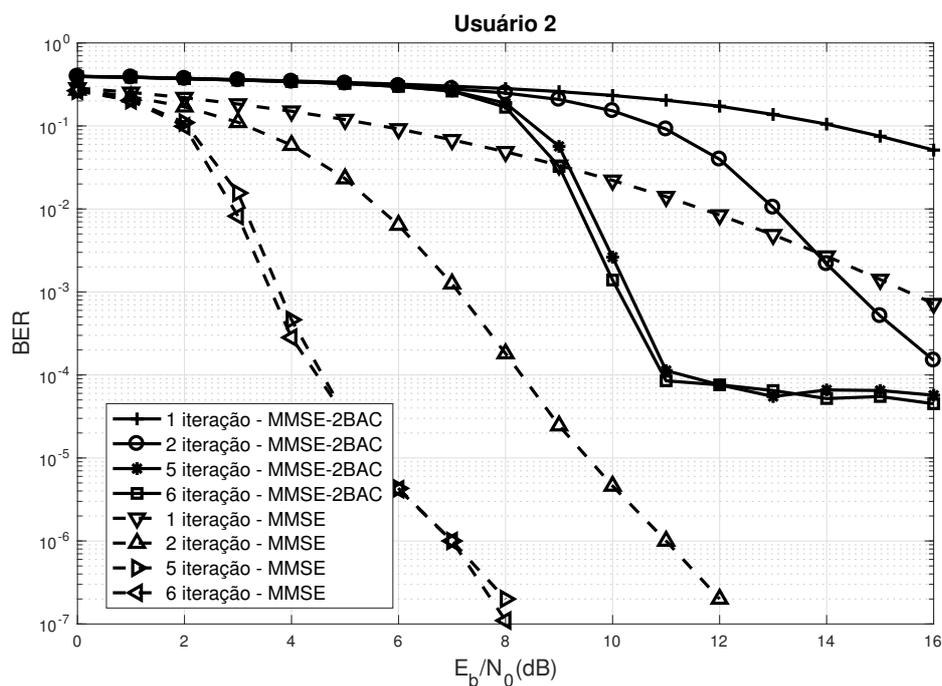


**Figura 4.5:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem MAC - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 1.

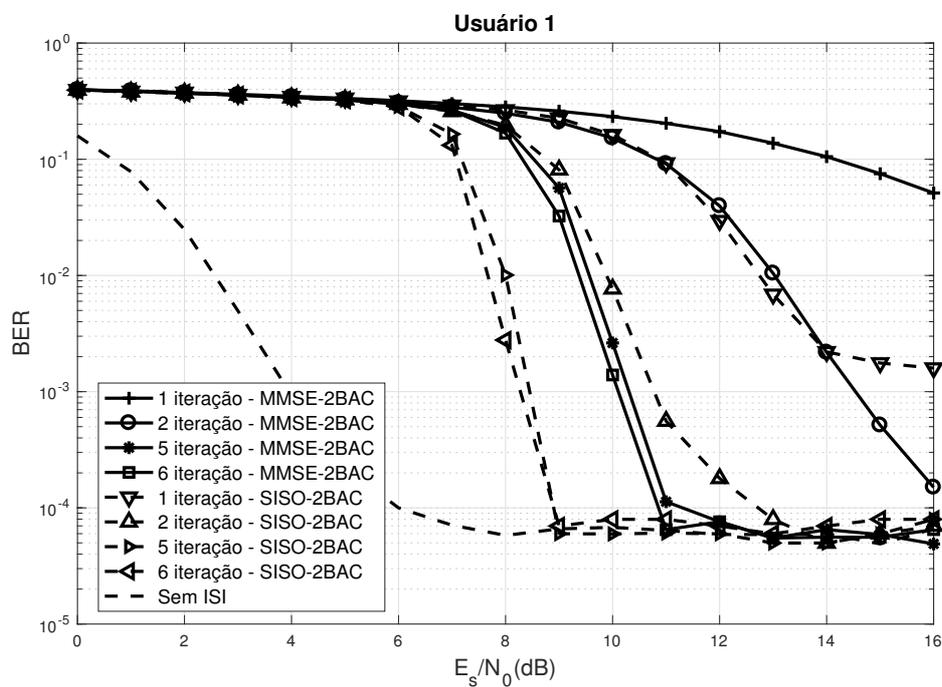
Dentro da faixa de SNR simulada, a adição de um usuário resulta em uma perda de, aproximadamente, 6 dB, quando avaliados na sexta iteração, para uma BER em torno de  $10^{-4}$ . Novamente é possível notar que existe pouco ganho de desempenho nas últimas iterações, sugerindo uma quantidade máxima de iterações para o sistema proposto.

Nas Figuras 4.7 e 4.8 são confrontadas as curvas de desempenho dos equalizadores SISO-2BAC e MMSE-2BAC, para os usuários 1 e 2, quando aplicados ao canal B. Novamente, os dois algoritmos são comparados com o caso da transmissão através de um canal 2-BAC sem ISI, apenas na presença de AWGN. A ideia é avaliar a capacidade de redução da ISI para cada um dos algoritmos citados, em um canal com maior degradação de sinal.

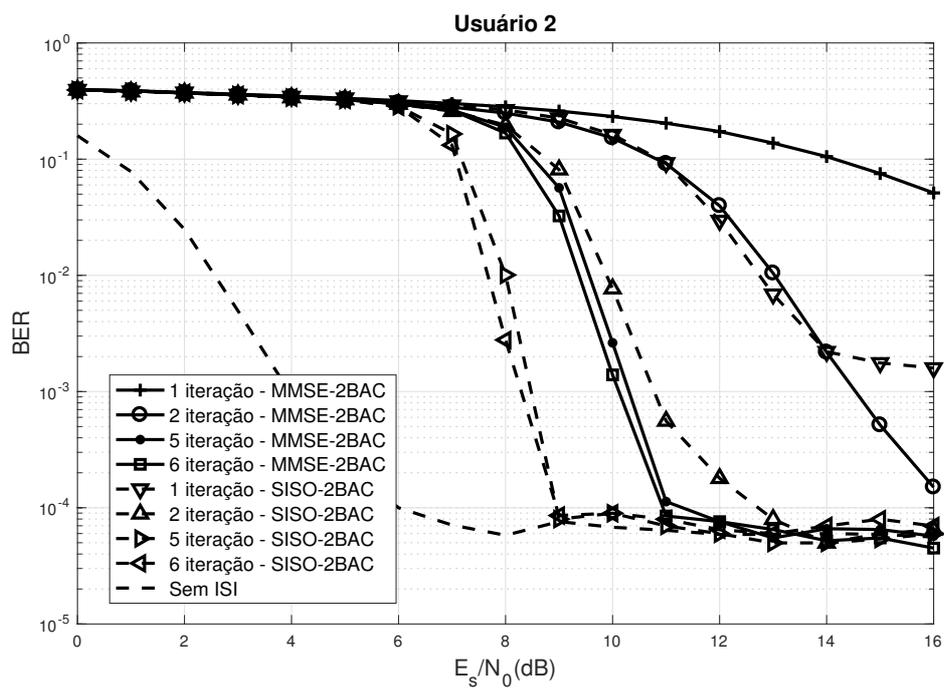
De acordo com as Figuras 4.7 e 4.8, o equalizador MMSE-2BAC tem desempenho inferior em relação ao SISO-2BAC, este último com ganhos maiores nas primeiras iterações. Nota-se que ambos os algoritmos eliminam a ISI imposta pelo canal, entretanto, o equalizador MMSE-2BAC atinge o objetivo com 2 dB a mais que o SISO-2BAC, para uma BER em torno de  $10^{-4}$ . Dessa forma, iterações maiores que 5 ou 6 podem não ser necessárias para a melhora



**Figura 4.6:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem MAC - Equalizadores MMSE e MMSE-2BAC - Usuário 2.



**Figura 4.7:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 1.



**Figura 4.8:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal  $B$  com ou sem ISI - Equalizadores MMSE-2BAC e SISO-2BAC - Usuário 2.

no desempenho, em termos de BER.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, é apresentada uma síntese deste trabalho e, ainda, alguns comentários acerca dos resultados obtidos e direcionamentos para futuras pesquisas.

### 5.1 Considerações Finais

Tendo como principal objetivo desta dissertação a atenuação da ISI, em canais de transmissão com acesso múltiplo, são propostos equalizadores iterativos com aplicação em um canal aditivo ruidoso para dois usuários binários com ISI, o 2-BAC-ISI. É projetada uma estrutura de troca de informação suave que opera em um 2-BAC-ISI, com estratégia similar à apresentada pelos códigos turbo.

Antes de enviar os símbolos de informação através do canal de transmissão, são utilizados códigos convolucionais<sup>1</sup> com o intuito de proporcionar maior imunidade ao ruído. As sequências código são entrelaçadas, transformando em erros aleatórios os possíveis erros em surto. Quanto ao canal de acesso múltiplo, para efeito prático, considera-se que a interferência atinge um número finito de símbolos.

Na recepção, detectar de forma ótima, no sentido de maximizar a probabilidade *a posteriori* de transmissão de algum símbolo qualquer, a cada instante de tempo, implica investigação conjunta do canal de transmissão, dos entrelaçadores e dos codificadores. A notável complexidade computacional envolvida na solução desses casos, ainda mais em canais de acesso múltiplo, intimida qualquer esforço nesse sentido. Dividir a detecção ótima em dois subproblemas, equalização e decodificação, é a abordagem adotada nesta dissertação. Dessa forma, o desempenho é comprometido em função de uma resolução iterativa subótima.

Nessa estrutura, a cada instante de tempo, o bloco equalizador fornece uma estimativa sobre os símbolos transmitidos ao decodificador para que, por sua vez, a partir desses dados,

---

<sup>1</sup>Estratégias como o uso de sistemas codificados concatenados em série, em paralelo ou de forma híbrida podem ser utilizados, possivelmente melhorando o desempenho do sistema em termos de taxa de erro de bit.

retorne estimativas atualizadas ao equalizador. O processo é repetido até que se atinja algum critério de parada. Com isso, a cada iteração, a incerteza acerca dos símbolos enviados diminui, melhorando o desempenho do sistema de comunicação, em termos de taxa de erro de bit.

Para a troca de informação extrínseca, na forma de LLR's, os algoritmos SISO e MMSE desempenham papéis fundamentais, afinal, para o funcionamento apropriado da equalização iterativa, é necessário que os blocos equalizador e decodificador troquem informação de mesma natureza. No bloco decodificador, é utilizado o algoritmo SISO, baseado na regra MAP, para fornecer estimativas atualizadas dos símbolos de informação e das sequências código. Em virtude das características multiplicativas, que podem ocasionar instabilidades numéricas, adicionalmente, é discutida uma versão aditiva do algoritmo SISO, denominada A-SISO.

Quanto ao bloco equalizador, dois algoritmos são discutidos. A primeira abordagem inclui o supracitado algoritmo com breves modificações. Nessa circunstância, o canal ruidoso com memória é modelado como uma treliça.

Menos complexa, no que se refere ao cômputo das estimativas, a segunda abordagem dada pelo algoritmo MMSE, se baseia no projeto de um estimador linear ótimo, no sentido de minimizar o erro médio quadrático conjunto entre o sinal transmitido e o estimado. Vale salientar que, no Capítulo 2, ambas abordagens são aplicadas em um canal sem acesso múltiplo, com transmissão na presença de ruído aditivo gaussiano branco.

No capítulo 3, para operar junto ao canal com acesso múltiplo proposto, o 2-BAC-ISI, é desenvolvido o algoritmo MMSE-2BAC, um estimador linear que minimiza o erro médio quadrático conjunto entre o sinal estimado e o sinal transmitido pelos usuários 1 e 2. A soma algébrica dada pelo 2-BAC é tratada como uma variável aleatória de segunda ordem, permitindo a sua modelagem estatística em termos de média e variância. Em consequência do custo computacional elevado exigido pela matriz inversa  $\Sigma_n^{-1}$ , é exposta uma versão recursiva do algoritmo MMSE-2BAC, o RMMSE-2BAC, que explora a dependência temporal da matriz  $\Sigma_n$ . Integrados ao bloco equalizador, ambos os algoritmos são utilizados na equalização iterativa proposta para o 2-BAC.

Os algoritmos SISO-2BAC e A-SISO-2BAC são discutidos como alternativa ao MMSE-2BAC. Em relação ao MMSE-2BAC, o SISO-2BAC e A-SISO-2BAC possuem a desvantagem do crescimento exponencial do número de elementos de memória no modelo de canal. O SISO-2BAC fornece estimativas *a posteriori* acerca dos símbolos de informação e das sequências código transmitidas pelos usuários 1 e 2, de forma conjunta. Todos são apresentados na

forma de pseudocódigo.

A estrutura proposta para a equalização iterativa tendo em vista o 2-BAC com ISI, é similar à adotada no capítulo 2. O bloco decodificador dispõe dos algoritmos SISO-2BAC ou A-SISO-2BAC para o fornecimento das estimativas conjuntas atualizadas, ou seja, da informação extrínseca relacionada aos usuários 1 e 2, na forma de LLR's. Essa informação é realimentada ao bloco equalizador, de modo entrelaçado, para compor novas estimativas a respeito dos símbolos transmitidos através do canal. Desse modo, a incerteza conjunta sobre os bits transmitidos pelos usuários 1 e 2 diminui a cada iteração.

Para as simulações realizadas em computador, os algoritmos são testados em dois canais com ISI distintos, conhecidos na literatura. A modulação utilizada é a BPSK. Para o canal A, verifica-se que a adição de mais um usuário resulta em uma perda de, aproximadamente, 7 dB, quando avaliado na sexta iteração, para uma taxa de erro de bit (BER) em torno de  $10^{-4}$ . Para efetuar a comparação, são utilizados os algoritmos MMSE e MMSE-2BAC. Diante das circunstâncias das simulações e, embora o SISO-2BAC possua uma complexidade computacional maior quando comparado com o MMSE-2BAC, o primeiro apresenta um ganho em torno de 5 dB, para uma BER de  $10^{-4}$ . Verifica-se também que o SISO-2BAC é capaz de reduzir a ISI, quase em sua totalidade, por volta da quinta iteração. Aparentemente, existe a mesma tendência para o MMSE-2BAC, entretanto, sendo necessária maior quantidade de energia na transmissão.

Já para o canal B, que oferece maior degradação ao sinal transmitido, o acréscimo de mais um usuário resulta em uma perda de, aproximadamente, 6 dB, quando avaliado na sexta iteração, para uma taxa de erro de bit (BER) em torno de  $10^{-4}$ . O SISO-2BAC apresenta ganhos maiores nas primeiras iterações em relação ao MMSE-2BAC. Embora não tenha sido rigorosamente mensurada, a latência do SISO-2BAC aumenta sensivelmente com o número de elementos de memória do canal, fato observado em menor grau no MMSE-2BAC. Estudos envolvendo a redução na complexidade computacional dos algoritmos, e os consequentes impactos causados no desempenho do sistema, podem ajudar nesse sentido. A ISI é fortemente reduzida por ambos os algoritmos, entretanto, o MMSE-2BAC a faz com 2 dB a mais que o SISO-2BAC.

Para todas as simulações, verifica-se que existe menores incrementos nos ganhos a cada iteração, indicando um limitante superior para a quantidade de iterações realizadas. É notável que apenas o uso do codificador convolucional não reduz a taxa de erro de bit, para a faixa de

SNR avaliada. Isso sugere o uso de outras técnicas de codificação para melhorar o desempenho do sistema de comunicação, como a concatenação de códigos.

Diante dos resultados alcançados pelas simulações, conclui-se que os algoritmos investigados exercem a função proposta para este trabalho. Mesmo com a degradação do sinal transmitido ao adicionar um usuário, os equalizadores iterativos propostos para o 2-BAC, reduziram de maneira significativa a ISI. Até onde o limite do conhecimento permite chegar, os algoritmos propostos nesta dissertação possuem caráter singular.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Em seguida, são enumeradas algumas sugestões de trabalhos futuros relacionados com o tema desta dissertação:

1. Analisar técnicas de redução de complexidade para os algoritmos propostos;
2. Analisar diferentes critérios de parada no processo iterativo;
3. Analisar o desempenho do sistema quando em uso outras modulações digitais;
4. Analisar qualitativamente a troca de informação entre os blocos equalizador e decodificador, para diferentes estruturas de codificação, através das curvas EXIT (*Extrinsic Information Transfer charts*);
5. Desenvolver outros algoritmos que comportem um aumento no número de usuários no sistema de comunicação;
6. Analisar o desempenho do sistema, quando em uso outros tipos de entrelaçadores;
7. Estudar o impacto no desempenho, quanto ao uso de outras estruturas de codificação, como, por exemplo, códigos LDPC ou concatenação de códigos.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications 5ed.* McGraw-Hill, 2008.
- [2] M. Tuchler, A. Singer, and R. Kotter, “Minimum mean squared error (MMSE) equalization using priors,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 673–683, 2000.
- [3] A. Benveniste and M. Goursat, “Blind equalizers,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 32, no. 8, pp. 871–883, Agosto 1984.
- [4] R. W. Lucky, “Techniques for adaptive equalization of digital communication systems,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 45, no. 2, pp. 255–286, Fevereiro 1966.
- [5] S. Qureshi, “Adaptive equalization,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 20, no. 2, pp. 9–16, Março 1982.
- [6] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, Julho 1948.
- [7] R. S. Cheng and S. Verdu, “Gaussian multiaccess channels with ISI: capacity region and multiuser water-filling,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 39, no. 3, pp. 773–785, Maio 1993.
- [8] D. J. C. MacKay and R. M. Neal, “Near shannon limit performance of low density parity check codes,” *Electronics Letters*, vol. 32, no. 18, pp. 1645–, Agosto 1996.
- [9] L. Chen, J. Xu, I. Djurdjevic, and S. Lin, “Near-shannon-limit quasi-cyclic low-density parity-check codes,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 7, pp. 1038–1042, Julho 2004.
- [10] L. Fan, K. Peng, C. Pan, and J. Song, “Multiple-rate multiple-length QC-LDPC codes design with near shannon limit performance,” in *2013 IEEE International Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting (BMSB)*, Junho 2013, pp. 1–6.

- [11] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes,” in *Communications, 1993. ICC '93 Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on*, vol. 2, Maio 1993, pp. 1064–1070.
- [12] ETSI TS 125 212 V5.1.0, “Universal mobile telecommunications system (UMTS);multiplexing and channel coding,” 2002. [Online]. Available: [http://www.etsi.org/deliver/etsi\\_ts/125200\\_125299/125212/05.01.00\\_60/ts\\_125212v050100p.pdf](http://www.etsi.org/deliver/etsi_ts/125200_125299/125212/05.01.00_60/ts_125212v050100p.pdf)
- [13] ETSI TS 136 212 V8.7.0, “LTE; evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); multiplexing and channel coding,” 2009. [Online]. Available: [http://www.etsi.org/deliver/etsi\\_TS/136200\\_136299/136212/08.07.00\\_60/ts\\_136212v080700p.pdf](http://www.etsi.org/deliver/etsi_TS/136200_136299/136212/08.07.00_60/ts_136212v080700p.pdf)
- [14] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.),” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 2, pp. 284–287, Março 1974.
- [15] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “A soft-input soft-output maximum a posteriori (MAP) module to decode parallel and serial concatenated codes,” *TDA Progress report 42-127 for NASA and Cal Tech JPL*, pp. 1–20, Novembro 1996.
- [16] C. Douillard, M. Jézéquel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, “Iterative correction of intersymbol interference: Turbo-equalization,” *European Transactions on Telecommunications*, vol. 6, pp. 507–511, 1995.
- [17] A. Viterbi, “Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 260–269, Abril 1967.
- [18] J. Hagenauer and P. Hoeher, “A viterbi algorithm with soft-decision outputs and its applications,” in *Global Telecommunications Conference and Exhibition 'Communications Technology for the 1990s and Beyond' (GLOBECOM), 1989. IEEE*, Novembro 1989, pp. 1680–1686 vol.3.
- [19] M. Tuchler and A. C. Singer, “Turbo equalization: An overview,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 920–952, Fevereiro 2011.

- [20] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 7, pp. 1046–1061, Julho 1999.
- [21] N. S. Weerasinghe, S. Watanabe, T. Hashimoto, and S. Itoh, "A coded convolutional spreading CDMA system with turbo equalization for downlink transmission over a frequency selective fading channel," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, no. 2, pp. 573–582, Fevereiro 2009.
- [22] Z. Chen, Y. R. Zheng, J. Wang, and J. Song, "Equivalence of frequency-domain turbo equalization schemes for single-carrier multiple-input," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 66, no. 1, pp. 95–106, Janeiro 2017.
- [23] S. Park and S. Choi, "Multi-stage turbo equalization for MIMO systems with hybrid ARQ," *Journal of Communications and Networks*, vol. 18, no. 3, pp. 333–339, Junho 2016.
- [24] C. Baek and J. Jung, "A study on turbo equalization for MIMO system based on LDPC codes," in *2016 Eighth International Conference on Ubiquitous and Future Networks (ICUFN)*, July 2016, pp. 501–504.
- [25] M. Ruan, M. C. Reed, and Z. Shi, "Turbo equalization using particle filtering with grouping," in *2007 International Symposium on Communications and Information Technologies*, Outubro 2007, pp. 1197–1200.
- [26] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Serial concatenated trellis coded modulation with iterative decoding," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, Junho 1997, pp. 8–.
- [27] M. Koca and B. C. Levy, "Turbo space-time equalization of TCM for broadband wireless channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 3, no. 1, pp. 50–59, Janeiro 2004.
- [28] P. Xiao, R. Carrasco, and I. Wassell, "Filter-based turbo equalization for TCM signals," in *GLOBECOM '05. IEEE Global Telecommunications Conference, 2005.*, vol. 3, Novembro 2005, p. 5.
- [29] T. Kasami and S. Lin, "Coding for a multiple-access channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-22, no. 2, pp. 129–137, 1976.

- [30] C. E. Shannon, "Two-way communication channels," in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1961, pp. 611–644.
- [31] S.-C. Chang and E. Weldon, "Coding for T-user multiple-access channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 6, pp. 684–691, Novembro 1979.
- [32] K. Kusume, G. Bauch, and W. Utschick, "IDMA vs. CDMA: Analysis and comparison of two multiple access schemes," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 11, no. 1, pp. 78–87, Janeiro 2012.
- [33] F. Ali and B. Honary, "Collaborative coding and decoding techniques for multiple access channel," *IEE Proceedings - Communications*, vol. 141, no. 2, pp. 56–62, Abril 1994.
- [34] R. Peterson and D. Costello, "Binary convolutional codes for a multiple-access channel (corresp.)," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 1, pp. 101–105, 1979.
- [35] V. C. da Rocha Jr. and J. L. Massey, "A new approach to the design of codes for the binary adder channel," in *Cryptography and Coding III*, ser. IMA Conf. Series, M. J. Ganley, Ed. Oxford, 1993, no. 45, pp. 179–185.
- [36] R. Ahlswede and V. B. Balakirsky, "Construction of uniquely decodable codes for the two-user binary adder channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 1, pp. 326–330, Janeiro 1999.
- [37] V. C. da Rocha Jr. and M. L. M. G. Alcoforado, "Uniquely decodable trellis codes for the two user binary adder channel," in *International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2004)*, Parma, Italy, Outubro 2004, pp. 518–522.
- [38] L. Kiviluoto and P. R. J. Ostergard, "New uniquely decodable codes for the T-user binary adder channel with  $3 \leq T \leq 5$ ," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, no. 3, pp. 1219–1220, Março 2007.
- [39] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr., and M. J. de C. Lima, "A turbo coding scheme not necessarily uniquely decodable for the two-user binary adder channel," in *International Telecommunications Symposium, ITS, 2010, Manaus, Amazonas, Brazil. International Telecommunications Symposium, SBrT/IEEE, Proceedings*, 2010, pp. 122–127.

- [40] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr., G. Markarian, and M. J. de C. Lima, "Iterative decoding of turbo convolutional codes over noisy two-user binary adder channel," *Electronics Letters*, vol. 47, no. 13, pp. 749–751, 2011.
- [41] M. L. M. G. Alcoforado, M. C. C. Oliveira, and V. C. da Rocha Jr., "Bahl, Cocke, Jelinek, Raviv decoding algorithm applied to the three-user binary adder channel," *IET Communications*, vol. 9, no. 7, pp. 897–902, 2015.
- [42] M. Noor-A-Rahim, K. D. Nguyen, and G. Lechner, "SC-LDPC code design for gaussian multiple access channel," *IET Communications*, vol. 10, no. 17, pp. 2402–2406, 2016.
- [43] M. J. de C. Lima, "Sistemas codificados concatenados para canais de acesso múltiplo," Tese de doutorado, UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, 2017.
- [44] P. Strauch, C. Luschi, M. Sandell, and R. Yan, "Turbo equalization for an 8-PSK modulation scheme in a mobile TDMA communication system," in *Gateway to 21st Century Communications Village. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conference (Cat. No.99CH36324)*, vol. 3, 1999, pp. 1605–1609.
- [45] Y. Ida, C. J. Ahn, T. Kamio, H. Fujisaka, and K. Haeiwa, "Throughput performance enhancement for multiuser diversity OFDMA using MMSE equalization without guard interval," in *2010 IEEE 11th International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, Outubro 2010, pp. 221–226.
- [46] J. Tao, "Turbo equalization for MIMO SC-FDMA underwater acoustic communications," in *OCEANS 2016 MTS/IEEE Monterey*, Setembro 2016, pp. 1–5.
- [47] R. H. Mahadevappa and J. G. Proakis, "Mitigating multiple access interference and intersymbol interference in uncoded CDMA systems with chip-level interleaving," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 1, no. 4, pp. 781–792, Outubro 2002.
- [48] S. Lin and D. J. Costello, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications (Prentice-Hall Computer Applications in Electrical Engineerin)*. Prentice Hall, 1983.
- [49] C. J. L. Pimentel, *Comunicação Digital*. Brasport, 2007.
- [50] S. Benedetto, G. Montorsi, D. Divsalar, and F. Pollara, "Soft-input soft-output modules for the construction and distributed iterative decoding of code networks," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 9, no. 2, pp. 155–172, 1998.

- [51] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “A soft-input soft-output APP module for iterative decoding of concatenated codes,” *IEEE Communications Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 22–24, Janeiro 1997.
- [52] V. C. da Rocha Jr., G. Markarian, and B. K. Honary, “Trellis decoding of block codes for the 2-user binary adder channel,” in *Communications, 1993. ICC '93 Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on*, vol. 3, Maio 1993, pp. 1429–1433 vol.3.
- [53] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation (2 Ed.)*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1994.
- [54] R. G. Gallager, *Stochastic processes : theory for applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [55] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing. [Volume I]. , Estimation theory*, ser. Prentice Hall signal processing series. Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall, 1993, reimpr. 2013.
- [56] M. Tuchler, A. C. Singer, and R. Koetter, “Minimum mean squared error equalization using a priori information,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 673–683, Março 2002.
- [57] M. L. M. G. Alcoforado, “Codificação iterativa para o canal aditivo com dois usuários binários,” Tese de doutorado, UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, 2005.

# APÊNDICE A

Supondo a existência de duas seqüências de variáveis aleatórias  $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$  e  $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ . Em algum instante de tempo  $t$ , deseja-se estimar  $X_t$  a partir de observações de  $Y_t$ , para  $a \leq t \leq b$ . Considera-se que  $Y_t, X_t \in \mathbb{R}$  para todo intervalo considerado. No sentido de minimizar o erro quadrático médio, um estimador ótimo pode ser dado por [53]

$$\hat{X}_t = \sum_{n=a}^b h_{t,n} Y_n + c_t, \quad (\text{A.1})$$

em que  $h_{t,a}, \dots, h_{t,b}$  e  $c_t$  são escalares. Para análise do estimador linear citado, considera-se que  $E\{X_t^2\} < \infty$  e  $E\{Y_t^2\} < \infty$ , para qualquer  $t$  em  $a \leq t \leq b$ . Adicionalmente, denota-se  $\mathcal{H}_a^b$  como o conjunto de todas as estimativas na forma da equação (A.1) baseados na observação da seqüência  $\mathbf{Y}_a^b$ .

O papel do estimador é encontrar a melhor aproximação para  $\hat{X}_t$  em que

$$\min_{\hat{X}_t \in \mathcal{H}_a^b} \{(\hat{X}_t - X_t)^2\}, \quad (\text{A.2})$$

cuja solução pode ser caracterizada com base no Princípio da Ortogonalidade.

**Teorema A.1** *Seja  $\hat{X}_t \in \mathcal{H}_a^b$ . Seja  $Z \in \mathbb{R}$  uma variável aleatória com  $E\{Z^2\} < \infty$ . Então  $\hat{X}_t$  é solução para a Equação (A.2) se e somente se,*

$$E\{(\hat{X}_t - X_t)Z\} = 0 \quad \text{para todo } Z \in \mathcal{H}_a^b. \quad (\text{A.3})$$

*Demonstração:* Supondo que  $\hat{X}_t$  satisfaz a Equação (A.3), e seja  $\tilde{X}_t$  qualquer outra estimativa em  $\mathcal{H}_a^b$ . O valor médio quadrático associado a  $\tilde{X}_t$  é dado por

$$\begin{aligned} E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} &= E\{(X_t - \hat{X}_t + \hat{X}_t - \tilde{X}_t)^2\} \\ &= E\{(X_t - \hat{X}_t)^2\} + 2E\{(X_t - \hat{X}_t)(\hat{X}_t - \tilde{X}_t)\} + E\{(\hat{X}_t - \tilde{X}_t)^2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Pode ser visto que, na condição de  $\hat{X}_t \in \mathcal{H}_a^b$  e  $\tilde{X}_t \in \mathcal{H}_a^b$ , então  $(\hat{X}_t - \tilde{X}_t) \in \mathcal{H}_a^b$  e fazendo  $Z = \hat{X}_t - \tilde{X}_t$ , o segundo termo do lado direito da Equação (A.4) é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} &= E\{(X_t - \hat{X}_t)^2\} + E\{(\hat{X}_t - \tilde{X}_t)^2\} \\ &\geq E\{(X_t - \hat{X}_t)^2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Uma vez que  $\tilde{X}_t$  foi escolhido arbitrariamente em  $\mathcal{H}_a^b$ , fica provado a suficiência da Equação (A.3).

Para provar a necessidade da Equação (A.3), supõe-se que  $\tilde{X}_t \in \mathcal{H}_a^b$  e algum  $Z \in \mathcal{H}_a^b$ , de forma que  $E\{(X_t - \tilde{X}_t)Z\} \neq 0$ . Para o novo estimador  $\hat{X}_t$  definido como

$$\hat{X}_t = \tilde{X}_t + \frac{E\{(X_t - \tilde{X}_t)Z\}}{E\{Z^2\}}Z, \quad (\text{A.6})$$

o erro quadrático médio é dado por

$$\begin{aligned} E\{(X_t - \hat{X}_t)^2\} &= E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} - E\{(\hat{X}_t - \tilde{X}_t)^2\} \\ &= E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} - E\left\{\left(\frac{E\{(X_t - \tilde{X}_t)Z\}}{E\{Z^2\}}Z\right)^2\right\} \\ &= E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} - \frac{E^2\{(X_t - \tilde{X}_t)Z\}}{E^2\{Z^2\}}E\{Z^2\} \\ &= E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\} - \frac{E^2\{(X_t - \tilde{X}_t)Z\}}{E\{Z^2\}} \\ &< E\{(X_t - \tilde{X}_t)^2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Consequentemente,  $\hat{X}_t$  é um melhor estimador que  $\tilde{X}_t$  e, portanto,  $\tilde{X}_t$  não é solução para a Equação (A.2), provando a necessidade de (A.3). ■

A Proposição A.1 demonstra que  $\hat{X}_t$  é um estimador linear ótimo dado  $\mathbf{Y}_a^b \in \mathcal{H}_a^b$ , no sentido de minimizar o erro quadrático médio, se e somente se o erro da estimativa,  $X_t - \hat{X}_t$ , é ortogonal a toda função de observações  $\mathbf{Y}_a^b$ .

## APÊNDICE B

**Lema B.1 (Lema da inversão de matrizes)** *Sejam  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , matrizes de dimensões  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times m$  e  $m \times n$ , nessa ordem. Assumindo que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})$  sejam inversíveis, então,*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}. \quad (\text{B.1})$$

*Demonstração:* A igualdade será provada diretamente multiplicando ambos os termos da Equação (B.1) por  $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})$ , portanto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{BCD})(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} &= (\mathbf{A} + \mathbf{BCD})\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{BCD})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - (\mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1})\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - (\mathbf{B} + \mathbf{BCDA}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - \mathbf{BC}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - \mathbf{BCDA}^{-1} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

■

Um caso particular que decorre do lema é a Identidade de Woodbury [55, p.571], para o caso das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  serem vetores coluna  $\mathbf{u}$ , de dimensão  $n \times 1$  e  $\mathbf{C}$  ser um escalar unitário, dessa forma,

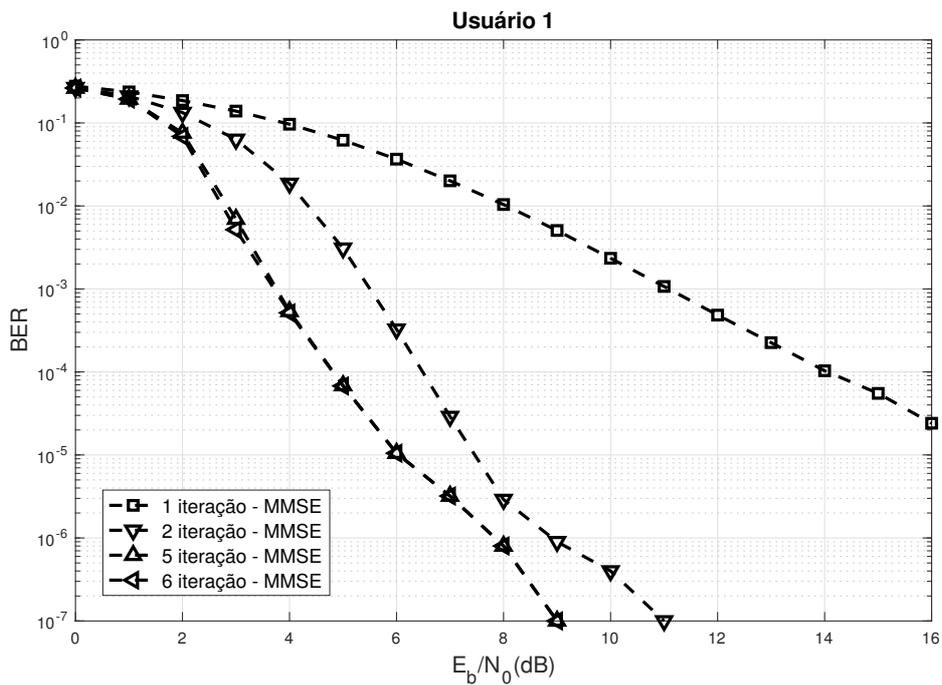
$$(\mathbf{A} + \mathbf{uu}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uu}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}. \quad (\text{B.3})$$

## APÊNDICE C

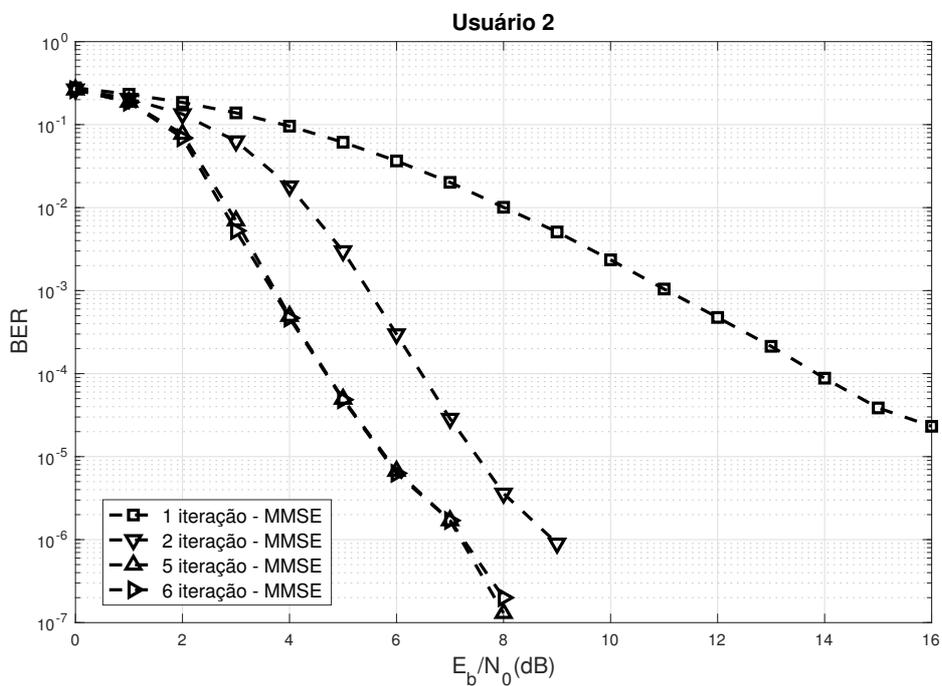
Para melhor visualização dos resultados discutidos no Capítulo 4, as curvas de desempenho estão dissociadas da seguinte forma:

- ▷ as Figuras (C.1) e (C.2) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal A sem acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/2$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE;
- ▷ as Figuras (C.3) e (C.4) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal A com acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/2$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.5) e (C.6) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal A com acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/2$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o SISO-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.7) e (C.8) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal A com acesso múltiplo e para o 2-BAC, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/2$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.9) e (C.10) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal A com acesso múltiplo e para o 2-BAC, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/2$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o SISO-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.11) e (C.12) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal B sem acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/3$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE;

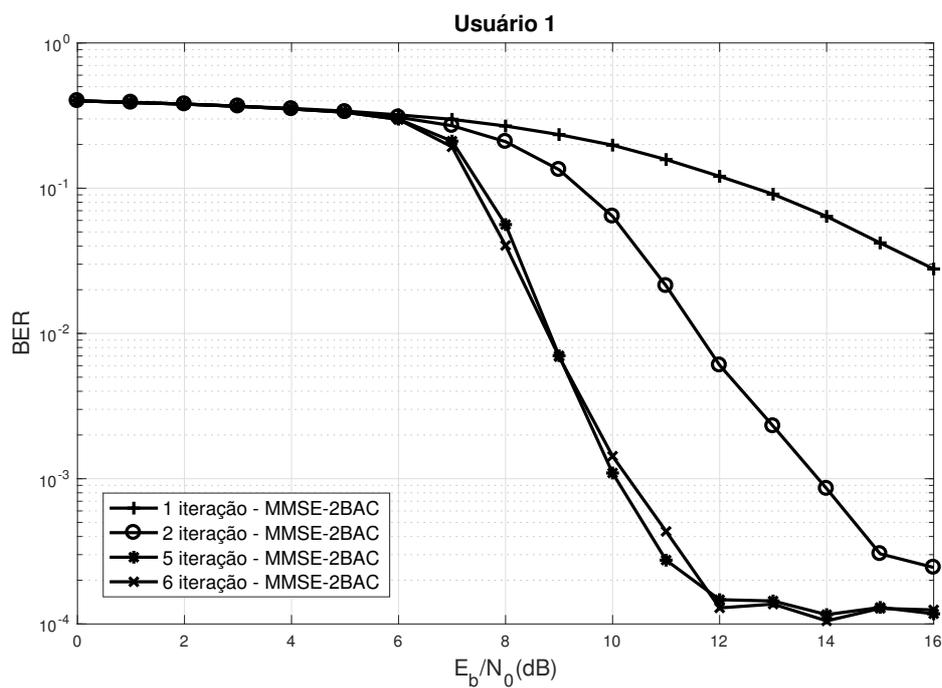
- ▷ as Figuras (C.13) e (C.14) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal B com acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/3$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.15) e (C.16) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal B com acesso múltiplo, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/3$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o SISO-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.17) e (C.18) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal B com acesso múltiplo e para o 2-BAC, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/3$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o MMSE-2BAC;
- ▷ as Figuras (C.19) e (C.20) apresentam a curva de desempenho BER versus SNR para transmissão através do canal B com acesso múltiplo e para o 2-BAC, para os usuários 1 e 2, nessa ordem. A taxa de código para cada usuário é  $1/3$  e o algoritmo utilizado no módulo Equalizador é o SISO-2BAC.



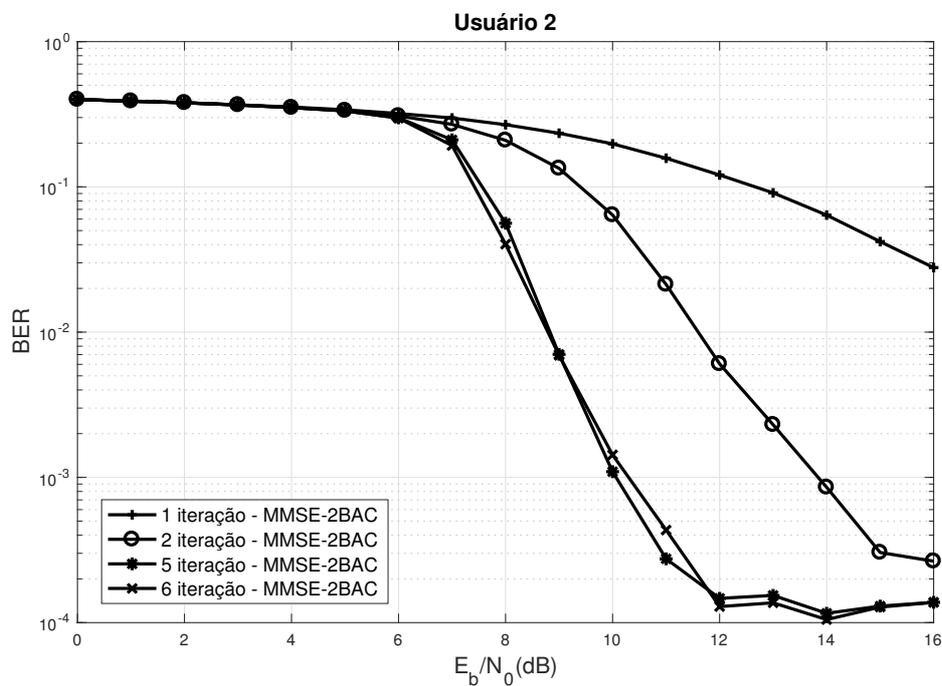
**Figura C.1:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



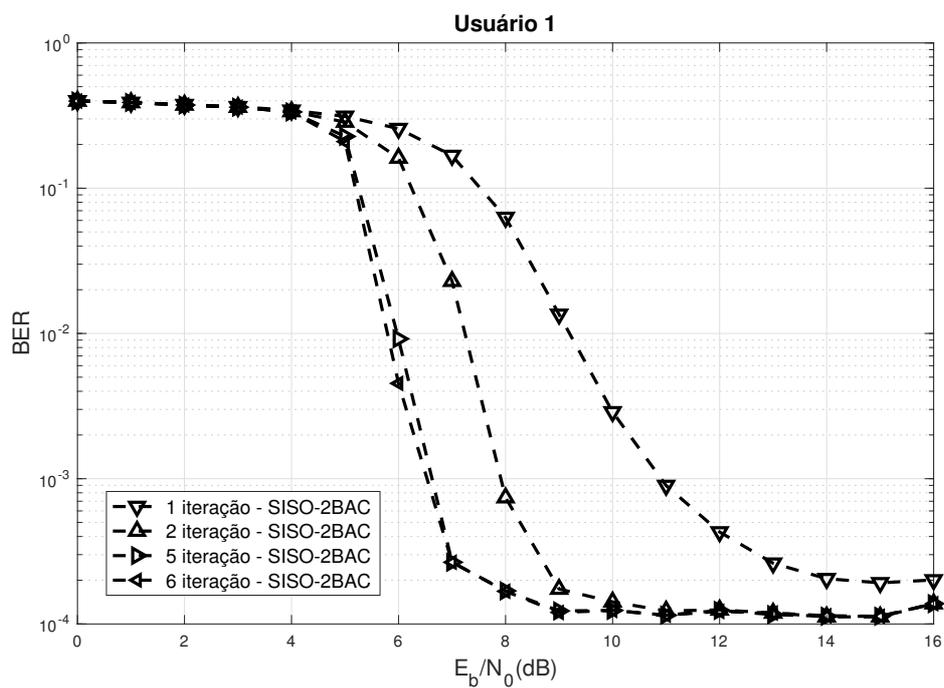
**Figura C.2:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



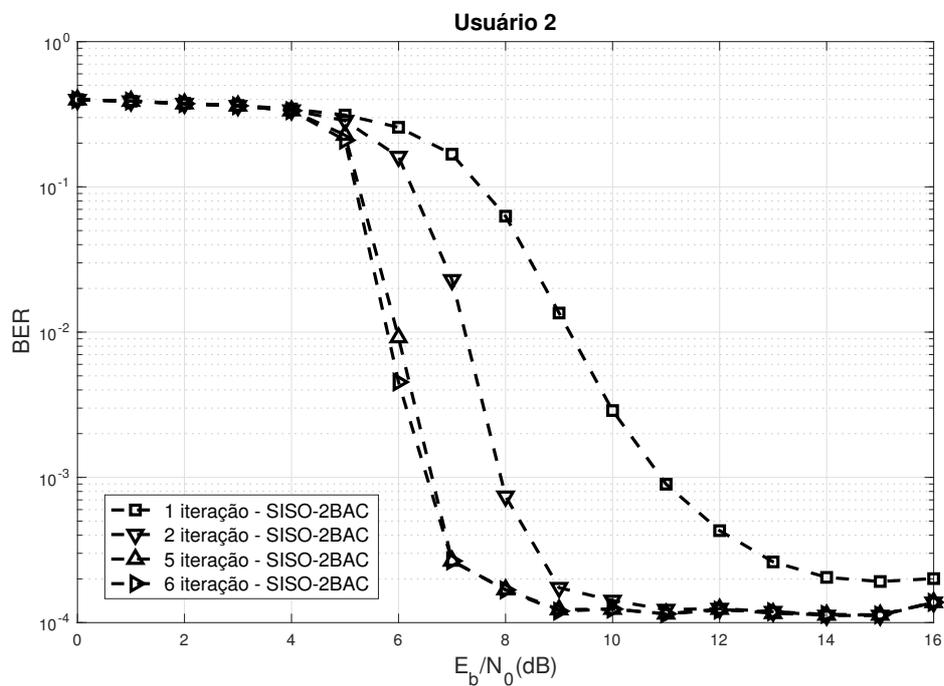
**Figura C.3:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



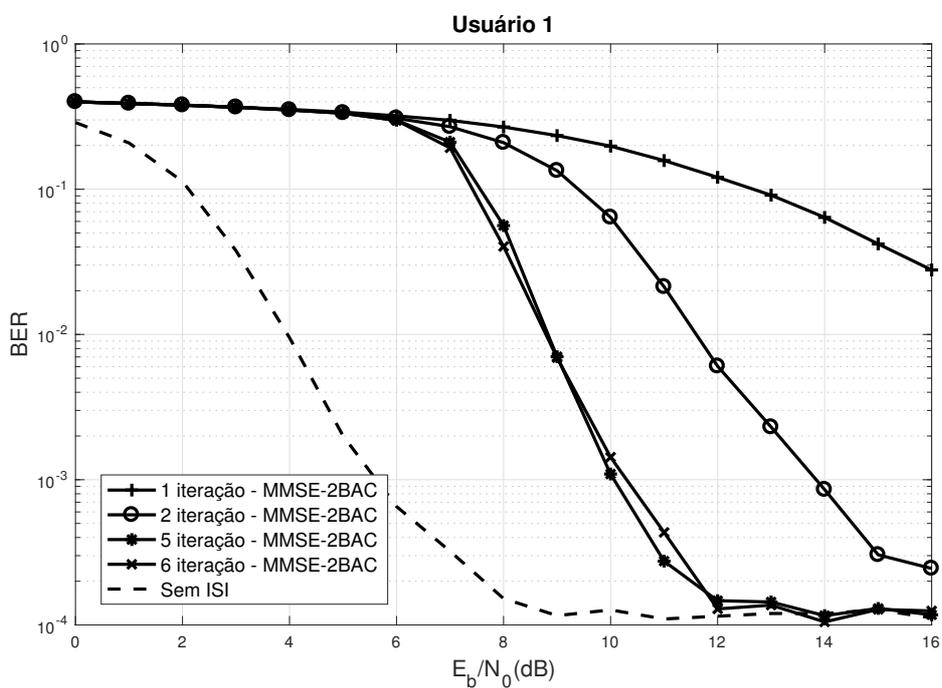
**Figura C.4:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



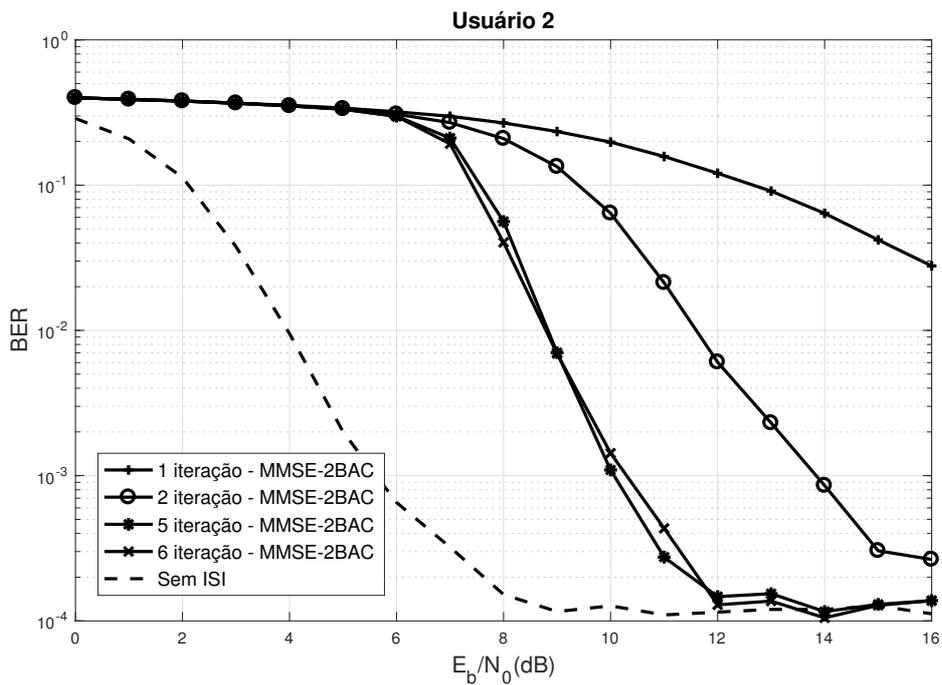
**Figura C.5:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



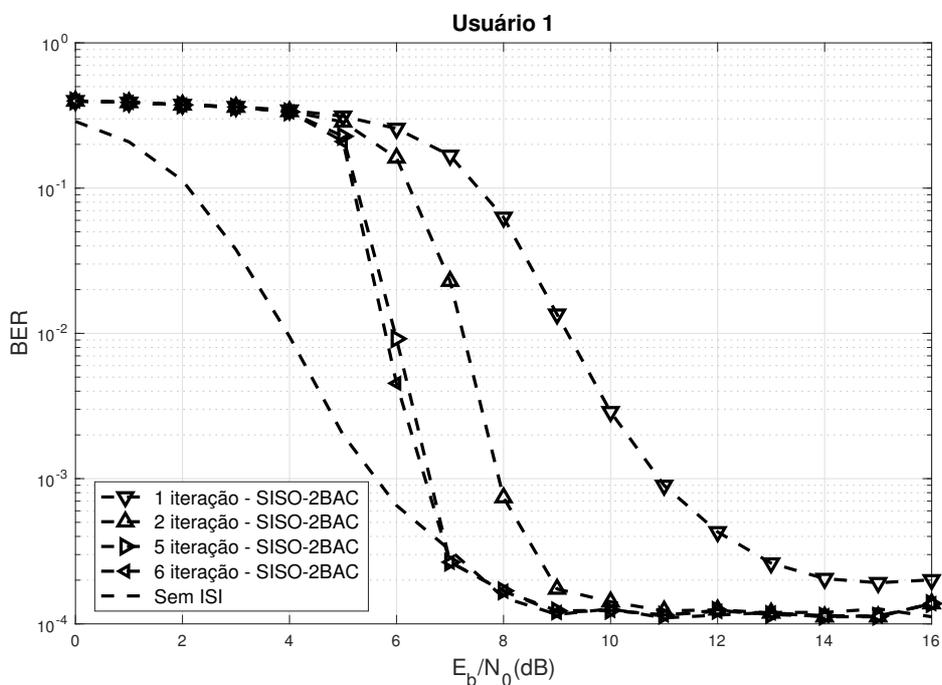
**Figura C.6:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



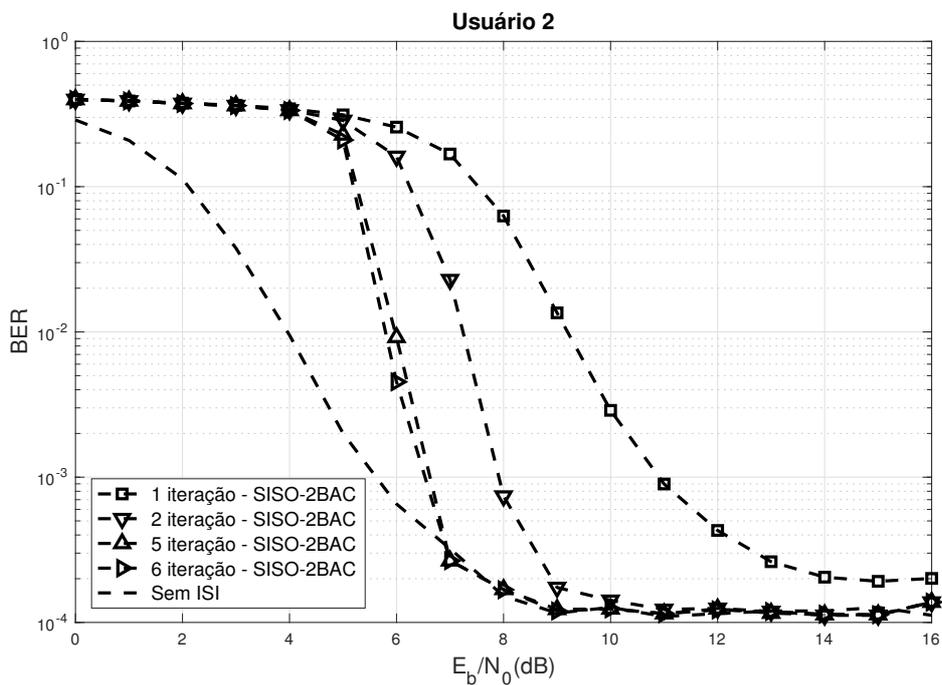
**Figura C.7:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



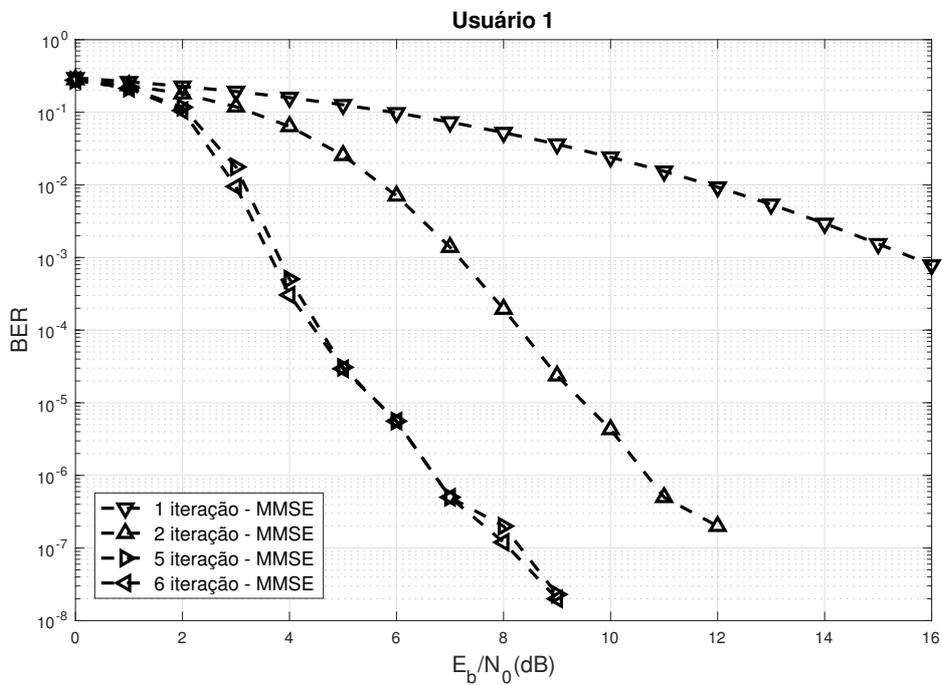
**Figura C.8:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



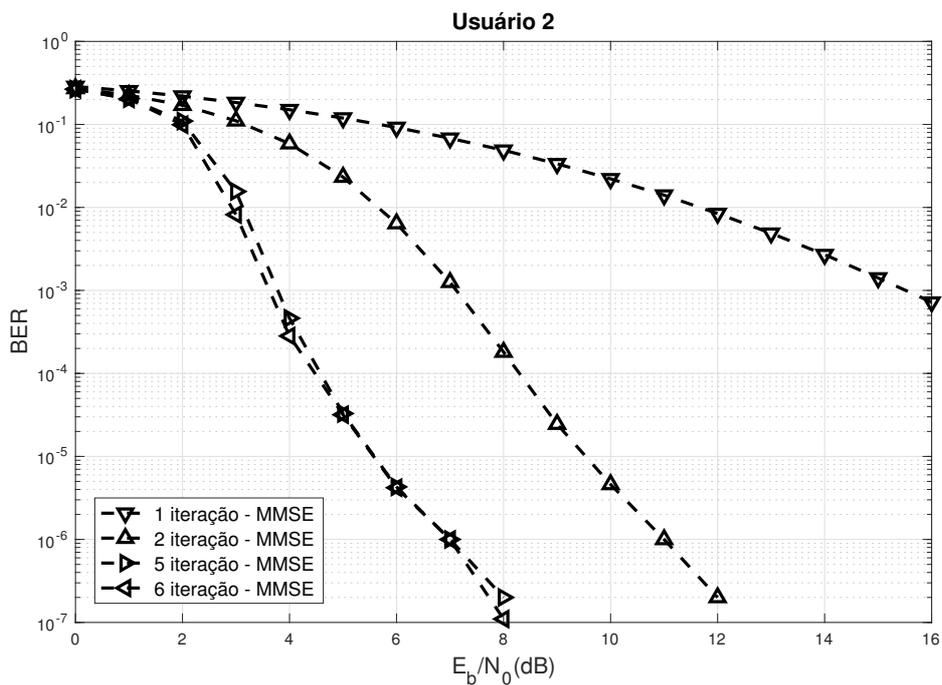
**Figura C.9:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



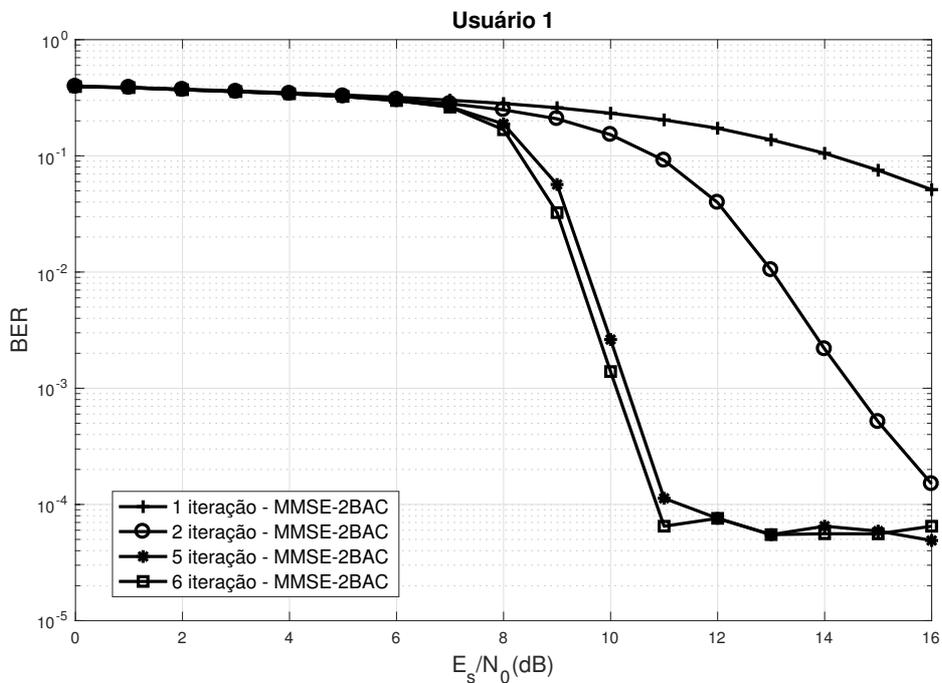
**Figura C.10:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



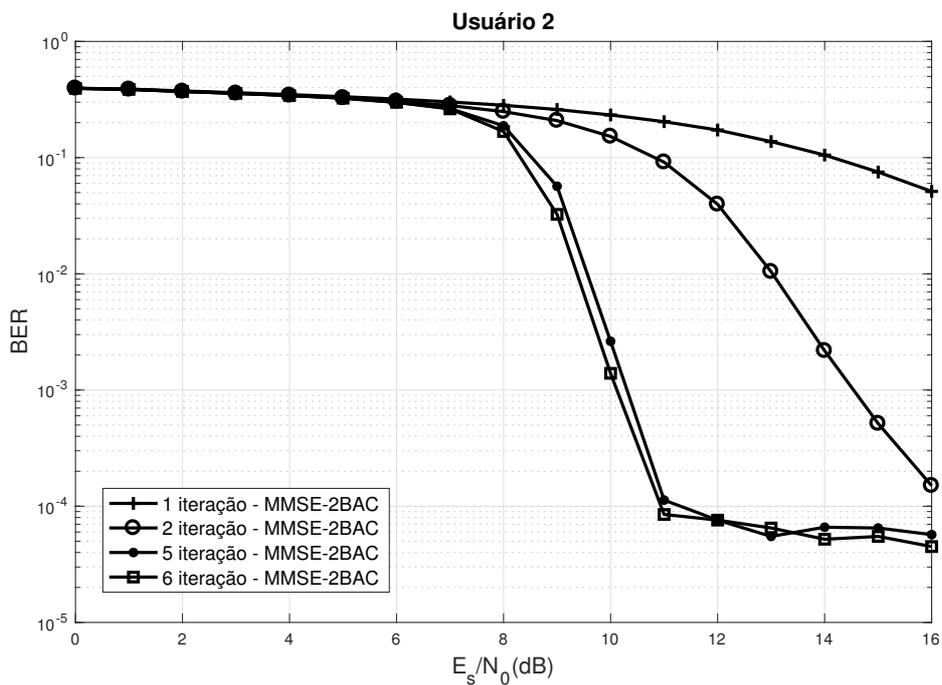
**Figura C.11:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 1 - taxa de código 1/2.



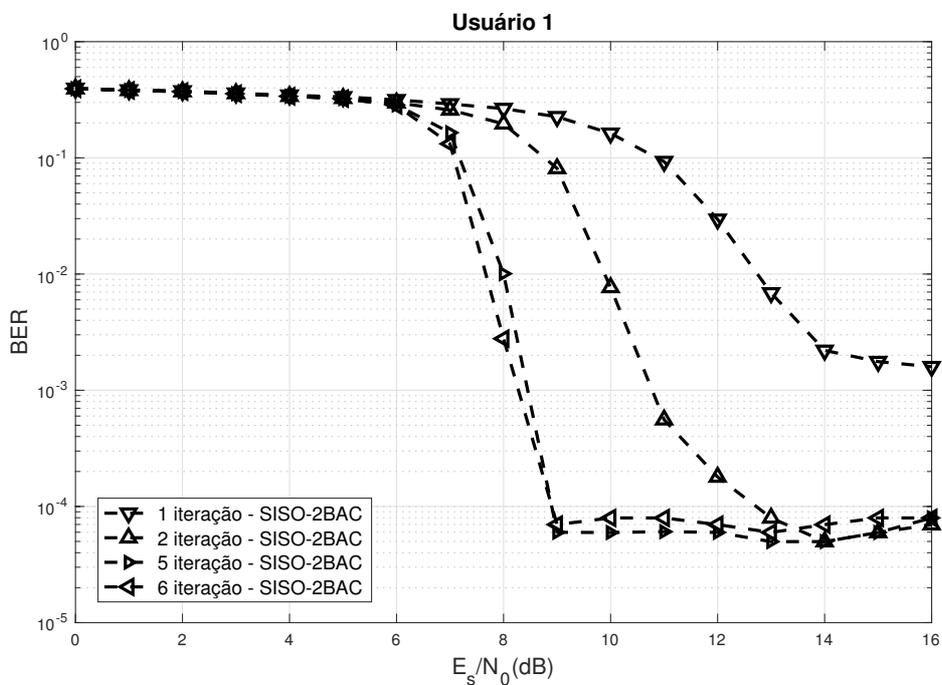
**Figura C.12:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal  $B$  sem acesso múltiplo - Equalizador MMSE - Usuário 2 - taxa de código 1/2.



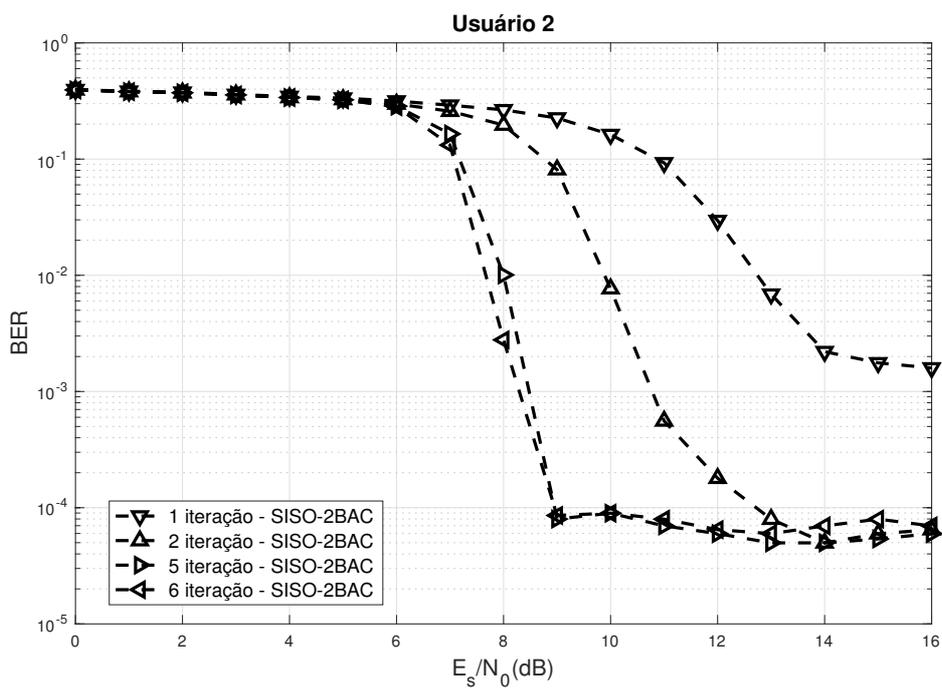
**Figura C.13:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal  $B$  com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/3.



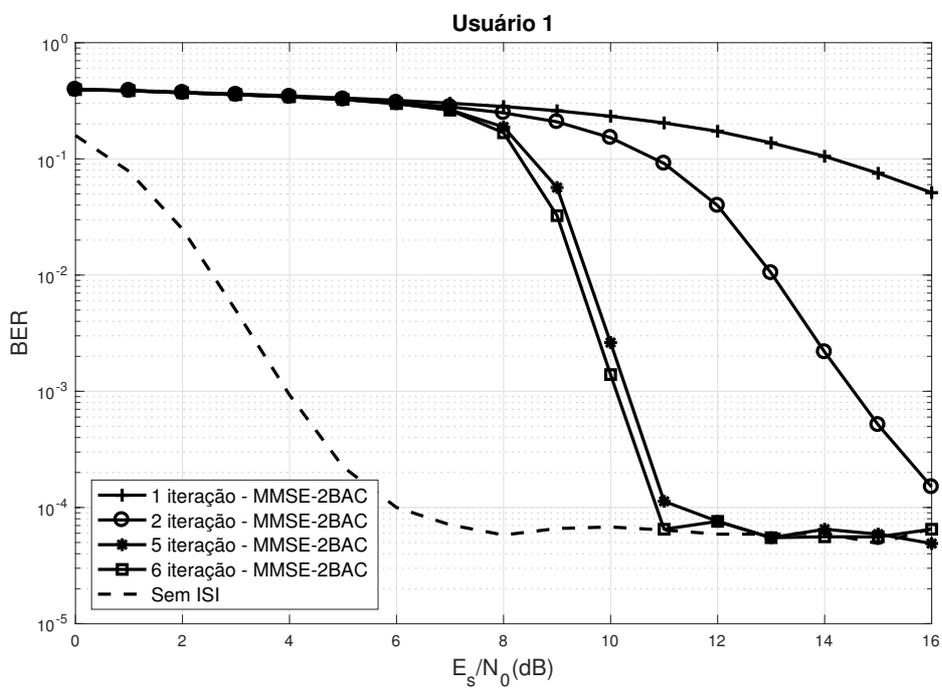
**Figura C.14:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal  $B$  com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/3.



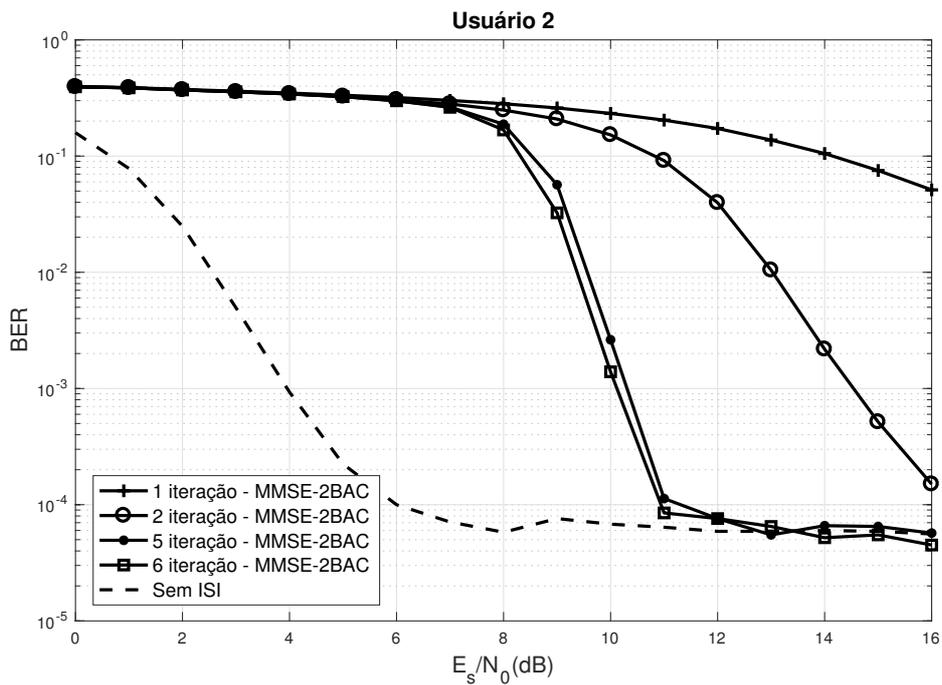
**Figura C.15:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal  $B$  com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 1 - taxa de código 1/3.



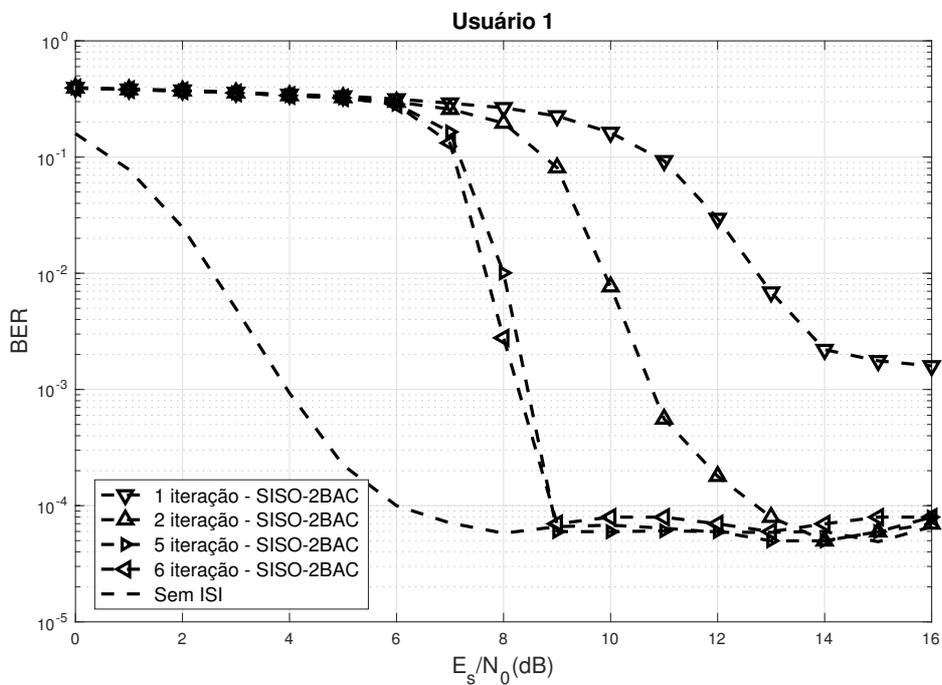
**Figura C.16:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal B com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - Usuário 2 - taxa de código 1/3.



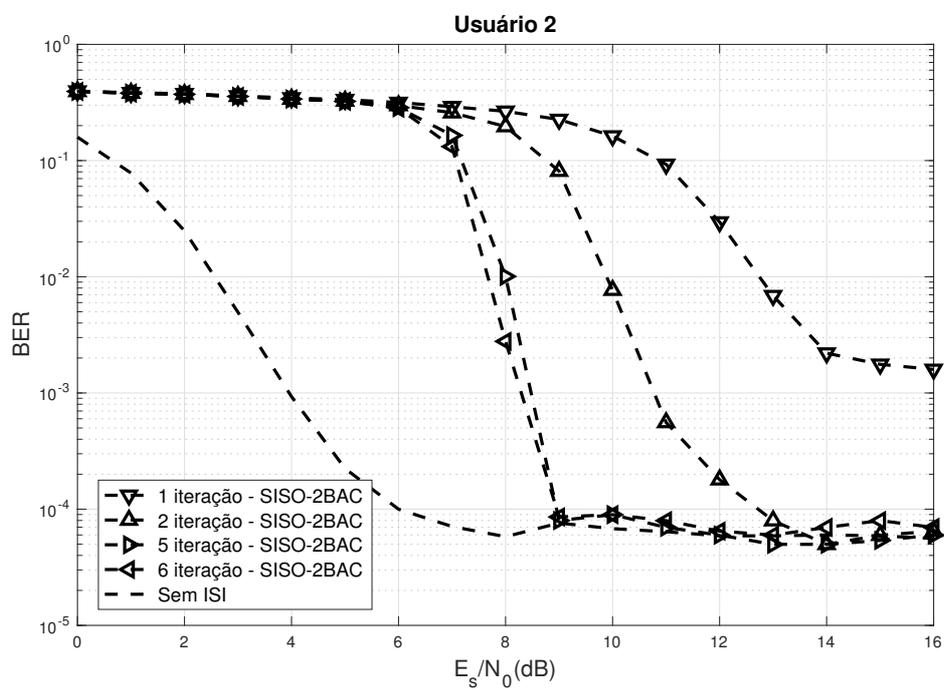
**Figura C.17:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/3.



**Figura C.18:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador MMSE-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/3.



**Figura C.19:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 1 - taxa de código 1/3.



**Figura C.20:** Taxa de erro de bit com transmissão através do canal A com acesso múltiplo - Equalizador SISO-2BAC - e através de um canal 2-BAC sem ISI - Usuário 2 - taxa de código 1/3.