UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - UFPE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS

MATEMÁTICA ATUARIAL: proposta de uma aplicação de *software* para o cálculo de prêmios de seguro e anuidades aleatórias

RECIFE-PE
2019

THOMÁS FREUD DE MORAIS GONÇALVES

MATEMÁTICA ATUARIAL: proposta de uma aplicação de *software* para o cálculo de prêmios de seguro e anuidades aleatórias

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado à Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais.

Orientador: Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva

RECIFE-PE

2019

"Sic Parvis Magna"

Resumo

O presente trabalho teve o objetivo de desenvolver uma aplicação de *software* para o cálculo de prêmios de seguros de vida e anuidades estocásticas. Para tanto, alguns modelos atuariais são descritos e é adotada uma metodologia com o objetivo de transformar esses modelos em algoritmos programáveis. Foi desenvolvida, em linguagem Java, uma aplicação de *software* funcional, incorporando e executando os algoritmos elaborados. Uma apresentação da aplicação foi feita utilizando-se de capturas de tela e alguns exemplos básicos. O programa e seu respectivo código-fonte estão disponibilizados no repositório de códigos **GitHub** sob licença livre para uso e melhorias da aplicação.

Palavras-chaves: matemática atuarial. algoritmos. seguros. anuidades aleatórias.

Abstract

This paper aimed to develop a software application focused on premium calculation of life insurances and life annuities contracts. In order to do so, some actuarial models are described and a methodology is adopted to transform these models into programming algorithms. Likewise, a Java application was developed, implementing the set of programming algorithms written in the text. It was also developed a presentation of the application, with the use of screenshots and simple examples. Both the application and its source code are available in the GitHub repository, under a free license, for those who want to use and improve it.

Key-words: actuarial mathematics. algorithms. insurance. live annuities

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de algoritmos

Sumário

Introdução

A matemática atuarial, também denominada matemática de seguros, é uma disciplina dotada de alta relevância na preparação técnica de um atuário. Sua aplicação é necessária na precificação de seguros de vida, assim como no cálculo de benefícios em fundos de pensão ou quaisquer outras análises que tratam da avaliação de rendas que envolvam algum componente aleatório. Aliás, é a existência de incertezas relacionadas a um fluxo de pagamentos que faz com que a matematica atuarial seja tão relevante. No entanto, a aleatoriedade, quando inclusa no cálculo financeiro, aumenta sua complexidade. Se considerarmos a didática no processo de ensino dessa disciplina, existe a abordagem de ensino através do estudo de funções contínuas, utilizando recursos do cálculo diferencial e integral como meio para cálculo de prêmios de seguros e rendas aleatória. Adicionalmente, há também a abordagem discreta, que com apoio dos instrumentos computacionais, na prática, prevalece como recurso usual. Decorrente disso, outra questão interessante na qual podemos pensar é acerca dos *softwares* voltados para esse tipo de análise. Se nos determos apenas à academia, temos o ambiente de programação e análise de dados R, o qual é um *software* livre, expansível e colaborativo. No R existem alguns pacotes criados para a área atuarial, majoritariamente voltados para cálculo de seguros não-vida, exceto um, denominado *lifecontingencies*, o qual fora desenvolvido para o cálculo atuarial de seguros de vida (SPEDICATO, 2013). Outro recurso utilizado é o Microsoft Excel®, inclusive como recurso didático, como pode ser visto em Promislow (2014) e Rotar (2014).

Por mais que o R seja um programa bastante difundido na academia, para alguns estudantes ele apresenta o inconveniente de ser uma aplicação que funciona com base na execução comandos, exigindo do usuário, no mínimo, algum entendimento acerca da programação de computadores e da linguagem R em si. Ademais, tanto o R quanto o Microsoft Excel® carecem de uma interface amigável ao usuário, no sentido de que não abstraem os métodos matemáticos necessários aos cálculos, o que poderia ser um fator dificultante ao aprendizado da disciplina, a depender do perfil do estudante.

Considerando isso, esse trabalho propõe explorar a construção de uma alternativa a esses dois recursos, por assim dizer, "mais amigável" ao usuário, por meio da adoção de uma interface gráfica e a apresentação dos resultados sem exigir do usuário o conhecimento dos pormenores envolvendo os cálculos e suas fórmulas. É claro, o trabalho não tem o objetivo de desenvolver uma aplicação completa, cobrindo todas as funções encontradas na matemática atuarial, mas sim um esboço minimamente funcional – implementando as metodologias atuariais de alguns dos cálculos de seguros e anuidades aleatórias – como recurso ilustrativo para a ideia. Para tanto, adotar-se-á uma metodologia inspirada no trabalho de Crabb (1979) o qual propõe uma abordagem sobre a ótica computacional dos métodos de cálculo atuarial. Outro trabalho consultado foi o de Christiansen et al. (2013), o qual aborda o uso de uma linguagem de domínio específico como meio de descrever e planejar produtos atuariais, precificar apólices e calcular reservas. Todavia, a metodologia empregada nesse trabalho consiste marjoritariamente em transformar funções de cálculo atuariais em algoritmos programáveis em qualquer linguagem, estratégia que está, em certo grau, alinhada ao trabalho de Crabb (1979).

Visando o objetivo estabelecido, se faz necessário o cumprimento de algumas etapas iniciais. A primeira delas é a realização de uma revisão bibliográfica das metodologias de cálculo atuarial de rendas aleatórias e seguros, apresentada no capítulo 1 do trabalho. Ainda no capítulo 1, faz-se uma seleção dos métodos de cálculo pertinentes à presente proposta. Após isso, apresenta-se no capítulo 2 os algoritmos escritos a partir dos métodos de cálculo dos seguros e rendas aleatórias. Por fim, após o desenvolvimento da aplicação de *software*, os resultados, mediante o uso de capturas de tela, são apresentados e comentados. Também foram feitas as indicações acerca da disponibilização da aplicação e de seu respectivo código-fonte, tais como o repositório onde o código-fonte foi disponibilizado e as permissões para uso e modificação.

1 Fundamentação Teórica

1.1 Modelos atuariais de sobrevivência

Em ciências atuariais é importante se fazer investigações a respeito da vida futura de indivíduos com o objetivo de definir sua expectativa de vida, bem como probabilidades de morte e sobrevivência. Para tal, considerando a incerteza quanto ao tempo de vida futuro de indivíduos, define-se essa quantidade como sendo uma variável aleatória e, a partir disso, é possível estimar a respectiva distribuição de probabilidade, o que possibilita calcular probabilidades de morte e sobrevivência dos indivíduos em questão. Essa informação é relevante quando se quer precificar uma apólice de seguro ou contratos de pensões, dado que, para tal, é necessário que se estude o modelo de mortalidade da população da qual o indivíduo de interesse faz parte . Daí então é possível calcular a expectativa de vida dessa pessoa, assim como sua probabilidade de morrer em determinada idade de sua vida, por exemplo, ao longo da vigência do contrato de seguro ou de anuidade adquirido por ela (no escopo desse trabalho, as palavras *renda* e *anuidade* serão sempre empregadas em um contexto aleatório, o que implica dizer que, ambas, embora quando não esteja explicito, se tratam de tanto de anuidades aleatórias quanto rendas aleatórias).

Considerando isso, precisamos descrever um modelo atuarial que satisfaça essas necessidades. Tal modelo será aqui designado, assim como em Cunningham, Herzog e London (2006), Macdonald, Richards e Currie (2018) como *modelo atuarial de sobrevivência*. Começamos com a seguinte definição, a qual pode ser verificada em, por exemplo, Dickson, Hardy e Waters (2016), Rotar (2014), Bowers et al. (1997).

Definição 1. *Em acordo com a notação atuarial padrão, o símbolo* (x) *denota "uma pessoa de idade* x*", tal que* x *é medido em anos e* $x \geq 0$*. Para esse indivíduo, dado que ele tem* x *anos, seu tempo de vida futuro é designado pela variável aleatória* T_x*, de modo que* $x + T_x$ *é a variável aleatória que representa idade com a qual* (x) *estará no momento de sua morte. Sendo* T_x *uma variável aleatória, sua função de probabilidade acumulada é indicada por*

$$F_x(t) = \Pr[T_x \leq t]. \tag{1.1}$$

A equação (1.1) indica a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x + t$. Portanto, $F_x(t)$ denota a probabilidade de (x) não sobreviver além da idade $x + t$, de modo que $F_x(t)$ é denominada distribuição do tempo de vida, conforme Dickson, Hardy e Waters (2016). Além disso, em ciências atuariais, uma função de grande interesse na análise de modelos de sobrevivência é a função complementar $S_x(t)$, definida como segue.

Definição 2. *Seja* $F_x(t)$ *como em (1.1), define-se seu complementar* $S_x(t)$ *como a função* *de sobrevivência de T_x, tal que*

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = \Pr[T_x > t] \tag{1.2}$$

com (1.2) indicando a probabilidade de (x) sobreviver até, pelo menos, a idade $x + t$.

A equação (1.3) consiste em outra maneira de interpretar (1.1). Definindo-se T_0 como o tempo de vida futuro de um indivíduo recém nascido, ou seja, quanto este estiver com idade $x = 0$, portanto, (1.3) indica que a probabilidade de (x) morrer entre as idades x e $x + t$ é equivalente a probabilidade de um indivíduo (0) sobreviver à idade x e, dado isto, falecer entre as idades x e $x + t$.

$$F_x(t) = Pr[T_0 \leq x + t | T_0 > x] = \frac{Pr[x < T_0 \leq x + t]}{Pr[T_0 > x]}. \tag{1.3}$$

A partir do teorema da probabilidade condicional e do resultado em (1.3), ver Ross (2014) e Dickson, Hardy e Waters (2016), pode-se obter, de forma equivalente, a seguinte igualdade reescrita em termos de $F_x(t)$

$$F_x(t) = \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{S_0(x)}. \tag{1.4}$$

Além disso, usando (1.2) e (1.4) e fazendo as devidas manipulações algébricas, obtemos o seguinte resultado

$$S_x(t) = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}. \tag{1.5}$$

Ao multiplicarmos ambos os lados de (1.5) por $S_0(x)$, conforme em Dickson, Hardy e Waters (2016), obtém-se

$$S_0(x + t) = S_0(x)S_x(t), \tag{1.6}$$

a qual estabelece que: a probabilidade de um indivíduo, ao nascer, sobreviver à idade $x + t$ é igual a probabilidade de ele sobreviver até a idade x e então, dado isso, sobreviver da idade x até a idade $x + t$. Esse resultado, no âmbito da matemática de seguros e rendas é denominado: regra da multiplicação (PROMISLOW, 2014; GUPTA; VARGA, 2013).

1.2 Notação atuarial internacional

Existe uma notação atuarial internacional padrão adotada a partir do Segundo Congresso Internacional de Atuários. Esse congresso aconteceu em Londres no ano de 1898 e a proposta fora apresentada visando unificar a linguagem atuarial, facilitando o entendimento entre os profissionais e simplificando sua comunicação (WOLTHUIS, 2005a). Nessa seção será intruduzida essa notação como o equivalente atuarial para os modelos analisados na seção anterior e a partir de então seguiremos utilizando a notação apresentada nessa seção ou aquela adotada na seção anterior, sempre que for conveniente, inserindo ao longo do texto, quando necessário, novos elementos desse padrão.

Definição 3. *Seja ${}_tq_x$ o símbolo que indica a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x+t$ com ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ indicando o evento complementar a ${}_tq_x$. Além disso, ${}_{u|t}q_x$ indica a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver a idade $x+u$ e morrer antes da idade $x+u+t$. Considerando as definições na seção anterior, segue a notação atuarial internacional.*

$$ {}_tq_x = F_x(t) = \Pr[T_x \leq t]. \tag{1.7}$$

$$ {}_tp_x = S_x(t) = \Pr[T_x > t]. \tag{1.8}$$

$$ {}_{x+t}p_0 = {}_xp_0 {}_tp_x = S_0(x+t) = S_0(x)S_x(t). \tag{1.9}$$

$$ {}_{u|t}q_x = \Pr[u < T_x \leq u+t] = S_x(u) - S_x(u+t). \tag{1.10}$$

1.3 Anos completos de vida futura

No cálculo de seguros e anuidades usando metodologia discreta é necessário utilizar uma variável aleatória que represente a parte inteira de T_x, qual seja, anos inteiros de vida futura K_x, uma variável aleatória definida como

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor , \tag{1.11}$$

com o símbolo $\lfloor T_x \rfloor$ indicando que somente a parte inteira de T_x é capturada. Portanto, K_x é uma variável aleatória discreta, representando a parte inteira de T_x, sendo assim, considerando $t \in \mathbb{N}$, a distribuição de probabilidade de K_x é simbolicamente representada por:

$$\Pr[K_x = t] = \Pr[t \leq T_x < t+1], \tag{1.12}$$

a qual indica a probabilidade de (x) sobreviver t anos e morrer antes da idade $x+t+1$.

Usando a notação introduzida na seção (1.2), a igualdade em (1.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Pr[K_x = k] = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$$

. Usando (1.9) para reescrever ${}_{k+1}p_x$ como ${}_kp_xp_{x+k}$ e, em seguida, pondo ${}_kp_x$ em evidência, temos que

$$\Pr[K_x = k] = {}_kp_x - {}_kp_xp_{x+k},$$

$$\Pr[K_x = k] = {}_kp_x(1 - p_{x+k}),$$

considerando a identidade ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ vista anteriormente, isolando-se ${}_tq_x$ e substituindo na última igualdada obtemos a definição seguinte.

Definição 4. *Seja $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ uma variável aleatória obtida a partir do truncamento de T_x denominada anos inteiros de vida futura, sua função de probabilidade é dada por*

$$Pr[K_x = k] = {}_kp_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x. \tag{1.13}$$

tal que (1.13) indica a probabilidade de (x) viver k anos e morrer antes de completar $x + k + 1$ anos (DICKSON; HARDY; WATERS, 2016; CUNNINGHAM; HERZOG; LONDON, 2006).

1.4 Tábua de vida

Tábuas de vida, também denominadas de tábuas de sobrevivência ou mortalidade (aqui será adotado, genericamente, o termo tábua, utilizado como sinônimo tanto para tábua de vida como tábua de mortalidade) são adotadas em seguradoras no cálculo atuarial de prêmios e reservas de seguros e anuidades já que através delas é possivel determinar probabilidades de vida e morte de segurados (pessoas que compram seguros) (WOLTHUIS, 2005b). A tábua de vida é um modelo de sobrevivência discreto adotado por atuários para estimar o padrão de mortalidade – ou a experiência de mortalidade – de uma população ou grupo de indivíduos (PROMISLOW, 2014; GUPTA; VARGA, 2013).

Como o interesse aqui é estudar o padrão de sobrevivência de um grupo, é preciso adotar um modelo geral por meio do qual seja possível estimar o número de pessoas vivas no grupo a cada período de tempo, em geral, a cada ano. Em decorrência disso, apresenta-se a próxima definição (CUNNINGHAM; HERZOG; LONDON, 2006).

Definição 5. *Seja ${}_tp_x$ uma função de sobrevivência dada e seja l_x o número de pessoas vivas de uma determinada população e que estão na idade x, sendo assim, o número esperado de pessoas da idade x que estarão vivas na idade $x + t$ será dado por:*

$$l_{x+t} = l_x {}_tp_x. \tag{1.14}$$

A identidade (1.14) fornece um recurso valioso para o cálculo de seguros e rendas. Outras funções importantes são derivadas de l_x. Ao tomar (1.14) e dividindo ambos os lados por l_x obtém-se

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \tag{1.15}$$

e a partir disso, subtraindo ambos os membros de 1 em (1.15)

$$1 - {}_tp_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}, \tag{1.16}$$

agora, definindo a diferença no numerador como

$$ {}_td_x = l_x - l_{x+t}, \tag{1.17}$$

obtém-se a seguinte igualdade

$$ {}_tq_x = \frac{{}_td_x}{l_x}, \tag{1.18}$$

que calcula a probabilidade condicional de um indivíduo morrer entre as idades x e $x + t$, dado que chegou com vida a idade x.

Dito isso, uma tábua atuarial consiste em uma matriz que elenca as quantidades, em colunas, l_x e d_x respectivamente, número esperado de pessoas vivas na idade x e número esperado de pessoas que morreram na idade x, com $x \in \mathbb{Z}_+$ e $x \leq \omega$ tal que ω é a idade limite da tábua, determinando, por hipótese, que nenhum indivíduo atingirá essa idade, ou seja, todos morrem antes da idade ω (PROMISLOW, 2014). Na Tabela (1) apresenta-se um exemplo de parte de uma tábua de vida (DICKSON; HARDY; WATERS, 2016; CUNNINGHAM; HERZOG; LONDON, 2006).

Tabela 1 – Exemplo de parte de uma tábua.

x	l_x	d_x
0	10000	80
1	9920	52
2	9868	57
3	9811	72
4	9739	87
5	9652	90
6	9562	70
7	9492	76
8	9416	79
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega - 1$	10	10
ω	0	0

1.4.1 Construindo uma tábua de vida

As tábuas de vida em empresas de seguro são, via de regra, elaboradas a partir de dados da própria seguradora (WOLTHUIS, 2005b). Na prática as probabilidades q_x são estimadas e ajustadas a partir da base de dados e de premissas básicas. Uma excelente abordagem que trata da elaboração e ajuste de tábuas pode ser vista em Macdonald, Richards e Currie (2018). Uma vez obtido o vetor de probabilidades contendo todos os valores de q_x, a partir dele pode-se encontrar os valores l_x, d_x e ${}_tp_x$ com as recursões apresentadas a seguir - facilmente deduzidos a partir dos resultados anteriores (PROMISLOW, 2014)

$$ d_x = l_x q_x, \tag{1.19}$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x. \tag{1.20}$$

Utilizando as recursões (1.19) e (1.20), acrescentando a condição inicial $l_0 = N$ (com N sendo um número grande, ex: $N = 100.000$) é possível tabelar todos os valores de l_x e d_x. Esses resultados são adotados como parte da metodologia empregada nesse trabalho para a construção de uma tábua de mortalidade, a partir dos valores de q_x, como será visto adiante.

1.5 Juros e fator de desconto

A teoria dos juros desempenha papel angular no que tange ao cálculo de seguros e rendas aleatórias. Isso se deve ao princípio da equivalência, o qual determina que o valor presente de um fluxo financeiro correspondente às obrigações do contrato, por parte do contratante, devem ser iguais, em uma mesma data, ao valor presente dos fluxos financeiros referentes aos benefícios (GERBER, 1997). Na Figura (1) é possível ver uma representação gráfica dessa ideia: os fluxos de saída $F_1, \ldots, F_4$ devem ser equivalentes ao de entrada F_0 em uma mesma data, por exemplo, na data inicial $t = 0$. Para que essa comparação seja feita, os fluxos $F_1, \ldots, F_4$ devem ser avaliados no instante inicial do gráfico – se o ponto escolhido é $t = 0$ ou em qualquer outro ponto, desde que todos os fluxos sejam avaliados em um mesmo ponto – e esse processo é feito mediante o uso de fatores de desconto (se a data focal é anterior ao fluxo) ou fator de acumulação (se a data focal é posterior ao fluxo).

Um fator de desconto é uma função de dois argumentos: taxa de juros e tempo. Por conta disso, a taxa de juros é, em geral, informada em uma unidade padrão de tempo (dias, meses, anos, etc.) por exemplo, 2% ao ano (taxa efetiva) (GERBER, 1997). O período atrelado a taxa de juros determina quantas vezes, em determinado espaço de tempo, incidirão juros sobre determinado capital (capitalização).

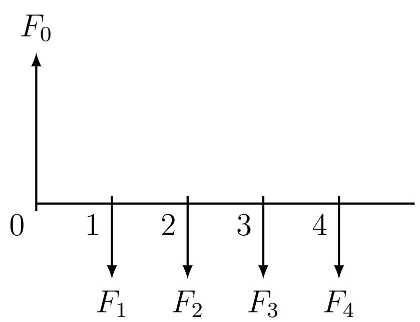

Figura 1 – Diagrama de fluxo de caixa.

Para uma abordagem *razoavelmente* aproprofundada sobre a teoria dos juros e acerca dos fatores de desconto e acumulação recomenda-se ao leitor obras como Gupta e Varga (2013) ou Rotar (2014). No escopo desse trabalho, precisamos definir o fator de desconto, como segue.

Definição 6. *Seja i uma taxa de juros constante, composta e capitalizada periodicamente (por exemplo, ao ano), um fator de desconto que calcula o valor presente de 1 unidade monetária descontada em t-períodos (por exemplo, t-anos) é dado por*

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t}. \tag{1.21}$$

Quando combinamos as taxas de juros, por meio de funções de desconto, com os modelos de sobrevivência, obtemos o arcabouço técnico necessário para calcular prêmios de seguro de vida (valor pago pelo segurado a seguradora em decorrência da contratação do seguro) e anuidades aleatórias (fluxos de pagamentos recebidos pelo segurado ou beneficiário em decorrência de aquisição de rendas aleatórias).

1.6 Seguros e anuidades aleatórias

O princípio básico subjacente ao seguro pode ser descrito, brevemente, como sendo um acordo legal firmado entre uma empresa de seguros (segurador), a qual se compromete a pagar uma soma (benefício) em determinado momento, dado que ocorra um determinado evento e dele decorra uma perda financeira mensurável e, por outro lado, a pessoa que compra o seguro (segurado), comprometendo-se a fazer pagamentos periódicos de valores pré-definidos (prêmios) (PROMISLOW, 2014). Há uma variedade de metodologias as quais podem ser utilizadas na precificação de prêmios de seguro e embora nesse texto algumas vezes a palavra *precificar* tenha sido adotada, nesses casos, não fazia-se referência ao preço comercial de seguros, mas tão somente ao seu valor financeiro em acordância com o que denominou-se princípio da equivalência (caso o leitor tenha interesse em conhecer essas metodologias, recomenda-se o capítulo 7 de Dickson, Hardy e Waters (2016)). Além disso, quanto ao princípio da equivalência no contexto dos modelos de seguros e anuidades, deve-se pontuar que ao combinar-se o fator de desconto com os modelos de sobrevivência opera-se uma pequena adaptação a definição desse princípio. Portanto, nesse contexto, o princípio da equivalência determina que o valor presente esperado de um fluxo de obrigações deve ser igual ao valor presente esperado do fluxo de benefícios associado ao mesmo fluxo de obrigações (NORBERG, 1991; DICKSON; HARDY; WATERS, 2016).

Os seguros dos quais tratar-se-ão nesse trabalho são aqueles considerados seguros de vida, ou seja, cujo fato gerador da obrigação por parte da seguradora dar-se-á em função da morte ou sobrevivência do segurado (MACDONALD, 2005a), de acordo com o que for firmado no contrato. Também serão considerados alguns modelos de cálculo de anuidades, compromisso no qual o segurador está de acordo em pagar uma renda periódica ao segurado enquanto ele permanecer vivo (esse é o caso dos fundos de pensão).

1.6.1 Seguros

Conforme Promislow (2014), um contrato de seguro de vida é aquele firmado entre segurador e segurado, no qual, em troca do pagamento dos prêmios – por parte do segurado – o segurador pagará uma quantia financeira pré-determinada – quando da morte do segurado (benefício) – ao beneficiário de direito. O objetivo aqui será formular o cálculo do valor presente atuarial de contratos de seguro, usando o princípio da equivalência e toda a teoria anteriormente abordada.

Para tanto, considere T_x conforme definido na seção (1.1) e v^t na forma como foi apresentado na seção (1.5) e seja B o valor do benefício que será recebido pelo beneficiário em decorrência da morte do segurado, além disso, recordemos da teoria da probabilidade que se X é uma variável aleatória então $g(X)$ também o será, dadas algumas restrições básicas (ROSS, 2014) que aqui, por suposição, serão tomadas como válidas e não serão demonstradas. De acordo com Rotar (2014), tem-se a definição a seguir.

Definição 7. *Para (x), o valor presente estocástico de um contrato de seguro com cobertura vitalícia e que paga um benefício $B = 1$ quando da morte do segurado é uma variável aleatória Z tal que:*

$$Z_{T_x} = v^{T_x}. \tag{1.22}$$

Todavia, como T_x é uma variável aleatória, o que indica a imprecisão acerca do momento exato em que acontecerá a morte do segurado, portanto, conforme Dickson, Hardy e Waters (2016), o interesse de fato recai em calcular o valor esperado de v^{T_x}. Nessa abordagem, será feita a substituição de T_x por K_x conforme definido na seção (1.3). Sendo assim, apresenta-se a seguinte definição.

Definição 8. *Seja $E[v^{T_x}]$ o valor esperado de v^{T_x} e sejam k e x (medidos em anos); o valor presente esperado (ou valor presente atuarial) de um seguro de vida com cobertura vitalícia que paga $B = 1$ ao final do ano da ocorrência da morte do segurado de idade x é dado por*

$$A_x = E[v^{T_x}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Pr[K_x = k], \tag{1.23}$$

e usando (1.13) pode-se reescrever A_x como sendo

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x \; q_{x+k}. \tag{1.24}$$

Existem alguns tipos básicos de contratos de seguro abordados na literatura embora, na prática, muitos outros modelos possam ser criados. Por conveniência, nesse trabalho só serão abordados alguns modelos de seguros, válidos para períodos anuais e com o pagamento de prêmio feito de uma única vez (não abordaremos prêmios parcelados). Outro ponto relevante a se comentar refere-se ao modelo (1.24) qual seja: seguros são pagos algum tempo após a ocorrência do sinistro (PROMISLOW, 2014), entretanto, escolheu-se na definição considerar o pagamento ao final do ano da morte por simplicidade do ponto de vista matemático, evitando assim a necessidade de empregarmos o uso de período fracionário tanto no fator de desconto quanto no modelo probabilístico adotado. Dito isso, vamos definir os modelos de seguros básicos, conforme descritos em Dickson, Hardy e Waters (2016).

Modelo 1. *Seja n medido em anos, um seguro temporário por n anos $A^1_{x:\overline{n}|}$ é aquele que paga um benefício B ao beneficiário caso o segurado venha a falecer entre os próximos n anos a partir do momento do contrato. Sendo $B = 1$, então:*

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & se\ K_x \leq n-1 \\ 0 & se\ K_x \geq n \end{cases}$$

com valor presente atuarial calculado por:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \tag{1.25}$$

com o número "1" sobre x indicando que o benefício é pago se o segurado falecer antes de o contrato de seguro "vencer" (GUPTA; VARGA, 2013).

O próximo modelo a ser descrito é sobre um seguro condicionado a possibilidade de o segurado de idade x sobreviver além da idade $x + n$.

Modelo 2. *Seja n medido em anos, um contrato de seguro que paga $B = 1$ a um segurado de idade x desde que ele sobreviva além da idade $x + n$ é denominado dotal puro. Simbolicamente*

$$Z = \begin{cases} v^n & se\ K_x \geq n \\ 0 & se\ K_x < n \end{cases}$$

e seu valor presente atuarial é obtido por

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = v^n\,{}_np_x \tag{1.26}$$

com o número "1" sobre n indicando que o benefício é pago se o prazo n acabar primeiro, ou seja, se o prazo n do seguro transcorrer sem que o segurado tenha morrido nesse intervalo (GUPTA; VARGA, 2013).

O dotal puro é um modelo relevante dentro da matemática atuarial pois ele é, na forma estabelecida, uma espécie de fator de desconto estocástico, combinando função de desconto e modelo de sobrevivência. Por sua relevância no escopo desse trabalho, vamos introduzir uma outra forma de descrever o dotal puro, através de funções de comutação, as quais, segundo Macdonald (2005a) são um conjunto de fórmulas aplicadas à tábua de mortalidade e que, efetivamente, permite o cálculo simplificado de valores atuariais esperados, com um mínimo de esforço computacional. Sendo assim, conforme pode ser visto em Gupta e Varga (2013), reescrevendo (1.26) substituindo (1.15)

$$ {}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}. $$

Multiplicando numerador e denominador por v^x

$$ {}_nE_x = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}, $$

e seja

$$ D_x = v^x l_x, \quad x \in \{0, 1, 2, ..., \omega\}, \tag{1.27} $$

pode-se, portanto, reescrever (1.26) da seguinte forma

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{1.28} $$

Usando um raciocínio análogo, é possível adotar as fórmulas de comutação para os outros modelos de seguro. Antes de tudo, note que ${}_np_x q_{x+n} = {}_np_x(1 - p_{x+n})$ e usando (1.15):

$$ {}_np_x(1 - p_{x+n}) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \left(\frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_{x+n}} \right) $$

$$ {}_np_x \; q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x}, \quad \text{por (1.17)}. \tag{1.29} $$

Agora, substituindo esse resultado em (1.24) obtemos (anteriormente foi assumido que a partir da idade ω não há mais sobreviventes, portanto, ainda que o índice k do somatório seja definido em $[0, \infty)$, além de ω os valores incrementados serão sempre zero)

$$ A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} $$

e multiplicando numerador e denominador por v^x

$$ A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{x+k+1}}{v^x} \frac{d_{x+k}}{l_x}. $$

Além disso, para $k = 0$, definindo

$$ C_x = v^{x+1} d_x, \tag{1.30} $$

temos que

$$ A_x = \frac{v^{x+1}}{v^x} \frac{d_x}{l_x} + \frac{v^{x+2}}{v^{x+1}} \frac{d_x}{l_x} + \frac{v^{x+3}}{v^{x+2}} \frac{d_x}{l_x} + \cdots, $$

$$ A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \cdots. $$

Ao colocar D_x em evidência e definindo

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}, \tag{1.31}$$

pode-se reescrever o seguro vitalício com a fórmula que segue:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{1.32}$$

Esses resultados também podem ser estendidos para o seguro temporário descrito em (1.25), conforme Gerber (1997) (expressão a seguir).

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{1.33}$$

Os demais seguros dessa seção serão apresentados, também, de acordo com as fórmulas de comutação com deduções podendo ser encontradas em Macdonald (2005a) e Gerber (1997). O próximo modelo é uma combinação dos dois últimos, denominado seguro dotal (DICKSON; HARDY; WATERS, 2016).

Modelo 3. *O seguro dotal paga o benefício $B = 1$ em caso de morte do segurado de idade x entre os próximos n anos ou paga $B = 1$ caso ele sobreviva ao período n. Simbolicamente*

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & se\ K_x \leq n-1 \\ v^n & se\ K_x \geq n \end{cases}$$

e seu valor presente atuarial é obtido por

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}({}_kp_x\ q_{x+k} + v^n\,{}_np_x), \tag{1.34}$$

podendo ser escrito também usando a notação dada nos dois outros modelos

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Utilizando as fórmulas de comutação, obtemos

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{1.35}$$

O modelo de seguro (4) é o seguro com diferimento e temporário, no qual a cobertura do seguro só passa a vigorar após o período de diferimento m e durante n anos (GUPTA; VARGA, 2013).

Modelo 4. *Seja m o período de diferimento e n o período de cobertura de um seguro diferido por m anos e temporário por n anos. Seu valor presente estocástico é representado por*

$$Z = \begin{cases} 0 & se\ K_x < m \\ v^{K_x+1} & se\ m \leq K_x < m+n-1, \\ 0 & se\ K_x \geq n+m \end{cases}$$

e seu valor presente atuarial é obtido por

$$_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}{}_{k}p_x q_{x+k}. \tag{1.36}$$

Podemos escrever (1.36) como uma combinação de dois seguros temporários, conforme Dickson, Hardy e Waters (2016):

$$_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n+m}|} - A^{1}_{x:\overline{m}|}, \tag{1.37}$$

e utilizando comutações

$$_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}. \tag{1.38}$$

Também é importante frisar que é possível se fazer combinações dos modelos apresentados para obtermos novos arranjos. Por exemplo, tomando a equação (1.36) e fazendo $n \to \infty$ obtemos um seguro vitalício e diferido.

1.6.2 Anuidades aleatórias

As anuidades aleatórias estão em alguma medida relacionadas aos seguros, com a diferença que, no caso das anuidades, o benefício é pago periodicamente enquanto o beneficiário, com idade inicial x, permanecer vivo (GERBER, 1997), dado o prazo de cobertura do contrato, se vitalício, temporário, e se há ou não diferimento. Ou seja, a duração dos pagamentos depende do tempo de vida futuro T_x do beneficiário. Portanto, assim como nos contratos de seguro – diante da impossibilidade de se calcular exatamente o valor de T_x – é feito o cálculo do valor presente esperado, pela mesma razão é de interesse o cálculo do valor presente esperado de anuidades. Logo, pode-se pensar em uma anuidade vitalícia como uma sequência de pagamentos de benefícios cumpridos, digamos ao início de cada ano, desde que o beneficiário esteja vivo. Considerando isso e a igualdade (1.26) esse modelo pode ser descrito da seguinte maneira (OLIVIERI; PITACCO, 2015):

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k}E_x. \tag{1.39}$$

Considerando as equações (1.27), (1.28) e distribuindo o somatório em (1.39)

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \cdots .$$

Definindo

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}, \tag{1.40}$$

obtemos o seguinte método para calcular o valor esperado de anuidades vitalícias antecipadas (paga no início de cada ano) – utilizando as fórmulas de comutação:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{1.41}$$

Ainda, conforme Olivieri e Pitacco (2015) o valor presente esperado de uma anuidade antecipada temporária $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ e uma anuidade antecipada diferida ${}_{m|}\ddot{a}_x$ (o trema sobre o símbolo indica que o pagamento é feito ao início de cada período) podem ser expressos, respectivamente – apresentou-se também a respectiva fórmula de comutação:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, \tag{1.42}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} {}_kE_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \tag{1.43}$$

No caso de anuidades postecipadas, ou seja, aquelas cujo o pagamento dos benefícios dá-se ao final de cada ano, basta que o índice k comece a partir de 1. Portanto

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kE_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}, \tag{1.44}$$

$${}_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} {}_kE_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}. \tag{1.45}$$

Assim como é feito em relação aos modelos de seguros, em se tratando de anuidades aleatórias é possível obter outros arranjos pela simples combinação desses que foram apresentados. Por exemplo, pode-se obter uma anuidade aleatória antecipada, temporária e diferida a partir da combinação de uma anuidade aleatória vitalícia e uma temporária, conforme Olivieri e Pitacco (2015)

$${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|},$$

considerando os resultados anteriores.

2 Metodologia e Resultados

Por conveniência, a notação utilizada ao longo do trabalho será a mesma empregada na descrição dos algoritmos em pseudolinguagem, salvo algumas adaptações que serão feitas buscando a clareza. Além disso, os algoritmos são escritos em uma sequência tal que, quando necessário, o método seguinte irá evocar funções descritas em algoritmos anteriores e essa circunstância será indicada através de comentários no algoritmo. Além disso, optou-se por segregar os algoritmos em duas seções, na primeira constam aqueles que descrevem as funções que constroem a tábua de vida, assim como as funções de comutação, tais como N_x, D_x e C_x; na seção (2.1.2) seguinte são descritos os algoritmos cujas funções referem-se aos modelos de seguros e anuidades.

2.1 Algoritmos

2.1.1 Tábua de vida e funções de comutação

Seja $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{\omega-1}]^T$, com $\omega \in \mathbb{N}$, o vetor contendo as probabilidades de morte (a cada idade j) de uma determinada população. Além disso, convenciona-se que q_j indica o valor de q na coordenada j, em que $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega - 1\}$ (salvo afirmação contrária, isso será verdade para todo j nessa seção) com $q_{\omega-1} = 1$. Cabe ser dito que j além do número que indica a coordenada do vetor, indica também a idade que indexa a probabilidade apresentada. Sendo assim, q_j indica a probabilidade de um indivíduo na idade j morrer entre as idades j e $j+1$. Além do mais, a posição inicial do vetor $\mathbf{q}$ é $j = 0$, com q_0 indicando a probabilidade de um recém nascido morrer ao longo do primeiro ano de vida.

O Algoritmo (1) recebe como entrada o vetor $\mathbf{q}$ e para cada coordenada, calcula seu complementar conforme a equação (1.2), armazenando-o e retornando, ao final, um vetor $\mathbf{p} = [p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{\omega-1}]^T$ das correspondentes probabilidades de sobrevivência. Simbolicamente, pode-se representar a função descrita como $\mathbf{p} = F(\mathbf{q})$. (Note que j começa a partir do valor zero, já que a posição inicial em $\mathbf{q}$ também é $j = 0$).

Algoritmo 1: Gerar vetor p de probabilidades

Input: q

Output: p

Function `calcularVetorp(`q`):`

    /* declarando um vetor com ω linhas e 1 coluna. */

    $p \longleftarrow Array(\omega, 1)$

    for $j \leftarrow 0$ **to** ω **do**

        $p_j \longleftarrow (1 - q_j)$

    end

    return p

End Function

A função descrita no Algoritmo (1) (função $calculaVetorp$) é utilizada no Algoritmo (2), o qual calcula o vetor $\mathbf{l} = [l_0, l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{\omega-1}]^T$ que representa o total esperado de sobreviventes da população a cada ano j. Além disso, assim como no modelo anterior, convenciona-se que l_j é o valor de l na coordenada j, $l_\omega = 0$ e $l_0 = 100.000$. O método de cálculo utilizado pelo algoritmo utiliza a equação (1.14), qual seja, $l_{x+t} = l_{xt}p_x$ (com $t = 1$). A função pode ser simbolicamente dada por $\mathbf{l} = G(\mathbf{q})$, executando internamente o método $\mathbf{p} = F(\mathbf{q})$. Note que, no Algoritmo (2) a coordenada j começa a partir de $j = 1$, uma vez que $l_0 = 100.000$ já foi fixado inicialmente.

Algoritmo 2: Gerar vetor l de sobreviventes

Input: q

Output: l

Function `calcularVetorl(`q`):`

    $l \longleftarrow Array(\omega, 1)$

    $l_0 \longleftarrow 100.000$

    /* chamando a função calculaVetorp(q) e armazenando em um vetor p. Ver algoritmo (1) */

    $p \longleftarrow calculaVetorp(q)$

    for $j \leftarrow 1$ **to** ω **do**

        $l_j \longleftarrow l_{j-1} * p_{j-1}$

    end

    return l

End Function

O Algoritmo (3) gera o vetor $\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{\omega-1}]^T$, o qual representa o número esperado de óbitos ocorridos anualmente. Tem-se que d_j representa o valor de d

na coordenada j e, além disso, define-se $d_\omega = 0$. Para tanto, emprega-se a equação (1.18) na qual, ao multiplicarmos ambos os lados da igualdade por l_x e fixando $t = 1$ obtém-se o que segue

$$d_x = l_{x1} q_x. \tag{2.1}$$

Ademais, considerando d_0 o número de óbitos ao longo do primeiro ano de vida, o algoritmo trata a coordenada inicial como sendo $j = 0$, registrando nessa posição d_0.

Algoritmo 3: Gerar vetor d

Input: q

Output: d

```
Function calcularVetord(q):
    d ⟵ Array(ω, 1)
    for j ← 0 to ω do
        d_j ⟵ l_j * q_j
    end
    return d
End Function
```

Os Algoritmos (4) a (7) executam as funções de comutação necessárias para o cálculo dos prêmios de seguros e anuidades, conforme descrito anteriormente na seção (1.6). Para tanto, recebem como entrada a taxa de juros i_a. As saídas geradas são os vetores

$$\mathbf{D} = (D_0, D_1, \ldots, D_\omega)^T,$$

$$\mathbf{N} = (N_0, N_1, \ldots, N_\omega)^T,$$

$$\mathbf{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_\omega)^T,$$

$$\mathbf{M} = (M_0, M_1, \ldots, M_\omega)^T,$$

nos quais as coordenadas são igualmente indexadas por $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, assim como foi definido nos casos anteriores. Os métodos descritos nos algoritmos anteriores são implementados nesses algoritmos como recurso para execução dos cálculos necessários para gerar os vetores mencionados.

Algoritmo 4: Gerar vetor D

Input: i_a
Output: D
Function `calcularVetorD(`i_a`):`
  $D \longleftarrow Array(\omega, 1)$
  `/* chamando a função calculaVetorl(q) e armazenando em um vetor l. Ver algoritmo (2) */`
  $l \longleftarrow calculaVetorl(q)$
  for $j \leftarrow 0$ **to** ω **do**
    $D_j \longleftarrow l_j/(1+i_a)^j$
  end
  return D
End Function

Algoritmo 5: Gerar vetor N

Input: i_a
Output: N
Function `calcularVetorN(`i_a`):`
  $N \longleftarrow Array(\omega + 1, 1)$
  `/* chamando a função calculaVetorD(`i_a`) e armazenando em um vetor D. Ver algoritmo (4) */`
  $D \longleftarrow calculaVetorD(i_a)$
  for $j \leftarrow 0$ **to** ω **do**
    $N_j \longleftarrow \sum_{k=j}^{\omega} D_k$
  end
  return N
End Function

Algoritmo 6: Gerar vetor C

Input: i_a
Output: C
Function `calcularVetorC(`i_a`):`
  $C \longleftarrow Array(\omega + 1, 1)$
  `/* chamando a função calculaVetord(q) e armazenando em um vetor d. Ver algoritmo (3) */`
  $d \longleftarrow calculaVetord(q)$
  for $j \leftarrow 0$ **to** ω **do**
    $C_j \longleftarrow d_j/(1+i_a)^{j+1}$
  end
  return C
End Function

Algoritmo 7: Gerar vetor M

Input: i_a

Output: M

Function `calcularVetorM(`i_a`):`

  $M \longleftarrow Array(\omega + 1, 1)$

  `/* chamando a função calculaVetorl(q) e armazenando em um vetor C. Ver algoritmo (6) */`

  $C \longleftarrow calcularVetorC(i_a)$

  for $j \leftarrow 0$ **to** ω **do**

    $M_j \longleftarrow \sum_{k=j}^{\omega} C_k$

  end

  return M

End Function

2.1.2 Seguros e rendas aleatórias

Nesta seção são apresentados os algoritmos que modelam o cálculo das rendas aleatórias e dos prêmios de seguro, os quais utilizam-se dos algoritmos (1) a (7). No corpo dos algoritmos constam referência às funções necessárias.

A função descrita no Algoritmo (8) calcula o prêmio correspondente a um seguro vitalício – antecipado ou não. Quando o parâmetro $m \in \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ for indicado com valor diferente de zero o seguro será diferido. A idade $x \in \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ e o benefício $B \in \mathbb{R}_+$ são parâmetros obrigatórios. A única diferença entre esse algoritmo e o (9) é que naquele consta o parâmetro $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n + x \leq \omega$. As restrições impostas a n, assim como as demais definições apresentadas nesse parágrafo (tanto para m quanto pra x) são as mesmas no caso do seguro dotal, tal como no cálculo das anuidades aleatórias.

Algoritmo 8: Calcular seguro vitalício BA_x

Input: m, n, x, B, i_a
Output: BA_x
Function `seguroVitalicio(`m, x, B, i_a`):`
    `/* as funções descritas anteriormente são chamadas: calcularVetorM(`i_a`) e calcularVetorD(`i_a`). Ver algoritmos (7) e (4) */`
    $M \longleftarrow calcularVetorM(i_a)$
    $D \longleftarrow calcularVetorD(i_a)$
    BA_x `/* declara a variável a ser instanciada */`
    $BA_x \longleftarrow B * (M_{x+m}/D_x)$
    return BA_x
End Function

Algoritmo 9: Calcular seguro temporário $BA^1_{x:\overline{n}|}$

Input: m,n, x, B, i_a
Output: $BA^1_{x:\overline{n}|}$
Function `seguroTemporario(`m,n, x, B, i_a`):`
    $M \longleftarrow calcularVetorM(i_a)$
    $D \longleftarrow calcularVetorD(i_a)$
    $BA^1_{x:\overline{n}|}$ `/* declara a variável a ser instanciada */`
    $BA^1_{x:\overline{n}|} \longleftarrow B * ((M_{x+m} - M_{x+m+n})/D_x)$
    return $BA^1_{x:\overline{n}|}$
End Function

Algoritmo 10: Calcular seguro dotal $BA^{\;1}_{x:\overline{n}|}$

Input: m,n, x, B, i_a

Output: $BA^{\;1}_{x:\overline{n}|}$

Function `seguroDotal(`m,n, x, B, i_a`):`

    $M \longleftarrow calcularVetorM(i_a)$

    $D \longleftarrow calcularVetorD(i_a)$

    $BA^{\;1}_{x:\overline{n}|}$ `/* declara a variável a ser instanciada */`

    $BA^{\;1}_{x:\overline{n}|} \longleftarrow B * ((M_{x+m} - M_{x+m+n} + D_{x+m+n})/D_x)$

    return $BA^{\;1}_{x:\overline{n}|}$

End Function

Algoritmo 11: Calcular anuidade vitalícia Ba_x

Input: x, B, $postecipada$, m, i_a

Output: Ba_x

Function `anuidadeVitalicia(`x, B, $postecipada$, m, i_a`):`

    $N_x \longleftarrow calcularVetorN(i_a)$

    $D_x \longleftarrow calcularVetorD(i_a)$

    for $i \leftarrow 0$ **to** ω **do**

        if $postecipada = true$ **then**

            $Ba_x \longleftarrow B * N_{x+m+1}/D_x$

        else

            $Ba_x \longleftarrow B * N_{x+m}/D_x$

        end

    end

    return Ba_x

End Function

Algoritmo 12: Calcular anuidade temporária $Ba_{x:\overline{n}|}$

Input: x, B, *postecipada*, m, i_a

Output: Ba_x

Function `anuidadeTemporaria(`x, B, *postecipada*, m,n, i_a`):`

  $N_x \longleftarrow calcularVetorN(i_a)$

  $D_x \longleftarrow calcularVetorD(i_a)$

  for $i \leftarrow 0$ **to** ω **do**

    if $postecipada = true$ **then**

      $Ba_{x:\overline{n}|} \longleftarrow B * (N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1})/D_x$

    else

      $Ba_{x:\overline{n}|} \longleftarrow B * (N_{x+m} - N_{x+m+n})/D_x$

    end

  end

  return $Ba_{x:\overline{n}|}$

End Function

2.2 Desenvolvimento da aplicação

A aplicação de *software* foi desenvolvida na linguagem de programação Java. Para tanto, foi utilizado o *Java SE Development Kit 8*[1] - JDK que é o ambiente de desenvolvimento padrão java, contendo as *Application programming interface* - API necessárias para implementação, compilação e execução das aplicações de *software*. A versão da JDK utilizada foi a de número 8. Optou-se por essa linguagem em função desta ser bastante consolidada, com ampla adoção, acessível, bem documentada e estável. Além disso, uma vez compilado o código java, a aplicação de *software* é executável em diferentes sistemas operacionais – desde que a JVM esteja instalada na plataforma em questão – eliminando a necessidade de se manter múltiplas bases de código para diferentes plataformas (DEITEL; DEITEL, 2017). Outras vantagens decorrentes do uso da linguagem java se fazem, justamente, pelo fato de ser uma linguagem compilada, executando em maior rapidez do que aplicações codificadas em linguagens interpretadas; também pelo fato de esta ser uma linguagem orientada a objetos, o que permite que o código seja escrito de forma a ser reaproveitado no escopo da aplicação, eliminando redundâncias e permitindo uma codificação limpa e legível.

[1] Esse ambiente de desenvolvimento pode ser obtido no endereço eletrônico: <https://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/jdk8-downloads-2133151.html>

2.3 Resultados

Nesta seção serão apresentadas algumas capturas de tela da aplicação desenvolvida, também serão comentados alguns exemplos. Cabe ser dito que a imagem vetorial da ampulheta que consta na tela inicial da aplicação foi obtida, sob licença gratuita, no site de compartilhamento de imagens IconFinder[2].

Optou-se por adotar uma tela inicial limpa e direta com um menu no qual constam as opções disponíveis (ver Figura 3). Ao clicar no menu FERRAMENTAS, conforme a

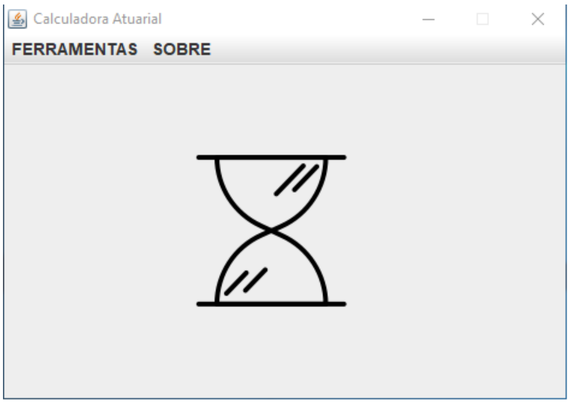

Figura 2 – Aplicação: tela inicial

Figura 2, as opções de cálculo são apresentadas , assim como também é dada a possibilidade de importação da tábua a qual o usuário desejar usar nos cálculos (ver Figura 4). Cabe ressaltar que na tábua escolhida deve constar apenas o vetor com probabilidades q_x. No menu constam as opções para calcular prêmios de seguros e anuidades, ambos com cobertura anual, conforme os modelos descritos anteriormente no texto.

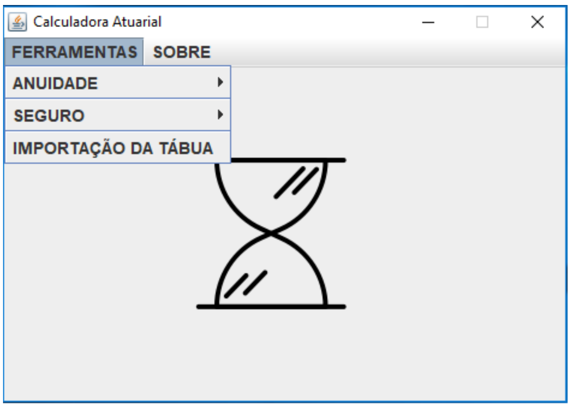

Figura 3 – Aplicação: menu de opções

Ao iniciar o programa, pela primeira vez, é necessário fazer a importação do arquivo correspondente a tábua de vida a qual se deseja utilizar nos cálculos. A opção fica disponível no menu inicial para o caso de o usuário desejar trocar a tábua.

[2] A imagem está disponível no endereço eletrônico: <https://www.iconfinder.com/icons/3401850/essential_hourglass_web_icon>.

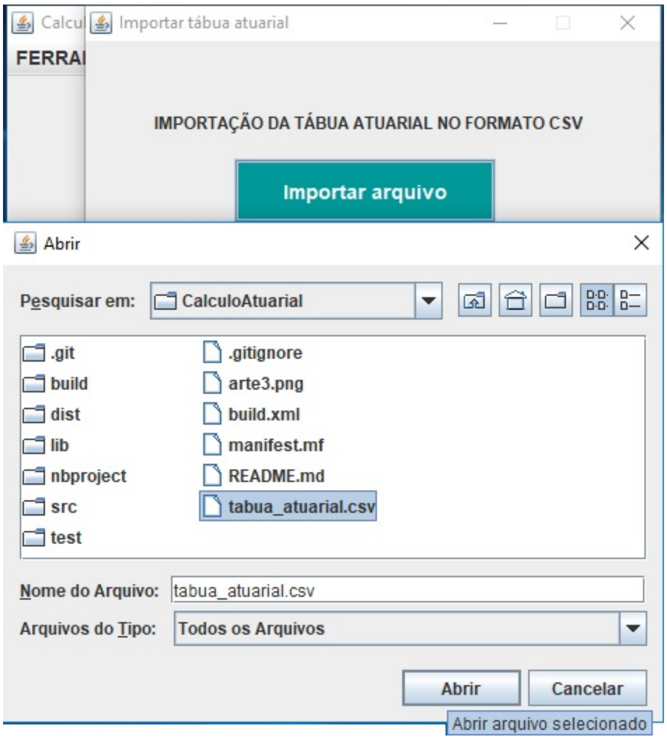

Figura 4 – Aplicação: importação de tábua

A aplicação é bastante intuitiva e de fácil utilização e as opções disponíveis estão facilmente acessíveis. Uma questão relevante é o controle de restrições, conforme descritas nos algoritmos. Tais restrições são verificadas durante a execução da aplicação com o objetivo de prever e contronar possíveis erros (ver Figura 5). O campo destinado a taxa de juros está configurado para garantir que esta seja inserida na forma unitária. Um erro possível, mas tratado pela aplicação, ocorreria caso o usuário inserisse parâmetros de idade, duração e diferimento que, individualmente ou somados, viessem a ultrapassar a idade ω da tábua, o que geraria resultados indesejados. Considere o exemplo de uma anuidade vitalícia antecipada para uma pessoa de 30 anos pagando um benefício de 12.000,00 por ano, com um diferimento de 70 anos e uma taxa de juros anual de 6% (ver Figura 5).

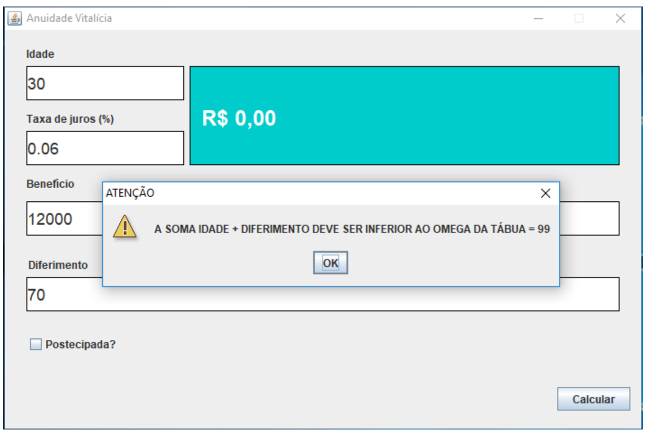

Figura 5 – Aplicação: mensagem de erro

Vejamos um exemplo *hipotético* de um seguro dotal. Sejam $(x = 12, i = 8\%, B = 30000, m = 10, n = 20)$ os parâmetros para o cálculo de um seguro dotal, qual seja, um seguro com cobertura temporária de 20 anos e diferimento de 10 anos, com valor de benefício de trinta mil reais e uma taxa de juros de 8% ao ano atribuído a uma pessoa de 12 anos de idade. Ao selecionar a opção de seguro dotal no menu FERRAMENTAS, e entrar com esses valores na tela seguinte obtem-se o resultado que consta na Figura (6).

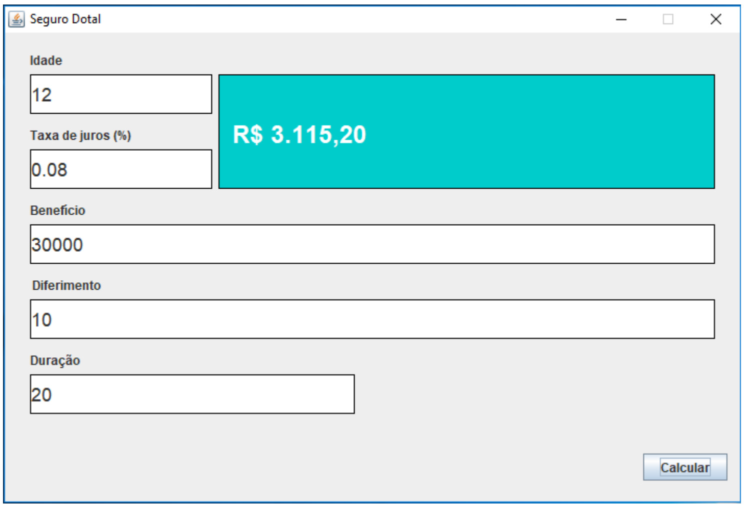

Figura 6 – Aplicação: seguro dotal

Considere um seguro temporário contratado por uma pessoa de 40 anos de idade, com cobertura de 20 anos e 12 anos de diferimento, com o valor do benefício de 40.000,00 e uma taxa de $8,5\%$ ao ano (ver Figura 7). As demais telas são semelhantes a estas, com algumas diferenças nos parâmetros.

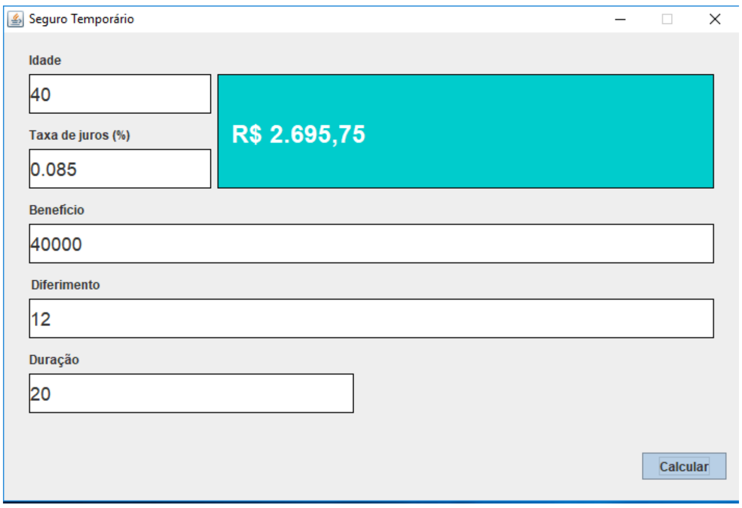

Figura 7 – Aplicação: seguro temporário

Considere uma anuidade temporária antecipada para uma pessoa de 32 anos, com duração de 1 ano e uma taxa de juros de 6% ao ano com um benefício anual de 1,00, resumindo, $(x = 32, i = 6\%, B = 1, postecipada = false, duracao = 1)$ (ver Figura 8).

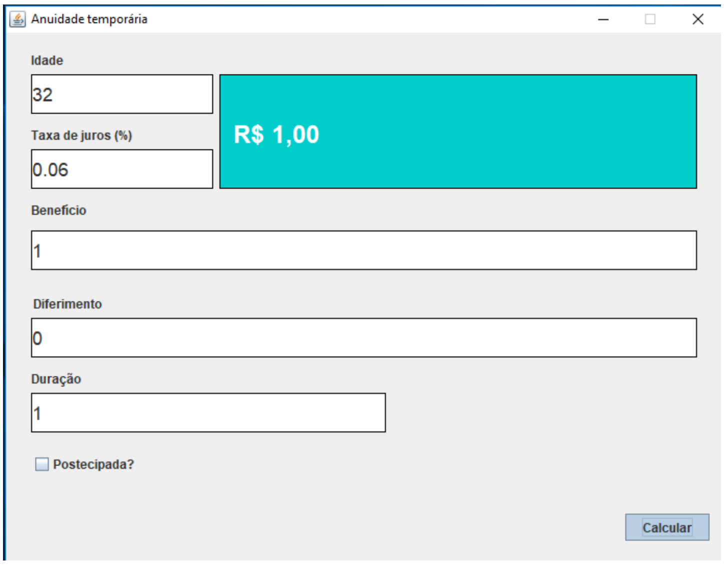

Figura 8 – Aplicação: anuidade temporária

2.4 Disponibilidade da aplicação

A aplicação de *software* e o respectivo código-fonte estão disponíveis no repositório *online* de códigos GitHub[3]. Por ser uma aplicação didática, o código-fonte está disponibilizado para aqueles que tenham interesse em testar e melhorar a aplicação ou expandí-la, incluindo novas funções.

[3] Acessível pelo seguinte endereço eletrônico: <https://github.com/thfreud/actuarialcalculator>

Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentada de maneira sucinta a matemática atuarial adotada no cálculo de prêmios de seguros de vida e rendas aleatórias. Como o objetivo do trabalho foi o de desenvolver uma aplicação de *software* voltada para esse tipo de cálculo, a metodologia desenvolvida consiste na codificação em pseudolinguagem dos modelos teóricos em algoritmos programáveis. Para tanto, foram estudados modelos de seguro e rendas e, a partir destes, foram escritos os algoritmos. A partir dos algoritmos, a aplicação foi desenvolvida adotando-se a linguagem de programação Java. Como a finalidade do trabalho consistiu em apresentar uma aplicação minimamente funcional, mas que apresente uma interface gráfica amigável, um número limitado de funções foi implementado. Não obstante, através da metodologia adotada, é possível expandir sem muitas dificuldades a aplicação, incorporando outras funções ou, a depender do objetivo, simplesmente combinando os métodos ora implementados. Por conseguinte, as possibilidades futuras que versam sobre a continuidade desse trabalho são vastas.

Uma melhoria elementar que pode ser sugerida seria a inclusão de funções cujos cálculos considerem produtos nos quais o período de cobertura (tanto para anuidades quanto para seguros) seja diferente do período anual, por exemplo, cobertura mensal ou trimestral. Tal função poderia ser implementada por meio da fórmula de *woolhouse*, a qual é obtida através da derivação de uma expansão de Euler-Maclaurin, uma dedução dessa metodologia pode ser encontrada em Macdonald (2005b); para uma boa explanação acerca do uso da fórmula no contexto das anuidades pode-se consultar Gupta e Varga (2013). Outra sugestão de trabalho futuro seria a inclusão de uma função para o cálculo de reserva matemática, a qual pode ser pensada como sendo a diferença entre o valor presente atuarial dos prêmios (quando pagos em parcelas) e o valor presente atuarial dos benefícios em determinado instante do tempo (ver Dickson, Hardy e Waters (2016), Gupta e Varga (2013) para uma agradável explanação acerca do cálculo de reservas). Reitera-se, considerando o nível elementar no qual a aplicação foi apresentada, existem muitas outras possibilidades de melhoria, como a inclusão de um banco de dados, o que possibilitaria que os cálculos fossem feitos para uma base de dados inteira, como uma carteira de clientes, ao invés de um cliente por vez.

Referências

BOWERS, N. et al. *Actuarial Mathematics*. 2. ed. [S.l.]: Society of Actuaries, 1997.

CHRISTIANSEN, D. R. et al. An actuarial programming language for life insurance and pensions. In: *Proceedings of 30th International Congress of Actuaries. Washington DC: International Actuarial Association*. [S.l.: s.n.], 2013.

CRABB, R. R. A computer approach to teaching the fundamentals of life insurance mathematics. *The Journal of Risk and Insurance*, JSTOR, v. 46, n. 4, p. 715–726, 1979.

CUNNINGHAM, R. J.; HERZOG, T. N.; LONDON, R. L. *Models for quantifying risk*. 2nd. ed. [S.l.]: ACTEX Publications, 2006. ISBN 9781566985840.

DEITEL, P.; DEITEL, H. *Java: how to program*. 10. ed. [S.l.]: Prentice Hall Press, 2017.

DICKSON, D. C.; HARDY, M. R.; WATERS, H. R. *Actuarial mathematics for life contingent risks*. 2. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2016.

GERBER, H. U. *Life insurance mathematics*. 3. ed. Berlin: Springer Science & Business Media, 1997.

GUPTA, A. K.; VARGA, T. *An introduction to actuarial mathematics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 14.

MACDONALD, A. S. Commutation functions. In: SUNDT, B.; TEUGELS, J. L. (Ed.). *Encyclopedia of actuarial science*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. v. 2. ISBN 9780123693983.

MACDONALD, A. S. Euler–maclaurin expansion and woolhouse's formula. In: SUNDT, B.; TEUGELS, J. L. (Ed.). *Encyclopedia of actuarial science*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. v. 2. ISBN 9780123693983.

MACDONALD, A. S.; RICHARDS, S. J.; CURRIE, I. D. *Modelling Mortality with Actuarial Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.

NORBERG, R. Reserves in life and pension insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, Taylor & Francis, v. 1991, n. 1, p. 3–24, 1991.

OLIVIERI, A.; PITACCO, E. Introduction to insurance mathematics: Technical and financial features of risk transfers. In: _____. 2. ed. Parma, Italy: Springer International Publishing, 2015. (EAA Series), cap. 4, p. 227–228.

PROMISLOW, S. D. *Fundamentals of actuarial mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.

ROSS, S. *A First Course in Probability*. 9. ed. [S.l.]: Pearson, 2014. ISBN 9781292024929.

ROTAR, V. I. *Actuarial models: the mathematics of insurance*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2014.

SPEDICATO, G. A. The lifecontingencies package: Performing financial and actuarial mathematics calculations in r. *Journal of Statistical Software*, v. 55, n. 10, p. 1–36, 2013.

WOLTHUIS, H. Insurance industry, actuarial international notation. In: SUNDT, B.; TEUGELS, J. L. (Ed.). *Encyclopedia of actuarial science*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. v. 2.

WOLTHUIS, H. Insurance industry, mortality tables in. In: LEONARD, K. K. (Ed.). *Encyclopedia of social measurement*. [S.l.]: Elsevier, 2005. v. 2.