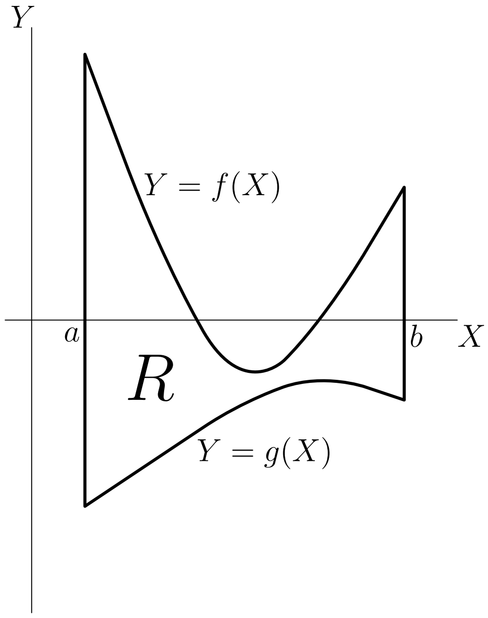
CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA SÉTIMA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, utilizaremos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para o cálculo da área entre duas curvas.

1. A área entre duas curvas

A figura a seguir ilustra os gráficos de duas funções $f(X)$ e $g(X)$ contínuas para todo X no intervalo $[a, b]$, com $a < b$, tais que o gráfico de $f(X)$ nunca fica abaixo do gráfico de $g(X)$ neste intervalo, isto é, $f(X) \geq g(X)$ para todo X em $[a, b]$. Abusaremos da linguagem e diremos que, neste caso, o gráfico de $f(X)$ **está acima** do de $g(X)$ — mesmo que estas funções possuam o mesmo valor para alguns X em $[a, b]$. Os gráficos destas funções e as retas verticais com equações $X = a$ e $X = b$ delimitam uma região R. Nesta seção discutiremos como encontrar a área A de R.



Toda função contínua em um intervalo fechado assume um valor máximo e um valor mínimo. Em particular, $g(X)$ possui um mínimo absoluto em $[a, b]$, isto é, existe um m em $[a, b]$ tal que

$$g(m) \leq g(X) \text{ para todo } X \text{ em } [a, b]$$

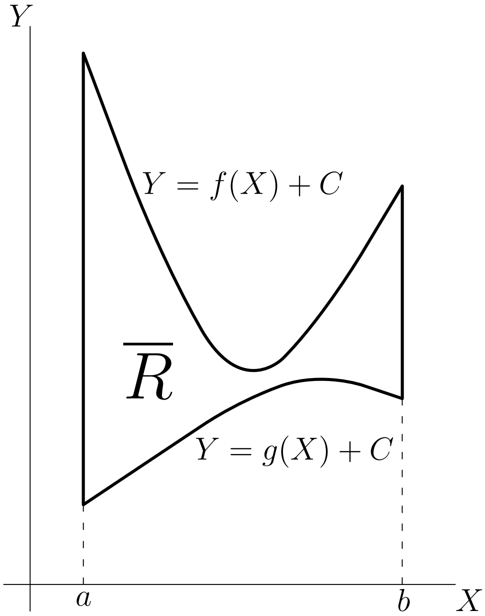
Escolha número real positivo C tal que

$$0 < g(m) + C \tag{1}$$

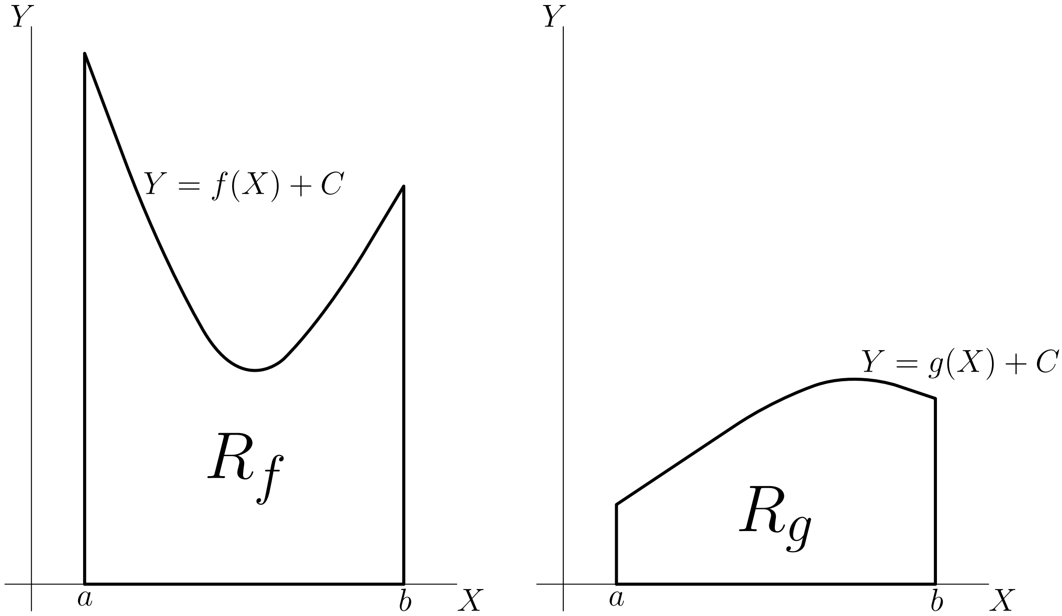
Considere as funções dadas por $\overline{f}(X) = f(X) + C$ e $\overline{g}(X) = g(X) + C$. Os gráficos de $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são obtidos respectivamente a partir dos gráficos de f e g através de uma translação

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

vertical, para cima, de C. Logo a região $\overline{R}$ limitada pelos gráficos de $\overline{f}$ e $\overline{g}$ e as retas verticais de equações $X = a$ e $X = b$ é congruente a região R. Portanto, $\overline{R}$ possui a mesma área que R. Note que o menor valor que a função $\overline{g}(X) = g(X) + C$ assume no intervalo $[a, b]$ é $\overline{g}(m) = g(m) + C$ que é positivo, por (1). Logo o gráfico de $\overline{g}(X)$, no intervalo $[a, b]$, está sempre acima do eixo das abscissas. O mesmo ocorre com o gráfico da função $\overline{f}(X) = f(X) + C$ porque o gráfico de $f(X)$ está acima do de $g(X)$ no intervalo $[a, b]$. Veja a ilustração a seguir.



Escreveremos a área de $\overline{R}$, que é igual a área de R, como a diferença da área de duas regiões, chamadas de R_f e R_g, que podem ser calculadas diretamente através de integrais definidas. Veja nas figuras seguintes estas regiões.



Passamos a descrever estas regiões.

R_f é a região limitada superiormente pelo gráfico de $\overline{f}$, inferiormente pelo eixo das abscissas e lateralmente pelas retas verticais de equações $X = a$ e $X = b$.

R_g é a região limitada superiormente pelo gráfico de $\overline{g}$, inferiormente pelo eixo das abscissas e lateralmente pelas retas verticais de equações $X = a$ e $X = b$.

Se A_f e A_g são respectivamente as áreas de R_f e R_g, então

$$A_f = \int_a^b [f(X) + C]dX \quad \text{e} \quad A_g = \int_a^b [g(X) + C]dX \tag{2}$$

Como

$$A = A_f - A_g \tag{3}$$

temos que

$$A = \int_a^b [f(X) + C]dX - \int_a^b [g(X) + C]dX \tag{4}$$

Portanto,

$$A = \int_a^b [f(X) + C] - [g(X) + C]dX \tag{5}$$

e conseqüentemente

$$A = \int_a^b [f(X) - g(X)]dX \tag{6}$$

Isto é, a área da região R é dada pela integral, entre a e b, da diferença entre a função que está por cima e a que está por baixo.

Na passagem da identidade (4) para a (5), necessitamos do próximo resultado para $t = -1$. Deixaremos como exercício para o leitor a sua demonstração.

Exercício 1. *Sejam $u(X)$ e $v(X)$ funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Mostre que, se t é um número real qualquer, então*

$$\int_a^b u(X)dX + t\int_a^b v(X)dX = \int_a^b [u(X) + tv(X)]dX$$

Na hora de aplicar (6), como saber qual das duas funções está por cima e qual está por baixo? Em geral, vamos aplicar (6) sabendo que, para todo X em (a, b), $f(X) \neq g(X)$ ou seja $f(X) - g(X) \neq 0$. Como $f(X)$ e $g(X)$ são contínuas para todo X em $[a, b]$, temos que a diferença entre estas funções $d(X) = f(X) - g(X)$ também é contínua em $[a, b]$. Portanto, $d(X)$ é sempre positiva ou sempre negativa para todo X em (a, b) porque $d(X)$ não se anula em (a, b). Basta testar o valor de $d(X)$ para algum X no intervalo (a, b). Se for postitivo, então $f(X)$ está acima de $g(X)$ neste intervalo. Se for negativo, então $f(X)$ está abaixo de $g(X)$ neste intervalo. Caso isto não seja feito, a área A, dada por (6), será calculada fazendo-se a diferença invertida, isto é, quem está em baixo menos quem está em cima, e obtem-se como resultado $-A$. Neste caso, basta tomar o valor absoluto para chegar a A. Vamos fazer dois exemplos.

Exemplo 2. *Calcule a área da região limitada pelas curvas de equações $Y = 2X^2 + 2X + 8$ e $Y = X^2 + 7X + 2$.*

Primeiro encontraremos as interseções destas duas curvas. Faremos isto através da função diferença

$$d(X) = (2X^2 + 2X + 8) - (X^2 + 7X + 2) = X^2 - 5X + 6$$

Um ponto de coordenadas (X, Y) está na interseção destas duas curvas se e somente se $d(X) = 0$. Isto ocorre quando $X = 2$ e $X = 3$. Portanto, estas curvas possuem apenas dois pontos de interseção. Vamos considerar a seguinte integral

$$\int_2^3 d(X)dX = \int_2^3 X^2 - 5X + 6dX = \frac{X^3}{3} - \frac{5X^2}{2} + 6X\Big|_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{14}{3} = \frac{27-28}{6} = -\frac{1}{6}$$

Pelas considerações feitas antes destes exercício, a área da região limitada por estas curvas é igual a $\frac{1}{6}$

Exercício 3. *Considere as curvas de equações* $Y = 2X^2 + 2X + 8$ *e* $Y = X^2 + 7X + 2$. *Quando* X *percorre o intervalo* $(2, 3)$, *qual destas curvas está por cima da outra?*

Exemplo 4. *Calcule a área das regiões limitadas pelas curvas de equações* $Y = X^3 + X^2 + X + 1$ *e* $Y = X^2 + 2X + 1$.

Como no exercício anterior, vamos considerar a função diferença:

$$d(X) = (X^3 + X^2 + X + 1) - (X^2 + 2X + 1) = X^3 - X = X(X^2 - 1)$$

Note que $d(X) = 0$ para $X = -1$, $X = 0$ e $X = 1$. Portanto, estas curvas possuem três pontos de interseção. Conseqüentemente limitam duas regiões: uma para X entre 0 a 1; e outra para X entre -1 a 0. Vamos calcular a área da primera região. Note que

$$\int_0^1 d(X)dX = \int_0^1 X^3 - XdX = \frac{X^4}{4} - \frac{X^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

e daí a área da primereira região é igual a $\frac{1}{4}$. Como $d(X)$ é uma função ímpar, temos que

$$\int_{-1}^0 d(X)dX = -\int_0^1 d(X)dX = \frac{1}{4}$$

Portanto, a segunda região limitada por estas curvas possui a mesma área que a primeira (na verdade são regiões congruentes). Logo o valor da área das regiões limitadas por estas curvas é igual a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

No exemplo anterior, caso um erro tenha sido cometido e o ponto de iterseção com abscissa $X = 0$ tenha sido ignorado durante sua resolução, o valor absoluto da integral da função diferença não seria a área das regiões limitadas por estas curvas porque

$$\int_{-1}^1 d(X)dX = 0$$

já que $d(X)$ é uma função ímpar. Isto ocorre porque a curva que esta por cima em uma das regiões limitadas fica por baixo na outra. Conseqüentemente, ao resolvermos problemas deste tipo, temos de ter atenção redobrada quando calculamos as interseções das curvas que limitam as regiões para as quais desejamos determinar a área.

Exercício 5. *Considere as curvas de equações* $Y = X^3 + X^2 + X + 1$ *e* $Y = X^2 + 2X + 1$. *Quando* X *percorre cada um dos intervalos* $(-1, 0)$ *e* $(0, 1)$, *qual destas curvas está por cima da outra?*

Exercício 6. *Para cada item a seguir, determine a área das regiões limitadas pelas curvas dadas. Esboce o gráfico de cada uma das regiões consideradas.*

(i) $Y = X^2$ *e* $Y = X + 20$
(ii) $Y = X^2 - 6$ *e* $Y = 2 - X^2$
(iii) $Y = \cos(2X)$ *e* $Y = \operatorname{sen}(2X)$*, para* X *no intervalo* $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$
(iv) $Y = X^2$ *e* $Y = \sqrt[3]{X}$
(v) $Y = X^3 - 3X$ *e a reta tangente a esta curva no ponto de abscissa* $X = -2$
(vi) $Y = X^2$ *e* $Y = 2^X$*, que está totalmente contida no primeiro quadrante.*

Exemplo 7. *Calcule a derivada da seguinte função*

$$f(X) = \int_{\operatorname{sen} X}^{\cos X} e^{-t^2} dt$$

Para derivar $f(X)$ não será necessário encontrar uma primitiva para $g(t) = e^{-t^2}$. Basta assumir a sua existência. Seja $G(t)$ uma função tal que $G'(t) = g(t)$. É possível demonstrar que $G(t)$ não é uma função elementar. Pelo TFC,

$$f(X) = \int_{\operatorname{sen} X}^{\cos X} e^{-t^2} dt = G(t)\Big|_{\operatorname{sen} X}^{\cos X} = G(\cos X) - G(\operatorname{sen} X)$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(X) = G'(\cos X)(-\operatorname{sen} X) - G'(\operatorname{sen} X)\cos X = -e^{-\cos^2 X}\operatorname{sen} X - e^{-\operatorname{sen}^2 X}\cos X$$

2. Respostas dos exercícios

3. A curva de equação $Y = X^2 + 7X + 2$ **5.** A curva de equação $Y = X^3 + X^2 + X + 1$ está por cima no intervalo $(-1, 0)$ e curva de equação $Y = X^2 + 2X + 1$ está por cima no intervalo $(0, 1)$ **6.** (i) 159 (ii) $\frac{64}{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) 108 (vi) $\frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2}$

Conteúdo da décima sétima aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos