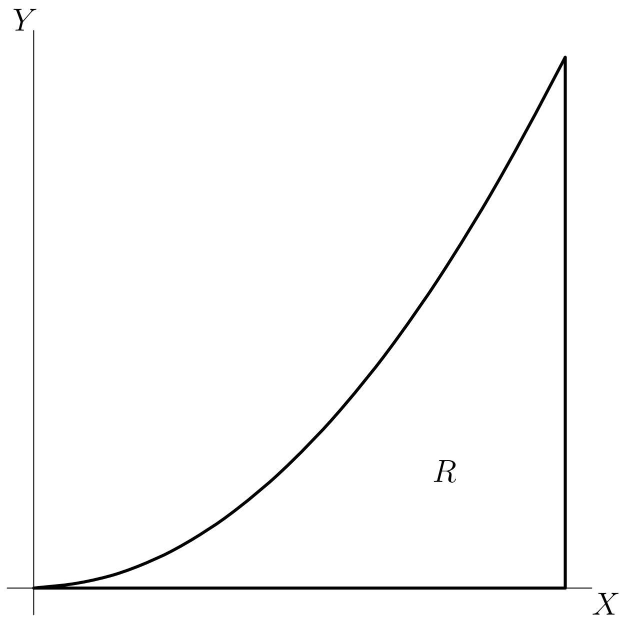
CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA QUINTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, iremos calcular o valor da área de uma região tendo como fronteiras o gráfico de uma função, duas retas verticais e o eixo das abscissas.

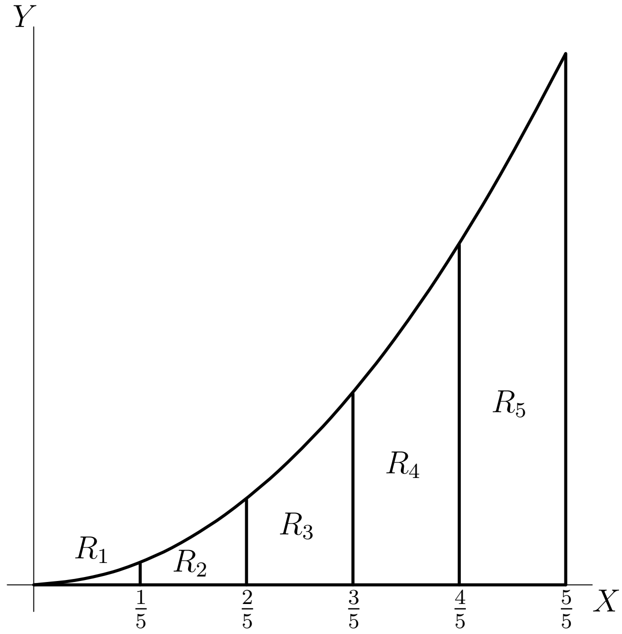
1. A área de uma região limitada superiormente pela parábola

A função cuja expressão é dada por $f(X) = X^2$ tem como gráfico a parábola de equação $Y = X^2$. Qual a área da região R limitada pelo gráfico de f, pelas retas verticais de equações $X = 0$ e $X = 1$ e pelo eixo das abscissas? Representamos R na próxima figura. Note que a reta vertical $X = 0$ pode ser desconsiderada como uma das fronteiras da região porque possui apenas um de seus pontos na frontreira, a saber: a origem de coordenadas $(0, 0)$. Foi listada como fronteira, pois este é um caso particular de uma situação muito mais geral que será abordada na próxima aula.



A região R pode ser decomposta em 5 outras regiões, que chamaremos de R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5, através de retas verticais que passam pelos pontos de abscissas $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Note que cada uma destas regiões tem como uma de suas fronteiras respectivamente o intervalo do eixo das abscissas $\left[\frac{0}{5}, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ e $\left[\frac{4}{5}, \frac{5}{5}\right]$. Observe que estes intervalos têm o mesmo comprimento que é igual a $\frac{1}{5}$ do comprimento do intervalo $[0, 1]$. Veja a figura a seguir.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

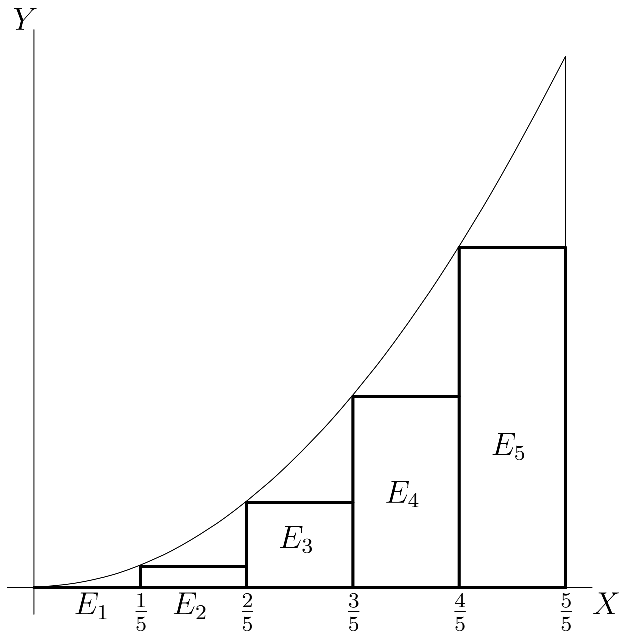


Se as áreas de R, R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 medem respectivamente A, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, então

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \tag{1}$$

Para cada i em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, consideraremos dois retângulos E_i e D_i tais que

$$E_i \subset R_i \subset D_i \tag{2}$$



Isto é, E_i está contido em R_i e R_i está contido em D_i. Seja

- E_i o retângulo tendo as fronteiras inferior e à esquerda da região R_i como dois de seus lados. Os comprimentos destes lados são respectivamente $\frac{1}{5}$ e $f\left(\frac{i-1}{5}\right) = \frac{(i-1)^2}{5^2}$. Logo sua área é igual a $\frac{(i-1)^2}{5^3}$.

- D_i o retângulo tendo as fronteiras inferior e à direita da região R_i como dois de seus lados. Os comprimentos destes lados são respectivamente $\frac{1}{5}$ e $f\left(\frac{i}{5}\right) = \frac{i^2}{5^2}$. Logo sua área é igual a $\frac{i^2}{5^3}$.

Na figura anterior representamos os retângulos E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5. Note que o retângulo E_1 é degenerado, isto é, coincide com um segmento. Por (2), a área de E_i é menor que a de R_i que é menor que a de D_i, isto é,

$$\frac{(i-1)^2}{5^3} < A_i < \frac{i^2}{5^3}$$

Conseqüentemente, ao somarmos estas desigualdades para todos os valores de i, temos que

$$\frac{0^2}{5^3} + \frac{1^2}{5^3} + \frac{2^2}{5^3} + \frac{3^2}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} < A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 < \frac{1^2}{5^3} + \frac{2^2}{5^3} + \frac{3^2}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} + \frac{5^2}{5^3}$$

Podemos reescrever estas desigualdades como

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{5^3} < A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5^3}$$

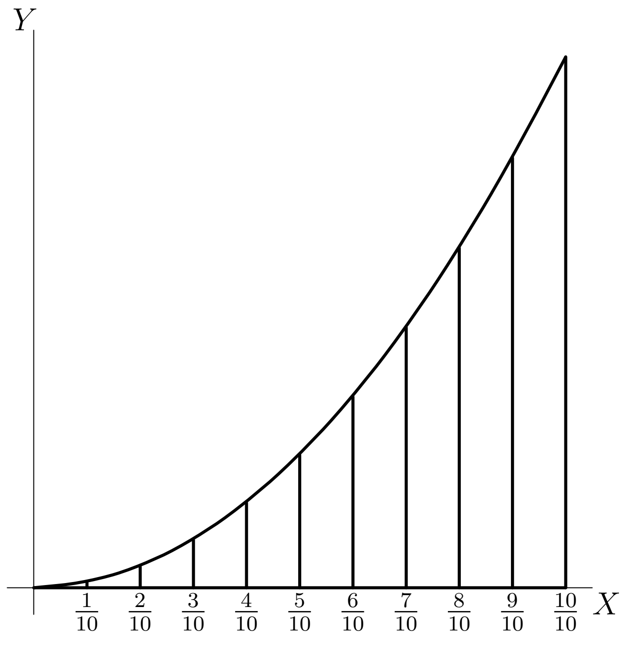
Por (1), obtemos que

$$\frac{6}{25} < A < \frac{6}{25} + \frac{1}{5} \tag{3}$$

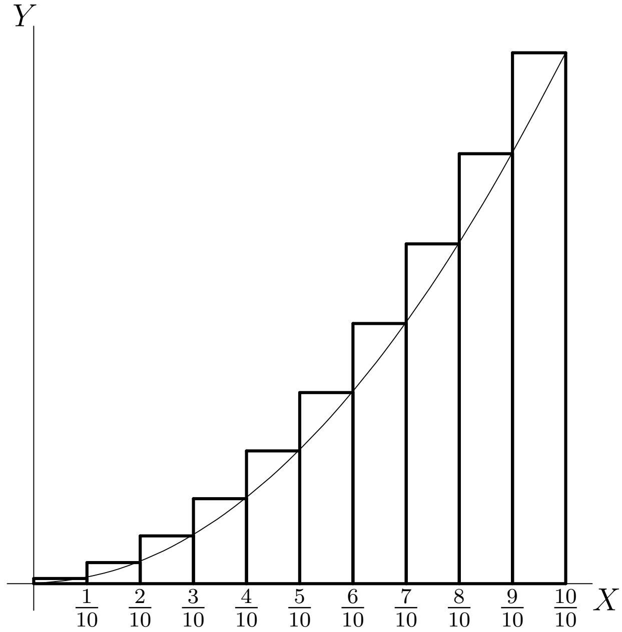
Portanto, a distância de A, que está no intervalo $\left(\frac{6}{25}, \frac{6}{25} + \frac{1}{5}\right)$, para o ponto médio deste intervalo, que é

$$\frac{6}{25} + \frac{1}{10} = \frac{17}{50} = 3,4$$

é inferior a $\frac{1}{10}$. Conseqüentemente este valor aproxima a área de R. Obtemos uma melhor aproximação para A ao reduzirmos o comprimento o intervalo que contém A, isto é, ao melhorarmos a estimativa dada em (3). Faremos isto decompondo R em mais regiões. Na figura seguinte representamos a decomposição de R, por intermédio de retas verticais que passam pelos pontos de abscissas $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}$e $\frac{9}{10}$, em 10 regiões.

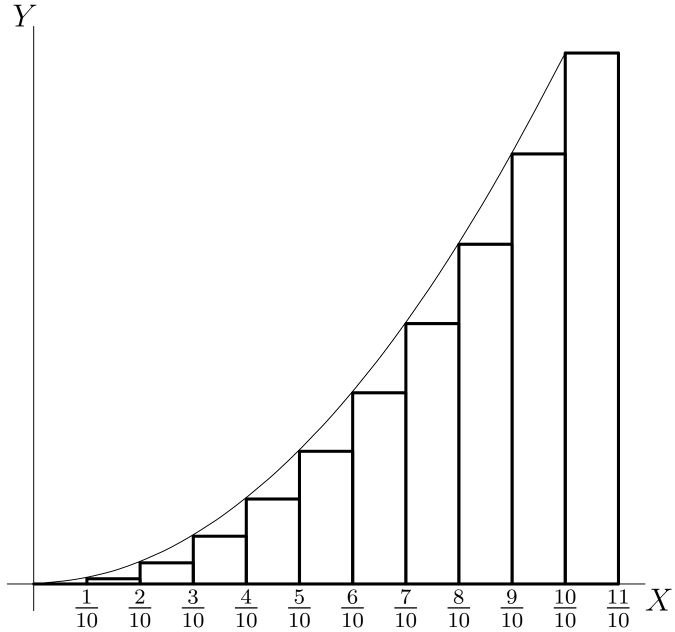


Na próxima figura representamos 10 retângulos, cada um contendo uma das regiões da decomposição de R representada na figura anterior.



A soma das áreas destes retângulos é maior que A. Note que o i-ésimo retângulo tem o intervalo $\left[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}\right]$ do eixo das abscissas como um dos lados e $f\left(\frac{i}{10}\right)$ como o comprimento de um lado perpendicular a este. Portanto, sua área é igual a

$$\frac{1}{10} f\left(\frac{i}{10}\right) = \frac{i^2}{10^3}$$



Conseqüentemente

$$A < \sum_{i=1}^{10} \frac{i^2}{10^3} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2}{10^3} = \frac{385}{1000} \tag{4}$$

A figura anterior representa a translação horizontal para a direita destes retângulos de $\frac{1}{10}$. Note que os 9 primeiros retângulos ficam contidos na região R. Apenas o décimo, cuja área é igual a $\frac{1}{10}$, fica no exterior. Logo

$$\frac{385}{1000} - \frac{1}{10} = \frac{285}{1000} < A \tag{5}$$

Note que (4) juntamente com (5) melhoram os limites dados em (3). Quanto maior for o número de regiões em que R for dividido melhor serão os limites inferiores e superiores obtidos para A.

Em geral, para um natural n, as retas verticais de equações $X = \frac{1}{n}, X = \frac{2}{n}, X = \frac{3}{n}, \ldots, X = \frac{n-1}{n}$ particionam R em n regiões. Percorrendo estas regiões, da esquerda para a direita, a i-ésima região tem o intervalo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ do eixo das abscissas na sua fronteira. Mais ainda, esta região está contida no retângulo que tem este intervalo como lado inferior e lados laterais medindo $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$, cuja área mede $\frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^3}$. A soma das áreas de todos estes retângulos é um limite superior para A. Isto é,

$$A < \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}{n^3} \tag{6}$$

Transladando horizontalmente estes retângulos para a direita de $\frac{1}{n}$, todos, com exceção do n-ésimo, que tem lados medindo $\frac{1}{n}$ e 1, ficam contidos em R. Logo a soma das áreas dos $(n-1)$ primeiros retângulos é um limite inferior para A. Logo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}{n^3} - \frac{1}{n} < A \tag{7}$$

Como a diferença entre o limite superior e o inferior para A é $\frac{1}{n}$, que tende a 0 quando n tende a $+\infty$, temos que

$$A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}{n^3} \tag{8}$$

Antes de computar este limite, vamos obter a soma dos n primeiros quadrados de naturais. Usaremos a seguinte identidade:

$$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

Somando esta identidade para todos os naturais entre 1 e n, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Observe que esta identidade pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \tag{9}$$

Note que o lado esquerdo desta identidade, após realizarmos os cancelamentos possíveis, reduz-se a $(n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$. Como

$$\sum_{i=1} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

a identidade (9) pode ser reescrita como

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

Multiplicando esta identidade por 2, chegamos a

$$2n^3 + 6n^2 + 6n = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3n^2 + 3n + 2n$$

Ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{10}$$

Portanto, obtemos a expressão para a soma dos n primeiros quadrados. Substituindo (10) em (8), temos que

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Isto é, a área da região R é igual a $\frac{1}{3}$

Exercício 1. *Mostre que, para todo natural n, a soma dos n primeiros cubos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros naturais, isto é,*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = [1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n]^2$$

Usando esta identidade, calcule a área da região limitada pelas retas de equações $Y = 0$ e $X = 1$ e pela curva de equação $Y = X^3$.

Conteúdo da décima quinta aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos