CÁLCULO L1 — NOTAS DA VIGÉSIMA PRIMEIRA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, abordaremos a técnica de integração conhecida como frações parciais. Esta técnica pode ser utilizada para calcular a integral de qualquer função racional — desde que seja conhecida a fatoração do seu denominador como produto de polinômios de grau 1 ou 2.

1. Descrição do método

Para polinômios $a(X)$ e $b(X)$ com coeficientes reais, desejamos calcular a seguinte integral

$$\int \frac{a(X)}{b(X)} dX \tag{1}$$

Podemos dividir $a(X)$ por $b(X)$ obtendo um quociente $q(X)$ e um resto $r(X)$ tais que

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X)$$

sendo o grau de $r(X)$ menor que o grau de $b(X)$. Dividindo esta igualdade por $b(X)$, chegamos a

$$\frac{a(X)}{b(X)} = \frac{q(X)b(X) + r(X)}{b(X)} = q(X) + \frac{r(X)}{b(X)}$$

Conseqüentemente

$$\int \frac{a(X)}{b(X)} dX = \int \left(q(X) + \frac{r(X)}{b(X)}\right) dX = \int q(X)dX + \int \frac{r(X)}{b(X)} dX \tag{2}$$

Portanto, por (2), reduzimos o cálculo da interal apresentada em (1) ao cálculo da integral de:

- um polinômio, que sabemos como fazer; e
- uma função racional cujo numerador possui grau inferior ao denominador.

Para calcular a última integral, necessitamos fatorar $b(X)$ como produto de polinômios irredutiveis sobre os reais. Lembramos que os polinômios irredutíveis sobre os reais possuem grau 1 e 2. Um polinômio de grau 2 será irredutível sobre os reais se e somente se não possui raiz real. Depois decompomos o quociente

$$\frac{r(X)}{b(X)}$$

como a soma de frações "menores" — daí o nome da técnica de integração: frações parciais. Para cada polinômio irredutível[1] mônico[2] $p(X)$ que divide $b(X)$, seja n o maior

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

[1]Um polinômio com coeficientes reais é dito irredutível quando não pode ser decomposto como o produto de dois outros polinômios com coeficientes reais de grau menor.

[2]Um polinômio é dito mônico quando o coeficiente de sua maior potência é igual a 1.

inteiro positivo tal que $p(X)^n$ divide $b(X)$. Este polinômio irredutível originará n frações parciais na decomposição de

$$\frac{r(X)}{b(X)}$$

cujos denominadores são as k-ésimas potências de $p(X)$, para k variando de 1 a n, a saber:

$$\frac{a_1(X)}{p(X)}, \frac{a_2(X)}{p(X)^2}, \frac{a_3(X)}{p(X)^3}, \ldots, \frac{a_n(X)}{p(X)^n}$$

O grau do polinômio que está no numerador de cada uma destas frações parciais é menor que o de $p(X)$. Isto é,

- $a_k(X)$ é um número real quando $p(X)$ tem grau 1; ou
- $a_k(X) = \alpha_k X + \beta_k$, para números reais α_k e β_k, quando $p(X)$ tem grau 2.

Vamos fazer um exemplo. Considere a seguinte fração:

$$\frac{X^6 - 3X^4 + 9}{X^2(X+1)^3(X^2+X+1)^2} \tag{3}$$

Como o grau do produto de polinômios é igual a soma dos graus dos polinômios envolvidos no produto, temos que o denominador possui grau $9 = 1+1+1+1+1+2+2$. Portanto, é maior que o grau do numerador. Note que o denominador está fatorado como o produto de polinômios irredutíveis sobre os reais. Conseqüentemente existem números reais $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ tais que a fração em (3) é igual a

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{(X+1)^3} + \frac{fX+g}{X^2+X+1} + \frac{hX+i}{(X^2+X+1)^2} \tag{4}$$

Não iremos calcular os valores de $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ porque será complexo e não lançará luz a teoria. Faremos isto, a seguir, em exemplos menores. Note que sabemos como integrar cada uma das frações que aparecem em (4). Portanto, desde que a decomposição do denominador como produto de polinômios irredutíveis sobre os reais de uma função racional seja conhecida, será possível integrar tal função.

Exemplo 1. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \frac{5X^3 + 2X - 4}{X^2 - 2X} dX$$

Como, na função racional cuja integral desejamos calcular, o numerador tem grau maior ou igual que o denominador, necessitamos dividir o numerador pelo denominador desta fração com o objetivo de escreve-la como a soma de um polinômio com uma outra função racional na qual o numerador tem grau menor que o denominador. Temos que

$$5X^3 + 2X - 4 = (5X+10)(X^2 - 2X) + (22X - 4)$$

Ao dividirmos esta identidade por $X^2 - 2X$ chegamos a

$$\frac{5X^3 + 2X - 4}{X^2 - 2X} = 5X + 10 + \frac{22X - 4}{X^2 - 2X}$$

Como a integral da soma é igual a soma das integrais, obtemos que

$$\int \frac{5X^3 + 2X - 4}{X^2 - 2X} dX = \int (5X+10) dX + \int \frac{22X - 4}{X^2 - 2X} dX$$

Consqüentemente

$$\int \frac{5X^3 + 2X - 4}{X^2 - 2X} dX = \frac{5X^2}{2} + 10X + \int \frac{22X - 4}{X^2 - 2X} dX \tag{5}$$

A fatoração de $X^2 - 2X$ como produto de irredutíveis é $X(X-2)$ e daí existem números reais a e b tais que

$$\frac{22X - 4}{X^2 - 2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} \tag{6}$$

Ao somarmos as frações que estão à direita desta igualdade, temos que

$$\frac{22X - 4}{X^2 - 2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} = \frac{a(X-2) + bX}{X(X-2)} = \frac{(a+b)X - 2a}{X^2 - 2X}$$

Como as frações que estão nos extremos desta igualdade possuem o mesmo denominador, têm de possuir também o mesmo numerador, isto é,

$$22X - 4 = (a+b)X - 2a$$

Mas dois polinômios são iguais quando possuem os mesmos coeficientes e daí

$$\begin{aligned} a + b &= 22 \\ -2a &= -4 \end{aligned}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 20$. Substituindo os valores de a e b em (6), temos que

$$\frac{22X - 4}{X^2 - 2X} = \frac{2}{X} + \frac{20}{X-2}$$

Como a integral da soma é a soma das integrais e a multiplicação por escalar comuta com a integração, obtemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{22X - 4}{X^2 - 2X} dX &= \int \frac{2}{X} dX + \int \frac{20}{X-2} dX \\ &= 2\int \frac{1}{X} dX + 20 \int \frac{1}{X-2} dX \\ &= 2\ln|X| + 20\ln|X-2| + C \end{aligned}$$

Substituindo o valor desta integral em (5), concluímos que

$$\int \frac{5X^3 + 2X - 4}{X^2 - 2X} dX = \frac{5X^2}{2} + 10X + 2\ln|X| + 20\ln|X-2| + C$$

O próximo exemplo foi calculado na décima nona aula quando do computo da integral da secante ao cubo. Agora, faremos utilizando uma técnica de integração, que é aplicável a vários outros casos similares, e não um truque que vale única e exclusivamente para uma situação específica.

Exemplo 2. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \sec\theta d\theta$$

Pela definição da secante, temos que

$$\int \sec\theta d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \cos^{-1}\theta d\theta \tag{7}$$

Isto é, a função que está sendo integrada é o produto de uma potência do seno por uma potência do cosseno. Como o expoente da potência do cosseno é ímpar, a mudança de variável

$$X = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{com} \qquad dX = \cos\theta d\theta$$

transforma esta integral em uma função racional na variável X. Logo

$$\int \cos^{-1}\theta d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\frac{dX}{\cos\theta} = \int \frac{dX}{\cos^2\theta} = \int \frac{dX}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \int \frac{dX}{1-X^2} \tag{8}$$

Como $1-X^2 = (1-X)(1+X)$, exsitem números reais a e b tais que

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1+X} = \frac{a(1+X)+b(1-X)}{(1-X)(1+X)} = \frac{(a-b)X+(a+b)}{1-X^2} \tag{9}$$

Portanto, $1 = (a-b)X + (a+b)$ e daí $a-b=0$ e $a+b=1$. Logo $a=b=\frac{1}{2}$. Substituindo estes valores em (9), temos que

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2(1-X)} + \frac{1}{2(1+X)}$$

Como a integral da soma é a soma das integrais e a integração comuta com a multiplicação por um escalar, temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-X^2}dX &= \int \frac{1}{2(1-X)}dX + \int \frac{1}{2(1+X)}dX \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-X}dX + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+X}dX \\ &= -\frac{\ln|1-X|}{2} + \frac{\ln|1+X|}{2} + C\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (7) e (8) e voltando a variável inicial, chegamos a

$$\int \sec\theta d\theta = \frac{\ln|1+X|}{2} - \frac{\ln|1-X|}{2} + C = \frac{\ln|1+\operatorname{sen}\theta|}{2} - \frac{\ln|1-\operatorname{sen}\theta|}{2} + C$$

Use as propriedades da função logaritmica e uma identidade trigonométrica para verificar que a resposta obtida agora para esta integral coincide com a anterior que foi $\ln|\operatorname{tg}\theta + \sec\theta| + C$

Exemplo 3. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2}dX$$

Exsitem números reais a, b, c e d tais que

$$\frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2} = \frac{2X-5}{X^2(X^2+X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \tag{10}$$

Somando as frações que estão após o último sinal de igualdade, temos que

$$\begin{aligned}\frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2} &= \frac{aX(X^2+X+1)+b(X^2+X+1)+(cX+d)X^2}{X^2(X^2+X+1)}\\ &= \frac{(a+c)X^3+(a+b+d)X^2+(a+b)X+b}{X^4+X^3+X^2}\end{aligned}$$

Portanto, o numeradores destas frações tem de ser iguais, isto é,

$$2X-5=(a+c)X^3+(a+b+d)X^2+(a+b)X+b$$

Como dois polinômios são iguais quando os seus coeficientes coincidem, temos que

$$\begin{aligned}b&=-5\\ a+b&=2\\ a+b+d&=0\\ a+c&=0\end{aligned}$$

Logo $a=7, b=-5, c=-7, d=-2$. Substituindo estes valores em (10), concluímos que

$$\frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2}=\frac{7}{X}-\frac{5}{X^2}-\frac{7X+2}{X^2+X+1}$$

Como a integral da diferença é a diferença das integrais e a multiplicação por um escalar comuta com a integração, temos que

$$\int\frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2}dX=7\int\frac{1}{X}dX-5\int\frac{1}{X^2}dX-\int\frac{7X+2}{X^2+X+1}dX$$

As duas primeiras integrais são fáceis de serem calculadas, pois o integrando é uma potência de X. Consqüentemente

$$\int\frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2}dX=7\ln|X|+\frac{5}{X}-\int\frac{7X+2}{X^2+X+1}dX \tag{11}$$

A partir de agora, daremos atenção ao cálculo da integral que falta, a saber:

$$\int\frac{7X+2}{X^2+X+1}dX$$

Iremos mudar a variável de forma que o denominar se transforme em um múltiplo de Y^2+1, onde Y será a nova variável de integração. Note que, após completarmos o quadrado, obtemos que

$$X^2+X+1=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

Se

$$Y=\frac{2X+1}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

então

$$X^2+X+1=\frac{3}{4}(Y^2+1) \tag{13}$$

De (12), temos que

$$X=\frac{\sqrt{3}Y-1}{2} \qquad \text{e} \qquad dX=\frac{\sqrt{3}}{2}dY \tag{14}$$

De (13) e (14), concluímos que

$$\int \frac{7X+2}{X^2+X+1}dX = \int \frac{\left[7\left(\frac{\sqrt{3}Y-1}{2}\right)+2\right]}{\frac{3}{4}(Y^2+1)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dY\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{7\sqrt{3}Y-3}{Y^2+1}dY \tag{15}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int \frac{7\sqrt{3}Y-3}{Y^2+1}dY &= 7\sqrt{3}\int \frac{Y}{Y^2+1}dY - 3\int \frac{1}{Y^2+1}dY \\ &= \frac{7\sqrt{3}\ln(Y^2+1)}{2} - 3\operatorname{arctg} Y + C\end{aligned}$$

Substituindo este valor em (15), temos que

$$\int \frac{7X+2}{X^2+X+1}dX = \frac{7\ln(Y^2+1)}{2} - \sqrt{3}\operatorname{arctg} Y + C$$

Retornando a variável original, chegamos a

$$\int \frac{7X+2}{X^2+X+1}dX = \frac{7\ln(X^2+X+1)}{2} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ao substituirmos o valor desta integral em (11), temos que

$$\int \frac{2X-5}{X^4+X^3+X^2}dX = 7\ln|X| + \frac{5}{X} - \frac{7\ln(X^2+X+1)}{2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Exercício 4. *Calcule as seguintes integrais:*

(i)
$$\int \frac{X}{3X^2+5}dX$$

(ii)
$$\int \frac{X^3+2X}{3X^2+5}dX$$

(iii)
$$\int \frac{3-10X}{4X^2+9}dX$$

(iv)
$$\int \frac{2X^3-3X+3}{X^2+X}dX$$

(v)
$$\int \frac{1}{X^3+3X^2+2X}dX$$

(vi)
$$\int \frac{X-5}{X^3+2X^2+3X+6}dX$$

2. Substituição pela tangente do arco da metade

Sejam $a(X,Y)$ e $b(X,Y)$ polinômios com coeficientes reais em duas variáveis. Considere a integral

$$\int \frac{a(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)}{b(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)} d\theta \tag{16}$$

Apresentaremos uma técnica que transforma esta integral em uma integral de uma função racional. Logo possível de ser solucionada com a técnica desenvolvida na seção anterior. Esta técnica é a única parte do programa que não daremos ênfase neste curso e não será cobrada em nenhuma avaliação.

Sabemos que

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Dividindo o numerador e o denominador desta fração por $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, temos que

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{17}$$

Note que a soma do quadrado no numerador com o quadrado do denominador de (17) é igual a 1. De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2 &= \frac{(2\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2} \\
&= \frac{4\operatorname{tg}^2\alpha + (1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2} \\
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2} = 1
\end{aligned}$$

Portanto, o numerador de (17) é igual a $\operatorname{sen}(2\alpha)$ ou $-\operatorname{sen}(2\alpha)$ e o denominador é igual a $\cos(2\alpha)$ ou $-\cos(2\alpha)$. Analisando o sinal destas funções, temos que

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{e} \qquad \cos(2\alpha) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Fazendo $\theta = 2\alpha$ e $X = \operatorname{tg}\alpha$, obtemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2X}{1+X^2} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{1-X^2}{1+X^2} \tag{18}$$

Note que

$$dX = \sec^2\alpha d\alpha = (1+\operatorname{tg}^2\alpha)d\alpha = (1+X^2)d\theta$$

Isto é,

$$d\theta = \frac{dX}{1+X^2} \tag{19}$$

Ao fazermos a mudança de variável descrita pelas relações dadas em (18) e (19), a integral (16) se transforma em uma integral de uma função racional — que foi abordada na seção anterior. Esta mudança de variável é conhecida como a substituição pela tangente do arco da metade.

Exemplo 5. *Transforme a seguinte integral em uma integral de uma função racional através de uma mudança de variável*

$$\int \frac{5 \operatorname{sen}\theta - 7\cos\theta + 3}{\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + 2} d\theta$$

Por (18) e (19), temos que

$$\int \frac{5 \operatorname{sen}\theta - 7\cos\theta + 3}{\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + 2} d\theta = \int \left[\frac{5\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) - 7\left(\frac{1-X^2}{1+X^2}\right) + 3}{\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) + 2\left(\frac{1-X^2}{1+X^2}\right) + 2} \right] \left[\frac{dX}{X^2+1} \right]$$

Multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração na integral à direita da igualdade por $1 + X^2$, temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \operatorname{sen}\theta - 7\cos\theta + 3}{\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + 2} d\theta &= \int \left[\frac{10X - 7(1-X^2) + 3(1+X^2)}{2X + 2(1-X^2) + 2(1+X^2)} \right] \left[\frac{dX}{X^2+1} \right] \\ &= \int \left[\frac{10X^2 + 10X - 4}{2X+4} \right] \left[\frac{dX}{X^2+1} \right] \\ &= \int \frac{5X^2 + 5X - 2}{(X+2)(X^2+1)} dX \end{aligned}$$

Como exercício, fica para o leitor o cálculo da última integral.

3. Resposta do outro exercício

4. (i) $\frac{\ln(3X^2+5)}{6} + C$ (ii) $\frac{X^2}{6} + \frac{\ln(3X^2+5)}{18} + C$ (iii) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2X}{3}\right) - \frac{5}{4}\ln(4X^2+9) + C$ (iv) $X^2 - 2X + 3\ln|X| - 4\ln|X+1| + C$ (v) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{X^2+2X}{X^2+2X+1}\right| + C$ (vi) $-\ln|X+2| + \frac{\ln(X^2+3)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) + C$

Conteúdo da vigésima primeira aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Industrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos