GEODÉSIA ONLINE

Revista da Comissão Brasileira de Geodésia

1 / 1998

A ´Projeção Brasileira de Gauss´ - uma Proposta para um Sistema único de Coordenadas

Jürgen Philips, *Florianópolis SC*

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Philips
Universidade Federal de Santa Catarina
Depto. Engenharia Civil - Ciências Geodésicas
88040-900 Florianópolis SC
E-Mail: philips@ecv.ufsc.br

1 Uma Projeção Gauss para o Cadastro Brasileiro (PBG)

O sistema UTM é uma projeção geodésica que foi recomendada pela IUGG, em primeiro lugar, para a cartografia em escalas pequenas ou médias. Para este fim, a Cartografia Brasileira adotou o sistema UTM no ano 1955, principalmente para o mapeamento sistemático do país. Aplicando esta projeção no mapeamento em escalas grandes, por exemplo 1:1000, caso da 'Carta do Cadastro Imobiliário', deve-se contar com deformações maiores que pode chegar a valores de até 1 metro por Kilômetro (ou de deformações até 2000 m² por 1 km²).

Estas deformações não são constantes: seu valor é zero no meridiano central de cada fuso, enquanto que no canto do fuso (L_H ±3°), a deformação é máxima. Fusos largos, então, têm deformações maiores do que sistemas com fusos estreitos.

A primeira aplicação da projeção UTM foram as cartas militares da OTAN com concentração na Europa central na faixa entre 50° a 60°. Nesta faixa, conta-se com um erro máximo entre +16,7cm/ km (canto do fuso) e -5,7cm/ km (centro). Na latitude do Brasil, devido às distâncias maiores entre os meridianos centrais e os cantos dos fusos, a mesma projeção UTM tem deformações com valores entre 63,3 cm/km (latitude de Porto Alegre) e 98 cm/km (Belém).

Deve-se considerar também, que a projeção geodésica para o Cadastro Imobiliário também é usada como referência para a representação numérica ou digital de todos os objetos acima e abaixo da superfície terrestre - por exemplo, para os *Modelos Digitais de Terreno*, o Geoprocessamento ou para projetos digitais de engenharia (rodovias, barragens, linhas de transmissão de energia, etc.). Para esta representação numérica precisa-se de uma projeção com um mínimo de deformação projetiva e com um máximo de aproximação do sistema de coordenadas na superfície 'real' da terra.

Projeção fuso escala	**UTM** ±6° 9996	**G.-K.** ±3° 10	**PBG** ±2° 99994
Latitude	k [cm/km]	k [cm/km]	k [cm/km]
0°	98,1	20,9	9,3
10°	93,9	20,2	8,7
20°	81,8	18,4	7,5
30°	63,3	15,6	5,5
40°	40,7	12,2	3
50°	16,7	8,6	0,3
60°	-5,7	5,2	-2,2
70°	-24	2,4	-4,2

Tabela: Deformação k em centímetros/km nos cantos dos fusos

Uma projeção para a rede de referência do cadastro imobiliário, que seja ao mesmo tempo uma projeção para a representação numérica da superfície nacional, deve ter as seguintes características:

1. A deformação projetiva deve ser mínima, numa ordem de poucos centímetros para um Kilômetro de distância - ou no máximo 200 m² para 1 km².

2. Para medições locais (medição de poligonais, levantamentos de lotes, glebas, etc., locações de projetos de engenharia, projetos aerofotogramétricos, etc.) o sistema de coordenadas deve ser uma referência plana, sem a necessidade de se calcular correções, nem para distâncias nem para áreas.

3. O cálculo numérico da projeção deve ser fácil, em tempo real, sem uso de tabelas, mesmo se o número de pontos a transformar for grande (caso de transformação do conteúdo de mapas).

Estas condições não são assumidas pelo sistema UTM.

A deformação projetiva pode chegar a 1 metro por km na linha do equador, e ainda 0.80m na área de maior concentração de população no Brasil (L=36°W, B= 20°S). Na especificação de áreas de parcelas (lotes/glebas), a projeção UTM causa um erro de área de 2000m² por km² em comparação com o valor verdadeiro da superfície.

Devido a superficie curva da terra, não será possível criar uma projeção que elimine todas as deformações projetivas. A deformação linear é uma função direta da distância do meridiano central.

Desta maneira, a única medida para reduzir a deformação perspectiva, é reduzir o tamanho do fuso. Desta maneira, pode-se determinar qualquer precisão de coordenadas, apenas mantendo o fuso suficientemente pequeno. Para se ter uma deformação máxima de 1 cm/km, transforma-se a fórmula (vide Capítulo 6.1):

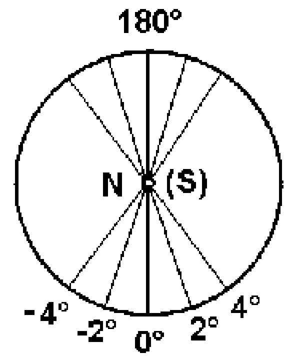


Figura: Projeção em Fusos de 2°

$$d = m_H \cdot D \cdot (1 + \frac{y_m^2}{2r^2})$$

na forma

$$y = \sqrt{\frac{2d \cdot r^2}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1[cm] \cdot 6\,370^2}{1^2}} \cong 28,5 \ km$$

26,5 km, então, é a distância do meridiano central, onde a deformação perspectiva é exatamente 1cm, o que corresponde a uma longitude de 15,38'. Como as condições são simétricas nos dois lados, um fuso, com 1cm máximo de deformação, teria uma abertura de meio grau (31' 27"). Mas, aquele fuso de 30' teria outras desvantagens para servir como projeção referencial para o cadastro imobiliário: O fuso na Latitude da linha do equador (B=0°), teria uma extensão de apenas 55,6 km, na Latitude de São Paulo (B=25°) a extensão seria menor ainda (50 km). Para muitos municípios, uma projeção especificada desta maneira, seria inaceitável, pois eles seriam projetados em 2, 3 ou mais fusos.

Na prática, precisa-se de um compromisso entre uma pequena deformação projetiva por um lado, e por outro lado, a necessidade de se operar com um mínimo de fusos.

Através do ‘fator de escala’ m_H pode-se distribuir esta deformação no sentido de que a deformação seja numericamente distribuída entre o centro e os cantos do fuso. O ‘fator de escala’ não pode reduzir a deformação perspectiva, ele somente distribui a influência desta deformação sobre a faixa de um fuso, e assim cria valores numéricos de deformação, aparentemente menores do que no caso de não se aplicar um fator de escala (ou $m_H = 0$).

A projeção aqui proposta, tem o título: *Projeção Brasileira de Gauss* (PBG), cujas principais especificações encontram-se na tabela ‘Especificações da *Projeção Brasileira de Gauss’* (PBG)’.

A escolha de um fuso de 2° reflete a necessidade de que a maioria dos municípios brasileiros tenham um único fuso com uma deformação projetiva mínima. Possivelmente este fuso é pequeno para municípios com extensão grande em sentido oeste - leste (a extensão norte - sul não importa neste contexto). O fuso também pode ser grande para aplicações de alta precisão, onde um erro de 5cm/km já está fora da tolerância (como em alguns projetos de engenharia).

Especificações da *‘Projeção Brasileira de Gauss’* (PBG) :

Tipo : Projeção de Gauss (cilíndrica, transversal, conforme)

Fusos : Numeração de 2 em 2° - sem sobreposição, desde o 1° fuso (= 76°W) em sentido leste→oeste (35°W = fuso 20), cobrindo todo o território nacional (inclusive as ilhas atlânticas). A área projetada por um ‘fuso’ não necessariamente deve ser limitada por meridianos fixos, senão por limites de municípios na proximidade do meridiano L_H-1° ou L_H+1°, (vide exemplo *Pernambuco* no Capítulo 6).

Escala : m_H = 0.999 94 para o meridiano central, correspondendo a uma deformação de -6cm para o centro, e +5cm para o canto do fuso (valores para distâncias de 1000 metros na latitude de São Paulo)

Eixos : **GY** (ordenada), origem a 500 km oeste do meridiano central - acrescido pelo número do fuso em milhões (primeiras duas cifras da ordenada y).
GX (abscissa), origem aproximadamente no ‘polo sul’ (x = 0.00), passando pela linha do equador com x = 10 000 000 m e continuando no hemisfério ‘Norte’ com valores para a abscissa acima de 10 000 000 m.

Exemplo : Coordenadas Gauss: GY,GX

Ponto 1 : GY = 13 573 341.11m GX : 7 186 205.58m
O ponto encontra-se no fuso 13 (meridiano central = 2*fuso-76 = -50° = 50°W). O próximo valor é acima de 500 km, o ponto encontra-se então no lado oriental do meridiano central, entre os meridianos 49°W e 50°W.
A abscissa é menor que 10 000 km, o ponto 2 faz parte do hemisfério ‘Sul’, aproximadamente 2 800 km ao sul da linha do equador.
A convergência meridional do ponto é c = 0°18'47,1659" e o fator de escala da projeção PBG é m = 1.000 006 397 1 - uma distância medida de 1000 metros, por exemplo, será alongada para 6,4 mm.

Ponto 2 : GY = 21 475 000.00m GX : 10 325 000.00m
O ponto encontra-se no fuso 21 (meridiano central = 2*fuso-76 = -34° = 34°W). O próximo valor é abaixo de 500 km, o ponto encontra-se 25 km no lado ocidental de 34°W (meridiano central).
A abscissa é maior que 10 000 km, o ponto 2 faz parte do hemisfério ‘Norte’ e está localizado a 325 km acima da linha do equador.

Tabela: Especificações da *‘Projeção Brasileira de Gauss’*

Um compromisso entre duas funções alvo nunca é uma solução ideal. O fuso de 2° foi escolhido através das premissas, que a deformação projetiva não ultrapasse 5cm/km na área de maior concentração de população no Brasil (Rio de Janeiro - São Paulo - Belo Horizonte - Curitiba) e 10cm/km no resto do país.

Para aumentar a praticabilidade da projeção recomenda-se não tratar os meridianos limites dos fusos como limite absoluto da projeção. Ao contrário das projeções Gauss-Krüger ou UTM recomenda-se escolher um fuso central que cubra a maior parte de um município, e projetar também o resto do território do município naquele fuso (Fuso com limite variável; vide figura ao lado ou também o exemplo de Pernambuco - Capítulo 6.1).

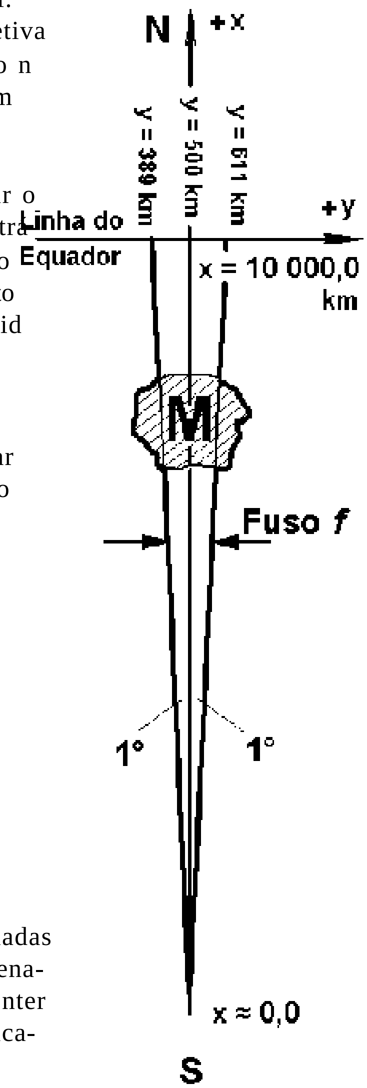


Figura: Território do município *M* no sistema PBG com fusos variáveis

Esta flexibilidade na formação dos fusos requer uma definição, ou do número do ponto, ou na formulação da ordenada, que permite identificar o ponto como ponto de um fuso específico. A recomendação para o caso da PBG é acrescer o valor numérico da ordenada pelo número do fuso *f* em milhões:

$$GY = f + k + y$$

com

$$f = 10^6 \cdot \frac{(-76° + L_H)}{2°}$$

$$k = 500\ 000m$$

$$L_H = meridiano\ \ central$$

Desta maneira, o computador programado com as regras das coordenadas PBG, pode identificar automaticamente o fuso através do valor da ordenada GY. Finalmente, um banco de dados de coordenadas PBG pode conter na mesma lista pontos de diversos fusos - cada ponto, através da identificação do fuso na ordenada, está relacionado individualmente a um fuso específico.

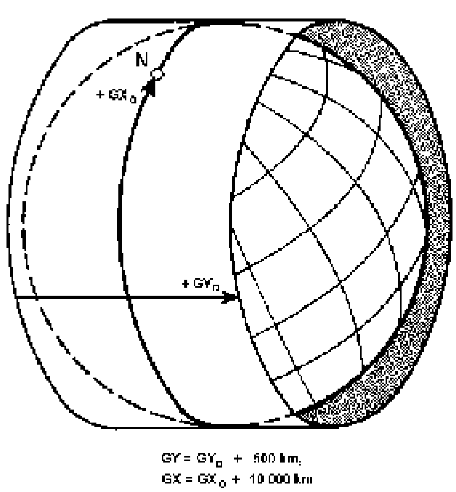


Figura : Sistema de coordenadas PBG

Para as necessidades de planejamento ou execução de projetos, por exemplo de engenharia ou de locação, pode-se transformar, em forma automatizada, os pontos de uma área de diferentes fusos em um único fuso. Estas transformações podem satisfazer as necessidades temporárias ou, em caso específico, também para criar arquivos definitivos. Uma empresa estadual de Energia Elétrica, por exemplo, pode optar por criar um arquivo de coordenadas com um único fuso para o estado, enquanto os cadastros imobiliários municipais usam faixas de aproximadamente 2° por fuso. Através das ordenadas GY, todos os pontos dos arquivos são automaticamente relacionados a um fuso específico, definido nas duas primeiras cifras das ordenadas.

Gauss, e os outros autores modernos da projeção Gauss, usam o ‘sistema geodésico’ de coordenadas, onde os eixos são trocados (sistema y,x) em comparação com o sistema geralmente usado na geometria analítica (sistema x,y). Na literatura internacional, em algumas publicações, também é usado o sistema matemático.[1]

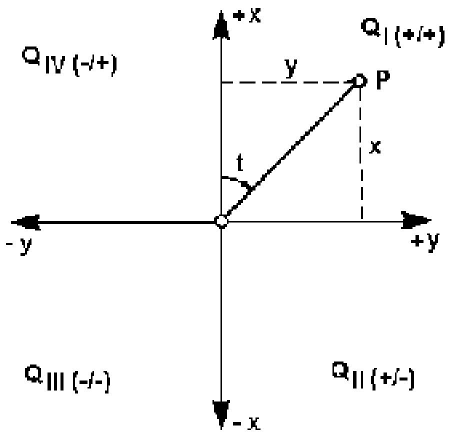


Figura : Sistema de coordenadas y,x

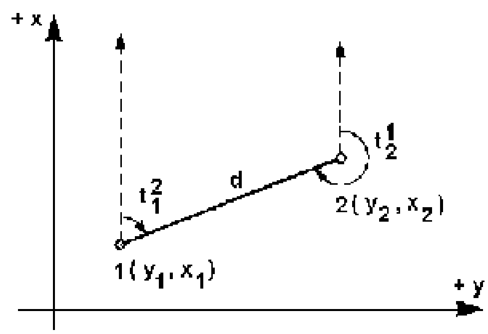


Figura : Distância no sistema y,x

Esta ‘troca de eixos’ dos sistemas geodésicos de coordenadas têm três justificativas:

1. A orientação positiva da rotação (leitura) das direções dos teodolitos é oposta a direção do ângulo definido na matemática. Enquanto o teodolito ‘mede’ os ângulos em ‘sentido horário’, na matemática a orientação é ‘anti-horária’.

2. O azimut t é definido, na matemática, como o ângulo entre o eixo x (positivo), na direção rotativa ao eixo y (positivo). Na geodésia, o azimut é a diferença entre a direção ‘Norte’ e a direção entre dois pontos, em ‘sentido horário’.

3. Todas as fórmulas da *geometria analítica* podem ser usadas, sem modificação alguma, para todos os cálculos geodésicos. Por exemplo, calcula-se o azimut entre dois pontos com:

$$t_1^2 = arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

1.5 A Precisão numérica das fórmulas de cálculo da ‘Projeção de Gauss’

Para todo o território brasileiro, até uma latitude de aproximadamente 50°, pode-se contar com as seguintes precisões para as três projeções do tipo ‘Gauss’ (Gauss-Krüger, UTM, PBG):

Coordenadas planas através de coordenadas geográficas. . . . . ±0.1 mm
Coordenadas geográficas através de coordenadas planas. . . . . ±0.00 00 3"
Convergência meridiana. . . . . ±0.00 1"
Fator de escala. . . . . ±0.000 000 1

[1]) Recomenda-se verificar em cada fonte de literatura sobre projeções geodésicas, qual é o sistema de eixos (y,x) ou (x,y), e qual é a orientação do azimut t.

Estas precisões são ‘precisões de cálculo numérico’, causadas pela limitação aos elementos relevantes do desenvolvimento das fórmulas de projeção, e não devem ser confundidas com a precisão das medições, precisão da determinação de pontos, erros no modelo matemático, etc. Geralmente, na geodésia, a precisão do cálculo deve superar a precisão das medições, no mínimo com um fator 10, e ainda melhor com 100.

2 Cálculo de Coordenadas da ´Projeção Brasileira de Gauss´

As fórmulas básicas são suficientemente desenvolvidas na literatura clássica da ‘*Geodésia Mathemática*’, especialmente nas monografias de *Krüger* [10, 11], *Hristow* [25], *Hubeny* [32] assim como nos livros de *Großmann* [50] e de *Jordan/Eggert/Kneissl* [40].[2]

O presente desenvolvimento é baseado, em primeiro lugar, nas fórmulas de *Schödlbauer* [47]. Enquanto os autores anteriores desenvolveram as fórmulas de Gauss de modo adequado para o cálculo logarítmico usando tabelas de coeficientes, Schödlbauer redesenvolveu as fórmulas para o cálculo numérico por computadores.

Nesta monografia (em variação da apresentação das fórmulas de Schödlbauer) as diferentes fórmulas para as diversas variantes da projeção de Gauss, são unificadas a um único caso. Desta maneira, toma-se em conta, que as projeções Gauss-Krüger, a projeção UTM como também a projeção proposta neste trabalho, a PBG, são projeções derivadas de um único tipo básico - a ‘*Projeção Conforme de Gauss*’.

2.1 As coordenadas *y, x*

Com $L_0 = 2° \cdot F - 76$

(F=Fuso da PBG) a diferença $\Delta L = L - L_0$ (Longitude do ponto a transformar menos Longitude do meridiano central), as coordenadas *y, x* de um sistema plano e conforme (segundo Gauss) podem ser calculadas com:

$$x = [t_0]_x + [t_2]_x \cdot \Delta L^2 + [t_4]_x \cdot \Delta L^4 + [t_6]_x \cdot \Delta L^6$$
$$y = [t_1]_y + [t_3]_y \cdot \Delta L^3 + [t_5]_y \cdot \Delta L^5$$

com os coeficientes

$$[t_0]_x = m_H \cdot G = G(B) = \textit{comprimento do meridiano da Latitude B}$$
$$[t_2]_x = \frac{m_H}{2\rho^2} \cdot N \cdot cos^2 B \cdot t$$
$$[t_4]_x = \frac{m_H}{24\rho^4} \cdot N \cdot cos^4 B \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9\eta^2)$$
$$[t_6]_x = \frac{m_H}{720\rho^6} \cdot N \cdot cos^6 B \cdot t \cdot (61 - 58t^2 + t^4)$$

[2]) Gauss propriamente, nunca publicou sua ‘teoria da projeção conforme em pequenas partes’. Foi *Schreiber* quem descreveu em [6] os trabalhos da medição e projeção de Hannover, e *Krüger*, que apresentou as fórmulas de modo sistemático e *Hristow* e *Hubeny*, que reformularam as equações da projeção com as ferramentas modernas da geometria diferencial.

$$[t_1]_y = \frac{m_H}{\rho^2} \cdot N \cdot \cos B$$

$$[t_3]_y = \frac{m_H}{6\rho^3} \cdot N \cdot \cos^3 B \cdot (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$[t_5]_y = \frac{m_H}{120\rho^5} \cdot N \cdot \cos^5 B \cdot [5 - 18t^2 + t^4 + \eta^2 \cdot (14 - 58t^2)]$$

2.2 A Convergência dos Meridianos *c*

$$c = [t_1]_c \cdot \Delta L + [t_3]_c \cdot \Delta L^3 + [t_5]_c \cdot \Delta L^5$$

com os coeficientes

$$[t_1]_c = \cos B \cdot t = \operatorname{sen} B$$

$$[t_3]_c = \frac{1}{3\rho^2} \cdot \cos^3 B \cdot t \cdot (1 + 3\eta^2)$$

$$[t_5]_c = \frac{1}{15\rho^4} \cdot \cos^5 B \cdot t \cdot (2 - t^2)$$

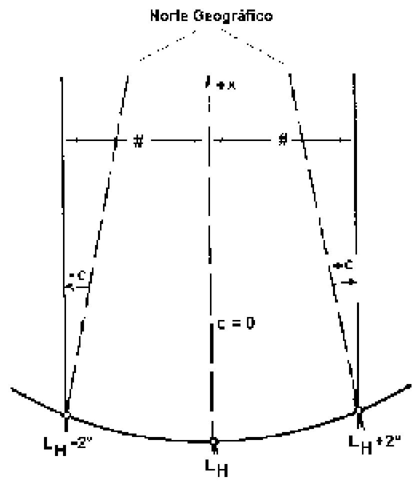


Figura : Convergência dos Meridianos

2.3 O fator de escala *m*

$$m = m_H + [t_2]_m \cdot \Delta L^2 + [t_4]_m \cdot \Delta L^4$$

com os coeficientes

$$[t_2]_m = \frac{m_H}{2\rho^2} \cdot \cos^2 B \cdot (1 + \eta^2)$$

$$[t_4]_m = \frac{m_H}{24\rho^4} \cdot \cos^4 B \cdot [(5 - 4t^2) + \eta^2 (14 - 28t^2)]$$

Parâmetros:

$$t = \tan B$$

$$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 B$$

$$N = \frac{\bar{c}}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \textit{Raio da curvatura transversal}$$

$$\varrho = \frac{180°}{\pi}$$

com

$$\bar{c} = 6\,399\,617{,}442\,m = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide IUGG 1967)}$$
$$e'^2 = 0{,}006\,739\,729 = \text{Quadrado da } 2^a \text{ excentricidade numérica (IUGG 1967)}$$
$$m_H = 0{,}999\,94$$

2.4 Coordenadas PBG

Os resultados y, x da transformação têm notações diferentes, segundo as especificações de cada um dos sistemas Gauss.

Para evitar ordenadas negativas (sign(y) = negativo) no lado esquerdo do meridiano central de cada fuso, aumenta-se o valor da ordenada por 500 km (nos três sistemas); assim como para evitar abscissas negativas no hemisfério 'Sul', aumenta-se a abszissa por 10 000 km (apenas sistema PBG).

PBG (*GY,GX*): Os primeiros dígitos da ordenada *R* contêm o número do fuso em milhões. Os fusos *f* são de 2° (1° fuso L_H=74°W, 2° fuso L_H=72°W, ...).

$$GY = 10^6 \cdot \frac{(-76° + L_H)}{2°} + k + y \quad com \quad k = 500\,000\,m$$
$$GX = x + h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m$$
$$f = \frac{(-76° + L_H)}{2°}$$

2.5 Exemplo numérico

Através das 'Coordenadas Geográficas' (elipsóide IUGG 1967) do Ponto 1 serão calculadas:

a.) as coordenadas da Projeção de Gauss, na versão UTM e PBG,

b.) a convergência de meridiano,

c.) o fator de escala

Solução:

Ponto 1 : L = 49° 16' 15,2448" W B = 25° 25' 50,1256" S

```
L =  49.27090133° W      B =  25.43059044° S
-------------------------------------------
Projeção = UTM,    Fuso = 22
                     N ......       6382100.5076
                     dL .....         1.72909867
Coordenada y :       t1y ....    173870.47154522
                     t3y ....        16.77685924
                     t5y ....         0.00078855
                     Dy .....    500000.00000000
                     E ......    673887.24919301
Coordenada x :       t0x ....   2812637.35519706
                     t2x ....      1126.60735981
                     t4x ....         0.33636818
                     t6x ....         0.00008277
                     xL .....   2813764.29900783
                     N ......(-)7186235.70099217
Convergência c :     t1c ....         0.74250500
                     t3c ....         0.00018688
                     t5c ....         0.00000006
                     c ......         0.74269193
Fator escala m :     mH .....         0.99960000
                     t2m ....         0.00037329
                     t4m ....         0.00000010
                     m ......         0.99997339
```

Ponto 1 : L = 49° 16‘ 15,2448“ W B = 25° 25‘ 50,1256“ S

```
L =  49.27090133° W      B =  25.43059044° S
---------------------------------------------
Projeção = PBG,    Fuso = 13
                   N ......        6382100.5076
                   dL .....          0.72909867
Coordenada y :     t1y ....      73339.85621457
                   t3y ....          1.25822393
                   t5y ....          0.00001051
                   Dy .....     500000.00000000
                   GY .....     573341.11444901
Coordenada x :     t0x ....    2813594.03456844
                   t2x ....        200.37952113
                   t4x ....          0.01063723
                   t6x ....          0.00000047
                   xL .....    2813794.42472727
                   GX .....    7186205.57527273
Convergência c : t1c ....            0.31308763
                   t3c ....          0.00001401
                   t5c ....          0.00000000
                   c ......          0.31310164
Fator escala m : mH .....            0.99994000
                   t2m ....          0.00006639
                   t4m ....          0.00000000
                   m ......          1.00000640
```

```
                         P R O - G A U S S   VERS. 1.0

                      Cálculo da Projeção Geodésica de Gauss
--------------------------------------------------------------------------------

                     Longitude (L) ..... :    -49.16152448  dec =  -49.27090133
                     Latitude  (B) ..... :    -25.25501256  dec =  -25.43059044

 Gauss-Krüger ...................     R :  104372161.5416     c  -0.3244956743
                                       H :   -7185912.8499     m   1.0002017713

 UTM ............................     E : 22  673887.2492     c   0.4433690958
                                       N :   -7186235.7010     m   0.9999733873

 PBG ............................    GY :   13573341.1144     c   0.1847165906
                                      GX :     7186205.5753    m   1.0000063971

                     Elipsóide de Referência : Gauss-Krüger = Bessel
                                                         UTM = IUGG 1967
                                                         PBG = IUGG 1967

--------------------------------------------------------------------------------
1 FIM   2 calc   3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Cálculo da Projeçao Geodésica de Gauss

3 Transformação de Coordenadas: PBG para Geográficas

O problema do cálculo das coordenadas geográficas, da longitude L e da latitude B, de um ponto P, é a inversão do problema do capítulo 2.

O presente desenvolvimento é baseado principalmente nas fórmulas de *Schödlbauer* [47], assim como também no caso do capítulo 2.

3.1 As coordenadas de partida PBG

PBG:

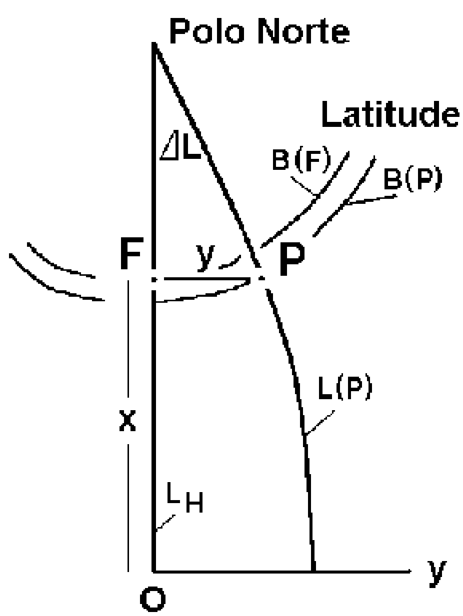
$$
\begin{aligned}
x &= GX - h \quad \text{com} \quad h = 10\,000\,000\,m \\
y &= GY - (F \cdot 10^6 + k) \\
&\quad \text{com} \quad k = 500\,000\,m \quad \text{e} \quad F = \text{primeiras cifras de } Y \\
L_H{}^{\circ} &= 2^{\circ} \cdot F - 76
\end{aligned}
$$

Parâmetros:

$$
\begin{aligned}
t_F &= \tan B_F \\
\eta^2{}_F &= e'^2 \cdot \cos^2 B_F \\
N_F &= \frac{\bar{c}}{\sqrt{1 + \eta_F^2}} = \text{raio da curvatura transversal}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{c} &= 6\,399\,617{,}442\,m = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide IUGG 1967)} \\
e'^2 &= 0{,}006\,739\,729 = \text{Quadrado da } 2^a \text{ excentricidade numérica (IUGG 1967)} \\
m_H &= 0{,}999\,94
\end{aligned}
$$

3.2 As coordenadas geográficas L, B



$$
\begin{aligned}
B_F &= B(G_F) = B\left(\frac{H}{m_H}\right) = B\left(\frac{x}{m_H}\right) \\
&= \text{Latitude geográfica do ponto } G_F = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= B_F + [t_2]_B \cdot y^2 + [t_4]_B \cdot y^4 + [t_6]_B \cdot y^6 \\
L &= L_H + [t_1]_L \cdot y + [t_3]_L \cdot y^3 + [t_5]_L \cdot y^5
\end{aligned}
$$

com os coeficientes

$$[t_2]_B = -\frac{\rho}{2N_F^2 \cdot m_H^2} \cdot t_F \cdot (1 + \eta_F^2)$$

$$[t_4]_B = +\frac{\rho}{24N_F^4 \cdot m_H^4} \cdot t_F \cdot (5 + 3t_F^2 + 6\eta_F^2 \cdot [1 - t_F^2])$$

$$[t_6]_B = -\frac{\rho}{720N_F^6 \cdot m_H^6} \cdot t_F \cdot (61 + 90t_F^2 + 45t_F^4)$$

$$[t_1]_L = +\frac{\rho}{N_F \cdot \cos B_F \cdot m_H^2}$$

$$[t_3]_L = -\frac{\rho}{6N_F^3 \cdot \cos B_F \cdot m_H^3} \cdot (1 + 2t_F^2 + \eta_F^2)$$

$$[t_5]_L = +\frac{\rho}{120N_F^5 \cdot \cos B_F \cdot m_H^5} \cdot (5 + 28t_F^2 + 24t_F^4)$$

3.3 A convergência dos Meridianos *c*

$$c = [t_1]_c \cdot y + [t_3]_c \cdot y^3 + [t_5]_c \cdot y^5$$

com os coeficientes

$$[t_1]_c = +\frac{\rho}{N_F \cdot m_H^2} \cdot t_F$$

$$[t_3]_c = -\frac{\rho}{3N_F^3 \cdot m_H^3} \cdot t_F \cdot (1 + t_F^2 - \eta_F^2)$$

$$[t_5]_c = +\frac{\rho}{15N_F^5 \cdot m_H^5} \cdot t_F \cdot (2 + 5t_F^2 + 3t_F^4)$$

3.4 O fator de Escala *m*

$$m = m_H + [t_2]_m \cdot y^2 + [t_4]_c \cdot y^4$$

com os coeficientes

$$[t_2]_m = +\frac{1}{2N_F^2 \cdot m_H^2} \cdot t_F \cdot (1 + \eta_F^2)$$

$$[t_4]_m = +\frac{1}{24N_F^4 \cdot m_H^3} \cdot t_F \cdot (1 + 6\eta_F^2)$$

3.5 Exemplo numérico

Através das ‘Coordenadas Gauss’ (elipsóide IUGG 1967) do Ponto 1 serão calculas:

a.) as ‘Coordenadas Geográficas’,
b.) a convergência de meridiano,
c.) o fator de escala

```
                         P R O - G A U S S   VERS. 1.0
                   Coordenadas Gauss  =>  Coordenadas geográficas
--------------------------------------------------------------------------------



 Gauss-Krüger ...    R :          0.0000  c :              (L) :
                     H :          0.0000  m :              (B) :

 UTM ...........     E :   22673887.2490  c :  0.44336909 (L)   -49.1615244800
 M. central = -51°   N :   -7186235.7010  m :  0.99997339 (B)   -25.2550125603

 PBG ...........    GY :   13573341.1145  c :  0.18471659 (L)   -49.1615244798
 M. central = -50°  GX :    7186205.5753  m :  1.00000640 (B)   -25.2550125603

                     elipsóide de referência :
                                                         UTM = IUGG 1967
                                                         PBG = IUGG 1967


--------------------------------------------------------------------------------
1 FIM   2 calc  3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Cálculo das Coordenadas Geográficas

I.) Solução para pontos com ‘Coordenadas UTM’:

Ponto 1 : E = 673 887,2492m N(S) = 7 186 235,7010m

```
y =  673887.2492      x = -2813764.2990
-----------------------------------------------
Projeção = UTM,   Fuso = 22
                   NF .....        6382103.4547
                   y ......         173887.2492
Longitude L :      LH .....        -51.00000000
                   t1L ....          1.72941081
                   t3L ....         -0.00031224
                   t5L ....          0.00000010
                   L ......        -49.27090133
                   L° .....     49°16'15,2448" W
Latitude B :       BF .....         25.44076734
                   t2B ....         -0.01018047
                   t4B ....          0.00000358
                   t6B ....         -0.00000000
                   B ......        -25.43059045
                   B° .....     25°25'50,1256" S
Convergência c :   t1c ....          0.74291644
                   t3c ....         -0.00022460
                   t5c ....          0.00000009
                   c ......          0.74269192
Fator escala m :   mH .....          0.99960000
                   t2m ....          0.00037336
                   t4m ....          0.00000002
                   m ......          0.99997339
```

II.) Solução para pontos com ‘Coordenadas PBG’:

Ponto 1 : GY = 13 573 341.1145m GX = 7 186 235.7010m

```
y =  573341.1145      x = -2813794.4247
-----------------------------------------------
Projeção = PBG,   Fuso = 13
                   NF .....        6382101.0314
                   y ......          73341.1145
Longitude L :      LH .....        -50.00000000
                   t1L ....          0.72912206
                   t3L ....         -0.00002340
                   t5L ....          0.00000000
                   L ......        -49.27090133
                   L° .....     49°16'15,2448" W
Latitude B :       BF .....         25.43239946
                   t2B ....         -0.00180913
                   t4B ....          0.00000011
                   t6B ....         -0.00000000
                   B ......        -25.43059045
                   B° .....       25°25'50,1256"
Convergência c :   t1c ....          0.31311847
                   t3c ....         -0.00001683
                   t5c ....          0.00000000
                   c ......          0.31310164
Fator escala m :   mH .....          0.99994000
                   t2m ....          0.00006640
                   t4m ....          0.00000000
                   m ......          1.00000640
```

4 Transformações de Coordenadas-Gauss entre Fusos

Para projetos de medição ou cálculos geodésicos, como por exemplo, de áreas de parcelas, todos os pontos de um objeto (de um bloco, de um município, etc.) devem ser definidos em um único sistema (fuso) de coordenadas. No caso de que aquele objeto se encontre dividido entre dois fusos da projeção geodésica de Gauss, deve-se transformar uma parte dos pontos de um fuso para o fuso vizinho.

Os dois casos, a transformação do 'fuso-oeste' para o 'fuso-leste' e a transformação do 'fuso-oeste' para o 'fuso-leste', geram também diferentes fórmulas de calculo. Nas seguintes fórmulas, o símbolo F_O representa 'fuso-oeste' e F_L usado para 'fuso-leste', os elementos de F_L são marcados com um asterisco (*), por exemplo L^*_H para o meridiano principal do fuso-leste.

Geralmente é costume estender os fusos acima do valor da definição, criando uma zona de sobreposição. Neste zona, todos os pontos eram registrados nos dois fusos, com coordenadas duplas, de acordo com o meridiano de referência de cada fuso.

O problema de cálculo da transformação pode ser resolvido de maneira simples, calculando-se em um primeiro passo as coordenadas geográficas a partir das coordenadas Gauss (G.-K., UTM ou PBG) dos pontos de um fuso (segundo o capítulo 3), e logo, em um segundo passo, calculando-se a base destas coordenadas geográficas as coordenadas Gauss do fuso vizinho.

Entre diversas outras soluções exatas da literatura da Geodésia Matemática, a presente solução foi escolhida, em primeiro lugar, pelo fato de que a programação das fórmulas pode-se basear em grandes partes em rotinas já programadas para a solução dos problemas dos capítulos 2 e 3. Realizando a programação com linguagens relacionadas a objetos (C++, Borland Delphi, etc.), pode-se realizar códigos binários bastante compactos.

4.1 Fórmulas de cálculo: Sistema oeste para o sistema leste

a.) Coordenadas Gauss no sistema oeste[3]

Gauss-Krüger:

$$\begin{aligned} x &= H \\ y &= R - (F \cdot 10^6 + k) \quad com \quad k = 500\,000 m \quad e \quad F = primeira\ cifra\ de\ R \\ L_H &= F \cdot 3° \end{aligned}$$

UTM:

$$\begin{aligned} x &= N \\ y &= E - k \quad com \quad k = 500\,000 m \\ L_H &= (Zona - 30) \cdot 6° - 3° \end{aligned}$$

PBG:

$$\begin{aligned} x &= GX - h \quad com \quad h = 10\,000\,000 m \\ y &= GY - (F \cdot 10^6 + k) \quad com \quad k = 500\,000 m \quad e \quad F = primeira\ cifra\ de\ Y \\ L_H &= F \cdot 2° - 76° \end{aligned}$$

[3]) vide capítulo 3 para os valores dos parâmetros

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L_H

$$\begin{aligned} B &= B(y,x) \\ \Delta L &= \Delta L(y,x) \\ L &= L_H + \Delta L \end{aligned}$$

... segundo as fórmulas do capítulo 3.1

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L_H*

$$\begin{aligned} L_H^* &= L_H + \Delta L_H \\ \Delta L^* &= L - L_H^* \end{aligned}$$

com $\Delta L_{H\,(G.-K.)} = 3°; \quad \Delta L_{H\,(UTM)} = 6°; \quad \Delta L_{H\,(PGB)} = 2°$

d.) Coordenadas Gauss no sistema leste (L_H*)

$$\begin{aligned} x^* &= x(B,\Delta L^*) \\ y^* &= y(B,\Delta L^*) \end{aligned}$$

... segundo as fórmulas do capítulo 2.1

Gauss-Krüger:
$$\begin{aligned} H^* &= x^* \\ R^* &= 10^6 \cdot (F+1) + k + y^* \quad com \quad k = 500\,000\,m \end{aligned}$$

UTM:
$$\begin{aligned} N^* &= x^* \\ E^* &= y^* + k \quad com \quad k = 500\,000\,m \\ Zona^* &= Zona + 1 \end{aligned}$$

PBG:
$$\begin{aligned} GX^* &= x^* + h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m \\ GY^* &= 10^6 \cdot (F+1) + k + y^* \quad com \quad k = 500\,000\,m \end{aligned}$$

4.2 Fórmulas de cálculo: Sistema leste para o sistema oeste

a.) Coordenadas Gauss no sistema leste[4] (L_H*)

Gauss-Krüger:
$$\begin{aligned} x^* &= H^* \\ y^* &= R^* - (F^* \cdot 10^6 + k) \quad com \quad k = 500\,000\,m \quad e \quad F^* = primeira\ cifra\ de\ R^* \\ L_H^* &= F^* \cdot 3° \end{aligned}$$

[4]) vide capítulo 2 para os valores dos parâmetros

UTM:

$$x^* = N^*$$
$$y^* = E^* - k \quad com \quad k = 500\,000\,m$$
$$L_H^* = (Zona^* - 30) \cdot 6° - 3°$$

PBG:

$$x^* = GX^* - h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m$$
$$y^* = GY^* - (F^* \cdot 10^6 + k) \quad com \quad k = 500\,000\,m \quad e \quad F^* = primeira\ cifra\ de\ Y^*$$
$$L_H^* = F^* \cdot 2° - 76°$$

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L_H^*

$$B = B(y^*, x^*)$$
$$\Delta L^* = \Delta L(y^*, x^*)$$
$$L = L_H^* + \Delta L^*$$

... segundo as fórmulas do capítulo 3.1

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L_H

$$L_H = L_H^* + \Delta L_H$$
$$\Delta L = L - L_H$$

com $\Delta L_{H\,(G.-K.)} = 3°; \quad \Delta L_{H\,(UTM)} = 6°; \quad \Delta L_{H\,(PGB)} = 2°$

d.) Coordenadas Gauss no sistema oeste

$$x = x(B, \Delta L)$$
$$y = y(B, \Delta L)$$

... segundo as fórmulas do capítulo 2.1

Gauss-Krüger:

$$H = x$$
$$R = 10^6 \cdot (F^* - 1) + k + y \quad com \quad k = 500\,000\,m \quad e \quad F^* = primeira\ cifra\ de\ R^*$$

UTM:

$$N = x$$
$$E = y + k \quad com \quad k = 500\,000\,m$$
$$Zona = Zona^* - 1$$

PBG:

$$GX = x + h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m$$
$$GY = 10^6 \cdot (F - 1) + k + y \quad com \quad k = 500\,000\,m$$

4.3 Exemplo numérico

O ponto P com as coordenadas do fuso 13 da 'Projeção Brasileira de Gauss' (PBG):

GY = 13 573 341.1140 m, GX = 7 186 205.5753 m

será transformado a.) para **fuso 12** e b.) para o**fuso 14**.
A solução é calculada, segundo as fórmulas dos capítulos 4.1 e 4.2, através de uma transformação dupla. No primeiro passo calcula-se as coordenadas geográficas do ponto e determina-se a diferença entre a longitude do ponto e a longitude do meridiano central do fuso alvo. Com estes parâmetros calcula-se, no segundo passo, as coordenadas-PBG do fuso vizinho.

```
                         P R O - G A U S S   VERS. 1.0
                       Transformação Fuso A <=>  Fuso B
-----------------------------------------------------------------------------------



                          Projeção Brasileira de Gauss
                         ==============================


 Fuso       =  13  GY :    13573341.1140  c :  0.18471659 (L)  -49.1615244816
 M. centr. = -50° GX :     7186205.5753  m :  1.00000640 (B)  -25.2550125603

 Fuso       =  12  GY :    12774585.3601  c :  1.10215678 (L)  -49.1615244824
 M. centr. = -52° GX :     7183596.3796  m :  1.00087083 (B)  -25.2550125606



-----------------------------------------------------------------------------------
1 FIM    2 calc   3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Transformação Sistema Leste => Sistema Oeste

```
                         P R O - G A U S S   VERS. 1.0
                        Transformação Fuso A  =>  Fuso B
-----------------------------------------------------------------------------------



                          Projeção Brasileira de Gauss
                         ==============================


 Fuso       =  13  GY :    13573341.1140  c :  0.18471659 (L)  -49.1615244816
 M. centr. = -50° GX :     7186205.5753  m :  1.00000640 (B)  -25.2550125603

 Fuso       =  14  GY :    14372153.6817  c : -0.32449568 (L)  -49.1615244816
 M. centr. = -48° GX :     7185797.0254  m :  1.00014176 (B)  -25.2550125606



-----------------------------------------------------------------------------------
1 FIM    2 calc   3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Transformação Sistema Oeste => Sistema Leste

5 Transformações de Coordenadas entre sistemas PBG e UTM

Na maioria dos paises existe mais do que um sistema de referência de coordenadas. Em muitos casos, são estes, o sistema UTM e um outro segundo sistema, geralmente para uma referência de coordenadas e para o cadastro imobiliário. Para os pontos de referência de triangulação existem geralmente coordenadas no sistema UTM e também coordenadas geográficas λ,φ (ou L,B). As coordenadas (X,Y) destes pontos, no sistema PBG da projeção cadastral, pode-se calcular através das fórmulas do capítulo 2.

Para este tipo de transformação entre dois sistemas de projeção, na literatura recomenda-se geralmente uma transformação afim, devido ao fato, que tal transformação não altera a característica mais importante da projeção de Gauss, que é a ‘conformidade em pequenas partes’.

Mas, uma condição indispensável para a aplicação da transformação afim, é que os sistemas origem e alvo da transformação, ambos devem se referir ao mesmo meridiano central. Por causa dos diferentes fusos do sistema UTM (3°) e PBG (2°), esta condição é satisfeita somente em cada segundo fuso-UTM, onde o meridiano central é idêntico ao de cada terceiro fuso-PBG.

Para calcular pontos no sistema PBG através das coordendas UTM (ou vice versa), é recomendável usar um procedimento semelhante ao do capítulo 4. Desta maneira, o ponto P será transformado em um primeiro passo, do sistema de partida para o sistema de coordenadas geográficas, e no segundo passo, do sistema de coordenadas geográficas ao sistema alvo.

Os cálculos correspondentes para a transformação em ambas as direções são formulados nos próximos sub-capítulos:

5.1 Fórmulas de transformação: Sistema UTM para o sistema PBG

a.) Coordenadas no sistema UTM[5]

$$\begin{aligned} x &= N \\ y &= E - k \quad com \quad k = 500\,000\,m \\ L_H &= (Zona - 30) \cdot 6° - 3° \end{aligned}$$

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no fuso L_H (UTM), segundo as fórmulas do capítulo 3.1

$$\begin{aligned} B &= B(y,x) \\ \Delta L &= \Delta L(y,x) \\ L &= L_H + \Delta L \end{aligned}$$

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no fuso F_H^* de L (PBG)

$$\Delta L^* = L - L_H^*$$

com $L_H^* = 2° \cdot F - 76°$

[5]) para os valores dos parâmetros vide capítulo 3

d.) Coordenadas no sistema PBG (L_H*), segundo as fórmulas do capítulo 2.1

$$x^* = x(B, \Delta L^*)$$
$$y^* = y(B, \Delta L^*)$$

$$X^* = x^* + h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m$$
$$Y^* = 10^6 \cdot \frac{(L_H - 76°)}{2°} + k + y^* \quad com \quad k = 500\,000\,m$$

5.2 Fórmulas de transformação: Sistema PBG para o sistema UTM

a.) Coordenadas no sistema PBG[6] (L_H*)

$$x^* = GX^* - h \quad com \quad h = 10\,000\,000\,m$$
$$y^* = GY^* - (F^* \cdot 10^6 + k) \quad com \quad k = 500\,000\,m \quad e \quad F^* = primeira\ cifra\ de\ Y^*$$
$$L_H^* = 2° \cdot F^* - 76°$$

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no fuso L_H* (PBG)

$$B = B(y^*, x^*)$$
$$\Delta L^* = \Delta L(y^*, x^*)$$
$$L = L_H^* + \Delta L$$

... segundo as fórmulas do capítulo 3.1

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no fuso L_H (UTM)

$$L_H = L_H^* + \Delta L_H$$
$$\Delta L = L - L_H$$

com $\Delta L_{H\,(UTM)} = 3°; \quad \Delta L_{H\,(PGB)} = 2°$

d.) Coordenadas no sistema UTM, segundo as fórmulas do capítulo 2.1

$$x^* = x(B, \Delta L)$$
$$y^* = y(B, \Delta L)$$

$$N = x$$
$$E = y + k \quad com \quad k = 500\,000\,m$$
$$Zona = Zona^* - 1$$

[6]) para os valores dos parâmetros vide capítulo 2

5.3 Exemplo numérico

No exemplo são fransformadas as coordenadas de um ponto do fuso 22 (meridiano central = 51°W) do sistem UTM para o fuso 13 (meridiano central = 50°W) do sistema PBG. Para o exemplo da transformação no sentid contrário (PBG para UTM) foi usado o mesmo ponto; deste modo, a segunda transformação (que é a inversa d primeira) deve ter como resultado as coordenadas originais no sistema UTM.

A escolha do fuso, segundo as especificações correspondentes da projeção (UTM ou PBG), é automática; no caso de se desejar um outro fuso alvo, pode-se continuar a transformação com as fórmulas do capítulo 4 (transformação fuso A→ fuso B).

```
                          P R O - G A U S S   VERS. 1.0
                         (c) 1996 Dr.-Ing. Jürgen Philips
-----------------------------------------------------------------------------------



                            Transformação UTM -> PBG
                            =========================


 Fuso UTM   =  22    E :    22673887.2492   c :  0.44336909 (L)   -49.1615244801
 M. centr.  = -51°   N :    -7186235.7010   m :  0.99997339 (B)   -25.2550125603

 Fuso PBG   =  13   GY :    13573341.1144   c :  0.18471659 (L)   -49.1615244801
 M. centr.  = -50°  GX :     7186205.5752   m :  1.00000640 (B)   -25.2550125607



-----------------------------------------------------------------------------------
1 FIM   2 calc  3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Transformação Coordenadas UTM → Coordenadas PBG

```
                          P R O - G A U S S   VERS. 1.0
                         (c) 1996 Dr.-Ing. Jürgen Philips
-----------------------------------------------------------------------------------



                            Transformação PBG => UTM
                            =========================


 Fuso PBG   =  13   GY :    13573341.1145   c :  0.18471659 (L)   -49.1615244798
 M. centr.  = -50°  GX :     7186205.5753   m :  1.00000640 (B)   -25.2550125603

 Fuso UTM   =  22    E :      673887.2492   c :  0.44336910 (L)   -49.1615244799
 M. centr.  = -51°   N :    -7186235.7009   m :  0.99997339 (B)   -25.2550125606



-----------------------------------------------------------------------------------
1 FIM   2 calc  3       4       5       6       7       8       9       0
```

Cópia de Tela : Transformação Coordenadas PBG → Coordenadas UTM

6 Uma Projeção ideal para o Território Brasileiro ?

As deformações das coordenadas, causadas pela projeção de uma superfície curva em um plano de referência, têm valores diferentes, dependendo, em primeiro lugar, da distância do meridiano central da projeção escolhida, e em segundo, da latitude geográfica do ponto. Assim, uma determinada projeção pode ter valores aceitáveis de deformação em um país, e valores inaceitáveis em outro.

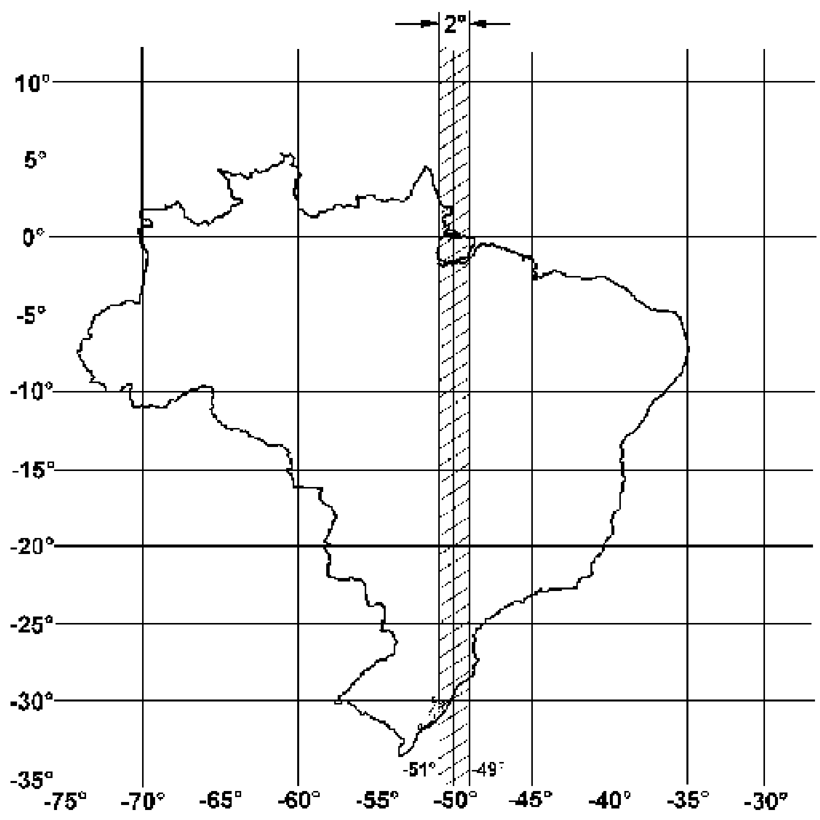
As duas projeções, Gauss-Krüger e UTM, foram definidas para paises do hemisfério ‘Norte’, com latitudes relativamente altas. A Alemanha, país orígem da projeção Gauss-Krüger, tem latitudes entre 50 e 60°; os paises da OTAN, que usam o sistema UTM para as cartas militares, encontram-se também no hemisfério Norte, entre 40 e 80°.

O único parâmetro, que permite ter controle sobre o efeito da deformação projetiva, é o tamanho do fuso. Para ter, no Brasil, com latitudes até 33°, deformações projetivas não maiores do que aquelas deformações de Gauss-Krüger e da UTM nos paises de suas orígens, deve-se reduzir o tamanho do fuso aproximadamente a 2° (vide tabela ‘Deformação k ...’ do capitulo 1.4).

Os fusos para a projeção proposta (PBG), então, são de 2°. Estes fusos, na latitude de 30°, têm uma largura de l = 192 km; que é a mesma do fuso Gauss-Krüger (3°) na latitude européia de L = 55° (l = 191 km).

$$l_{[UTM]} \cong 3 \cdot 111{,}11\,km \cdot \cos(55°) \cong 191{,}19\,km$$
$$l_{[PBG]} \cong 2 \cdot 111{,}11\,km \cdot \cos(30°) \cong 192{,}45\,km$$

‘Projeção Brasileira de Gauss’
Fuso Nº 13



6.1 Os ‘Fusos variáveis’

Tanto no caso de Gauss-Krüger, como no de UTM estende-se os fusos acima do valor da definição, criando-se assim uma zona de sobreposição de 1°, ou 30' em cada lado. Os pontos desta zona, são calculados nos dois fusos, com coordenadas duplas, criando-se registros duplos de acordo com o meridiano de referência de cada fuso.

Na época, quando 'coordenadas' foram usadas apenas para pontos de Triangulação e para poucos outros pontos das redes referenciais, o cálculo e registro duplo em dois fusos era uma solução aceitável - a sobreposição dos fusos era bem justificada.

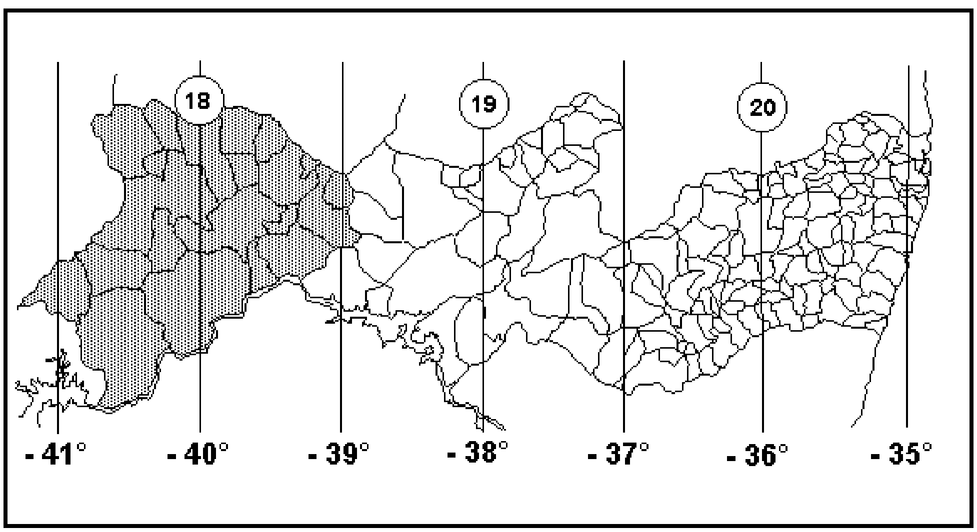
Desde que se registra pontos e coordenadas em massa, que é o caso, por exemplo, da Cartografia Digital, dos Modelos Digitais de Terreno (com os Modelos Digitais de Projetos!), etc, o registro duplo (em dois fusos) é bastante incomfortável. A atualização de pontos idênticos em dois arquivos é complicada e cria erros e contradições.

A solução, aqui proposta para ser aplicada na PBG, é de não se usar mais meridianos fixos para limitar os fusos. No lugar destes meridianos deve-se usar alguns limites de municípios para limitar um fuso contra outro. Desta maneira, evita-se o caso, que o território de um município seja dividido entre dois fusos.

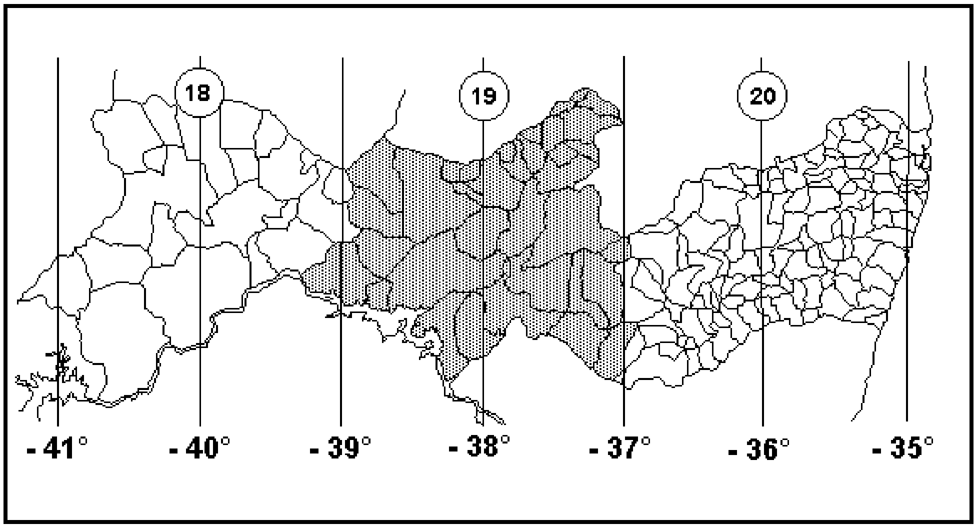
Os 'fusos', neste sistema, ainda têm sua utilidade como referência para a numeração (de 1 até 21 para o Brasil continental) e também para a escolha daqueles limites municipais que mais se aproximam do meridiano limite (1° na direção leste e 1° na direção oeste de cada meridiano central).

A praticabilidade desta solução é demonstrada no caso dos municípios de Pernambuco, onde todo o Estado pode ser projetado em três fusos à 2°; isto, no sistema PBG, são os fusos 18, 19 e 20. Todos os municípios pertencem a apenas um fuso. A 'invasão' de um município no 'fuso vizinho' é bastante moderada, com valores variando entre poucos metros até um máximo de aproximadamente 20 km.

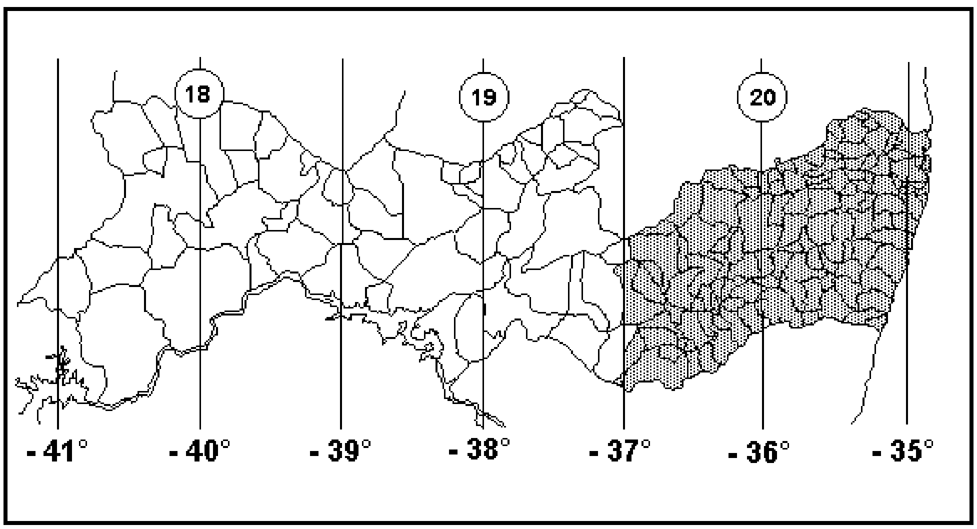
Municípios do ***Fuso 18*** *no Estado de Pernambuco*



Municípios do ***Fuso 19*** *no Estado de Pernambuco*



Municípios do ***Fuso 20*** *no Estado de Pernambuco*



Seguramente existem estados no Brasil com municípios bem maiores, em comparação com o caso de Pernambuco, que têm quase uma distribuição territorial ideal para o sistema PBG. Estruturas territoriais maiores existem principalmentenas grandes regiões agrárias e florestais no Centro, Centro-Oeste e no Norte do País. Nestas áreas pode-setolerar também uma faixa maior do fuso, 30 ou 50 km acima do 'meridiano-limite' (ou mais ainda, caso a área seja de menor 'importância') e tolerar também maiores deformações projetivas.

Para o uso técnico das coordenadas, por exemplo para projetos de engenharia ou para a Cartografia Digital, as coordenadas podem ser transformadas entre um fuso e outro, praticamente à tempo real.

Os limites de fusos, no caso PBG, são idênticos aos limites municipais. Os pontos, que demarcam estes limites, são os únicos que devem ser calculados em dois fusos diferentes, porém registrados uma única vez em cada lado, no sistema do restante do município.

7 Bibliografia

[1] Philips, J.: *A Projeção Geodésica de Gauss e as Coordenadas UTM para o Cadastro Brasileiro.* **GEODÉSIA** ***online*** 4/1997.