CÁLCULO L1 — NOTAS DA NONA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, apresentaremos as funções logaritmo e exponencial e calcularemos as suas derivadas. Também estabeleceremos algumas propriedades fundamentais destas funções que desempenham um papel central na matemática e nas aplicações.

1. O logaritmo neperiano

Existe uma única função $f(X)$, conhecida como o **logaritmo neperiano**, definida para todo número real positivo X tal que $f(1) = 0$ e

$$f'(X) = \frac{1}{X}$$

Esta afirmação será estabelecida quando apresentarmos o Teorema Fundamental do Cálculo. Denotamos o valor de f em X por $\ln X$. Mostraremos também que existe um número real e, entre 2 e 3, tal que

$$\ln e = 1 \tag{1}$$

Justificaremos a existência do logaritmo neperiano através de uma interpretação oriunda da física. Suponha que uma partícula tem sua trajetória contida em um eixo ordenado. O movimento desta partícula fica completamente determinado caso sejam conhecidos:

- a velocidade para todo instante de tempo; e
- a posição da partícula para algum instante de tempo.

Caso a posição que a partícula ocupe no instante de tempo X seja $f(X)$, a sua velocidade instantânea é $f'(X)$. Portanto, o conhecimento de $f'(X)$ e de $f(1)$ é suficiente para determinar todo o movimento. Isto é, determinar $f(X)$.

Utilizando a derivada do logaritmo neperiano, podemos estabelecer a seguinte propriedade que é fundamental para esta função: transformar produtos em somas. Para números reais positivos a e b,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \tag{2}$$

Considere a seguinte função:

$$f(X) = \ln(aX) - \ln X$$

Como

$$f'(X) = \frac{1}{aX}a - \frac{1}{X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X} = 0$$

temos que $f(X)$ é uma função constante. Portanto, $f(b) = f(1)$ e daí

$$\ln(ab) - \ln b = \ln a - \ln 1 = \ln a$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Conseqüentemente (2) segue. A identidade (2) pode ser estendida recursivamente quando o produto envolve mais de dois números reais positivos. Aplicando esta propriedade para a^n, quando n é um natural, obtemos que

$$\ln(a^n) = n \ln a \tag{3}$$

Também temos que, para todo número real postitivo a,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \tag{4}$$

De fato, por (2), temos que

$$0 = \ln 1 = \ln\left(a\frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

e o resultado segue.

A identidade (3) vale para expoententes racionais. Isto é, se r é um número racional, então

$$\ln(a^r) = r \ln a \tag{5}$$

Suponha que r é positivo. Neste caso, existem naturais relativamente primos m e n tais que $r = \frac{m}{n}$. Portanto,

$$(a^r)^n = a^{rn} = a^m$$

e daí

$$\ln\left((a^r)^n\right) = \ln\left(a^m\right)$$

Aplicando (3) em ambos os lados da última igualdade, chegamos a

$$n \ln\left(a^r\right) = m \ln a$$

que pode ser reescrita como

$$\ln\left(a^r\right) = \frac{m}{n} \ln a = r \ln a$$

e (5) é verificada neste caso. Assuma que r é negativo. Usando (4), para estabelecer a primeira igualdade, e (5) para um racional positivo, para a segunda igualdade, obtemos

$$\ln\left(a^r\right) = -\ln\left(a^{-r}\right) = -(-r)\ln a = r \ln a$$

e (5) também vale para racionais negativos.

Exercício 1. *Considere a função f cuja expressão é dada por*

$$f(X) = \ln\left(\frac{X-1}{2X+1}\right)$$

(i) *Determine o maior domínio de definição para f*
(ii) *Calcule a derivada de f*
(iii) *Encontre a equação da reta tangente a esta curva no ponto de coordenadas* $(-2, 1)$
(iv) *Ache os valores de X tais que $f'(X) > 0$*

Fazendo $a = e$ na equação (3), temos que

$$\ln(e^n) = n \ln e = n$$

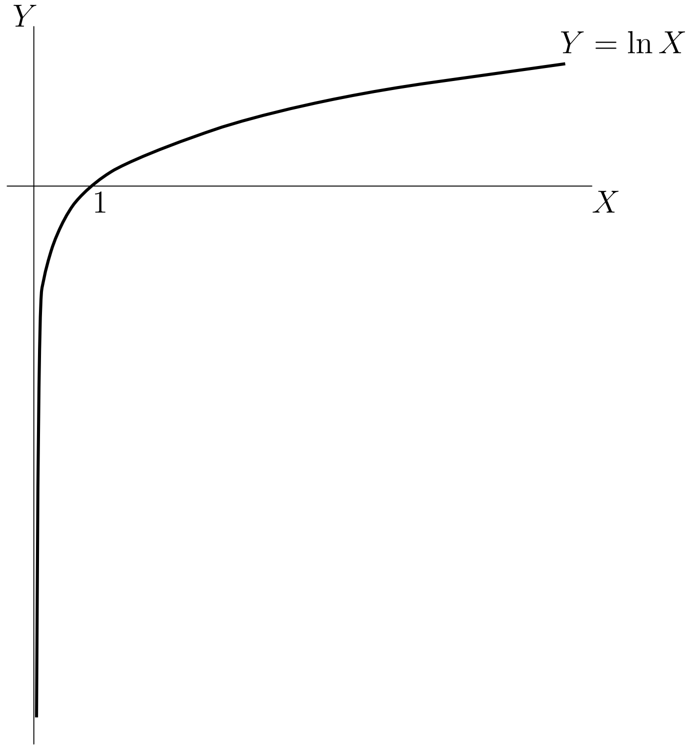
Isto é, qualquer natural n está na imagem da função logaritmo neperiano. Como esta função é crescente, concluímos que

$$\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \tag{6}$$

Por (4) e (6), obtemos que

$$\lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \tag{7}$$

A seguir apresentamos o gráfico da função logaritmo neperiano.



2. As demais funções logarítmicas

Para um número real positivo a, com $a \neq 1$, definimos o logaritmo de um número real positivo X na base a, que é denotado por $\log_a X$, como

$$\log_a X = \frac{\ln X}{\ln a} \tag{8}$$

Portanto, esta função não acrescenta novidades à teoria e a abordaremos rapidamente. A partir desta definição e da derivada do logaritmo neperiano, facilmente concluímos que:

Regra 2. *Se $f(X) = \log_a X$, então*

$$f'(X) = \frac{1}{X \ln a}$$

Exercício 3. *Para números reais positivos a, b, c e d, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, e número racional r, decida sobre a veracidade de cada uma das sentenças a seguir:*

(i) $\log_a(cd) = \log_a c + \log_a d$. *Isto é, o logaritmo na base a transforma produtos em soma.*
(ii) $\log_a c < \log_a d$, *quando $c < d$ e $a < 1$. Isto é, o logaritmo na base a é uma função crescente, quando $a < 1$.*
(iii) $\log_a c > \log_a d$, *quando $c < d$ e $a > 1$. Isto é, o logaritmo na base a é uma função decrescente, quando $a > 1$.*
(iv) $\log_a c^r = r \log_a c$.
(v) $\log_b a \log_a c = \log_b c$.

3. A exponencial na base e

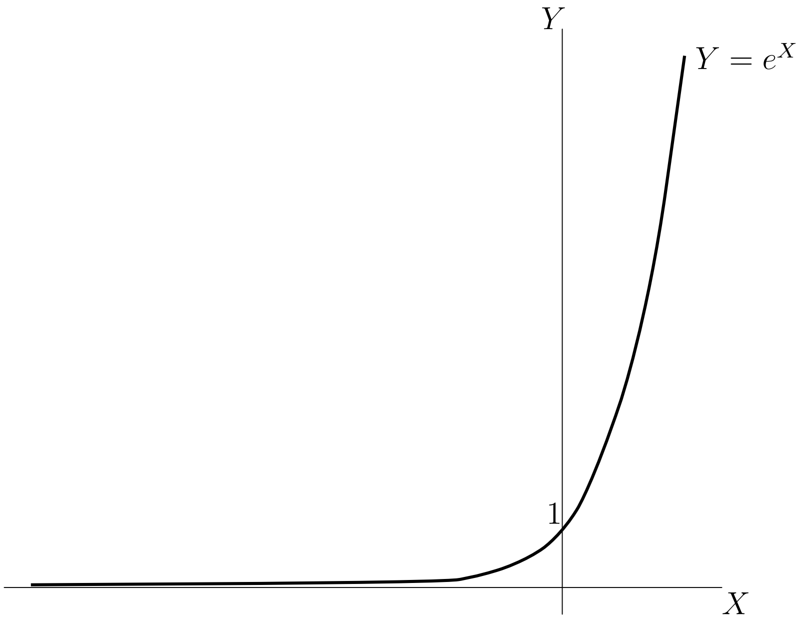
Fazendo $a = e$ na equação (5), obtemos que

$$\ln e^r = r \ln e = r \tag{9}$$

para todo número racional r. Conseqüentemente $f(X) = \ln X$ é a inversa à esquerda de $g(X) = e^X$ quando esta possui apenas o conjunto dos racionais como domínio. Em geral, definimos e^X como sendo a inversa de $\ln X$. Isto é, definimos e^X para um X real de forma que a expressão (9) também seja verdadeira quando $r = X$. Isto é,

$$\begin{aligned} \ln e^X &= X \\ e^{\ln X} &= X \end{aligned}$$

na qual X pode ser qualquer valor real, na primeira identidade, e apenas um real positivo, na segunda. Como a exponencial na base e é a inversa do logaritmo neperiano, o seu gráfico é o simétrico do do logaritmo neperiano com respeito a reta $Y = X$. Portanto, o gráfico da exponencial na base e é o seguinte:



Uma propriedade característica das funções exponenciais é a de transformar somas em produtos. Para números reais a e b, temos que

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{10}$$

De fato,

$$e^{a+b} = e^{\ln e^a + \ln e^b} = e^{\ln(e^a e^b)} = e^a e^b$$

na qual, a primeira igualdade vale, pois o logaritmo neperiano tem como inversa a exponencial na base e; a segunda porque o logaritmo neperiano transforma produtos em somas; e a terceira pela mesma razão da primeira.

Regra 4. *Se $g(X) = e^X$, então $g'(X) = e^X$.*

Como o logaritmo neperiano é a função inversa da exponencial na base e, temos que

$$\ln g(X) = X$$

Pela regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{1}{g(X)}g'(X) = 1$$

e a Regra 4 segue porque $g'(X) = g(X)$.

Exercício 5. *Considere a função f cuja expressão é dada por*

$$f(X) = Xe^{-X}$$

(i) *Calcule a derivada de f*
(ii) *Encontre a equação da reta normal a esta curva no ponto de coordenadas $\left(1, \frac{1}{e}\right)$*
(iii) *Para que valores a derivada de f é positiva? E negativa?*
(iv) *Determine a derivada segunda de f*
(v) *Analise o sinal da derivada segunda de f*

Exercício 6. *Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(i) $a(X) = \ln(X^2 + X + 1)$
(ii) $b(X) = e^{\cos(2X-3)}$
(iii) $c(X) = \operatorname{sen}\left(e^{-X}\right)$
(iv) $d(X) = \operatorname{arctg}\left(e^{4X-1}\right)$
(v) $e(X) = \log_2\left(\frac{2X}{X^2-X+1}\right)$

Exercício 7. *As funções seno e cosseno hiperbólico são definidas respectivamente por*

$$\operatorname{senh} X = \frac{e^X - e^{-X}}{2} \qquad e \qquad \cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

Verifique as seguintes propriedades para estas funções:

(i) *A função seno hiperbólico é ímpar.*
(ii) *A função cosseno hiperbólico é par.*
(iii) $\cosh^2 X - \operatorname{senh}^2 X = 1$. *Logo, para números reais não-nulos a e b, $(a \cosh t, b \operatorname{senh} t)$ é um ponto pertencente a hipérbole de equação $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Isto é, estas funções servem para parametrizar a hipérbole.*
(iv) *A derivada do seno hiperbólico é o cosseno hiperbólico.*
(v) *A derivada do cosseno hiperbólico é o seno hiperbólico.*
(vi) $\cosh X + \operatorname{senh} X = e^X$. *Esta é a decomposição de e^X como a soma de uma função par com uma ímpar.*
(vii) $\cosh 2X = \cosh^2 X + \operatorname{senh}^2 X$
(viii) $\operatorname{senh} 2X = 2 \operatorname{senh} X \cosh X$

Exercício 8. *Para um número real λ, considere a equação diferencial*

$$Y' = \lambda Y \tag{11}$$

Mostre que:

(i) $f(X) = e^{\lambda X}$ *é uma solução de (11).*
(ii) *A derivada de $\frac{g(X)}{f(X)}$ é identicamente nula quando $g(X)$ é uma solução de (11).*
(iii) *As soluções de (11) são múltiplas de $f(X)$.*

4. A exponencial em outras bases

Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$, e r um número racional. Logo

$$\log_a a^r = \frac{\ln a^r}{\ln a} = \frac{r \ln a}{\ln a} = r\frac{\ln a}{\ln a} = r \tag{12}$$

Inspirado em (12), definimos a função exponencial na base a, cujo valor no número real X é denotado por a^X, como sendo a inversa da função logaritmo na base a. Em particular, (12) é um caso particular da seguinte relação

$$\log_a a^X = X$$

que vale para todo número real X.

Regra 9. *Se $f(X) = a^X$, então $f'(X) = a^X \ln a$*

Pela definição

$$\log_a f(X) = X$$

Derivando esta identidade, obtemos que

$$\frac{1}{f(X)\ln a} f'(X) = 1$$

Logo $f'(X) = f(X)\ln a$ e daí a regra segue.

Fica como exercício a próxima propriedade que será utilizada na próxima seção:

Exercício 10. *Para todo número real positivo a, com $a \neq 1$, e número real X,*

$$a^X = e^{X \ln a}$$

5. Derivando $a(X)^{b(X)}$

Considere a função f definida como

$$f(X) = a(X)^{b(X)}$$

para funções a e b. Pelo Exercício 10, temos que

$$f(X) = e^{b(X)\ln a(X)}$$

Conseqüentemente

$$f'(X) = e^{b(X)\ln a(X)}\left(b'(X)\ln a(X) + b(X)\frac{a'(X)}{a(X)}\right)$$

Isto é, estabelecemos a seguinte regra:

Regra 11. *Se $f(X) = a(X)^{b(X)}$, então*

$$f'(X) = a(X)^{b(X)}\left(b'(X)\ln a(X) + b(X)\frac{a'(X)}{a(X)}\right)$$

Vamos usar esta regra para calcular a derivada de $f(X) = X^X$. Neste caso, tomamos $a(X) = b(X) = X$ e daí

$$f'(X) = X^X(\ln X + 1)$$

Exercício 12. *Calcule a derivada das seguintes funções:*

(i) $a(X) = (2 + \operatorname{sen} X)^{\cos X}$
(ii) $b(X) = (4X^2 + 3X + 5)^{\operatorname{arctg} X}$

6. Respostas dos exercícios

1. (i) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ (ii) $\frac{3}{(X-1)(2X+1)}$ (iii) $X - 3Y + 5 = 0$ (iv) Para todo o domínio de f **3.** (i) V (ii) F (é decrescente) (iii) F (é crescente) (iv) V (v) V **5.** (i) $(1-X)e^{-X}$ (ii) $X = 1$ (iii) $X < 1$ (derivada positiva); $X > 1$ (derivada negativa) (iv) $(X-2)e^{-X}$ (v) $X > 2$ (derivada positiva); $X < 2$ (derivada negativa) **6.** (i) $a'(X) = \frac{2X+1}{X^2+X+1}$ (ii) $b'(X) = -2\,\mathrm{sen}(2X-3)e^{\cos(2X-3)}$ (iii) $c'(X) = -e^{-X}\cos(e^{-X})$ (iv) $d'(X) = \frac{4e^{4X-1}}{e^{8X-2}+1}$ (v) $e'(X) = \frac{1-X^2}{X(X^2-X+1)\ln 2}$ **12.** (i) $a'(X) = (2+\,\mathrm{sen}\,X)^{\cos X}\left(-\,\mathrm{sen}\,X \ln(2+\,\mathrm{sen}\,X) + \frac{\cos^2 X}{2+\,\mathrm{sen}\,X}\right)$ (ii) $b'(X) = (4X^2+3X+5)^{\mathrm{arctg}\,X}\left(\frac{\ln(4X^2+3X+5)}{X^2+1} + \mathrm{arctg}\,X \frac{8X+3}{4X^2+3X+5}\right)$

Conteúdo da nona aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos