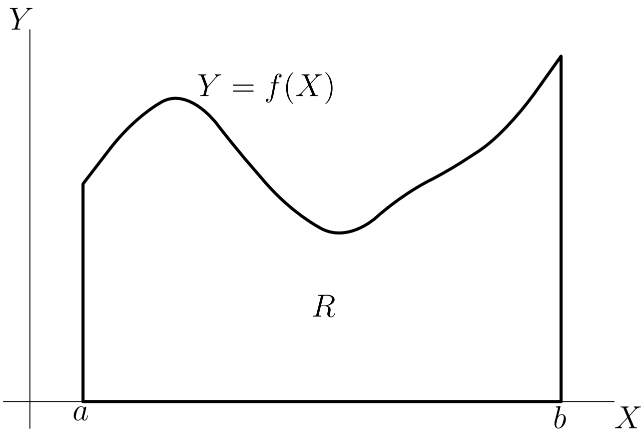
CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA SEXTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, definiremos a noção de integral definidada e mostraremos algumas de suas propriedades básicas — inclusive a sua interpretação geométrica. Finalizamos demonstrando o Teorema Fundamental do Cálculo.

1. A área de uma região limitada pelo gráfico de uma função

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Suponha que a função $f(X)$ seja contínua e positiva para todo X no intervalo $[a, b]$. Considere a região R limitada superiormente pelo gráfico de $f(X)$, isto é, pela curva $Y = f(X)$, lateralmente pelas retas verticais de equações $X = a$ e $X = b$, e inferiormente pelo eixo das abscissas. Veja a ilustração a seguir.



Como encontrar o valor da área de R, que será representada por A?

Nossa abordagem será similar a utilizada na aula anterior. Para um natural n, decompomos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos de igual comprimento. O tamanho ΔX de cada um destes intervalos será

$$\Delta X = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

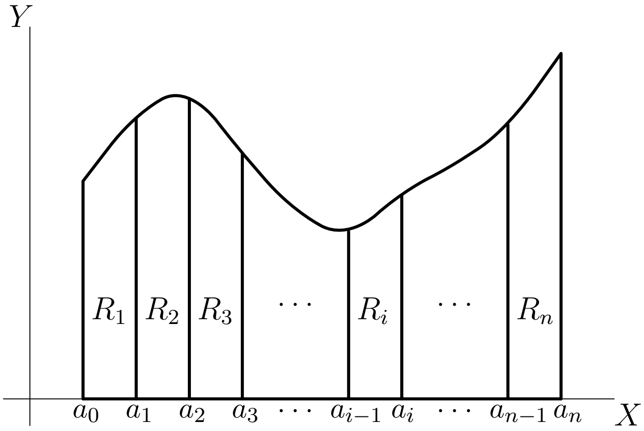
Para cada i pertencente ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$, seja

$$a_i = a + i\Delta X \tag{2}$$

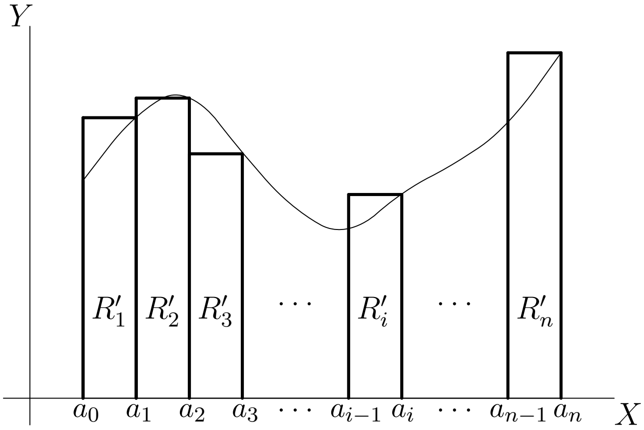
Note que $a_0 = a, a_n = b$ e que, ao percorrermos o intervalo $[a, b]$ da esquerda para a direita, o i-ésimo intervalo da decomposição será $[a_{i-1}, a_i]$.

As retas verticais de equações $X = a_1, X = a_2, \ldots, X = a_{n-1}$ fatiam R em n regiões. A i-ésima região que é encontrada, ao percorrermos R da esquerda para a direita, será denotada por R_i. Note que o intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ do eixo das abscissas é uma das fronteiras de R_i. Veja esta decomposição na figura seguinte.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.



Seja R'_i o retângulo que tem como lado inferior o intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ e lados laterais medindo $f(a_i)$. Estes retângulos estão representados na próxima figura.



Sejam A_i e A'_i as áreas de R_i e R'_i respectivamente. Caso n seja muito grande, R'_i é uma boa aproximação para R_i. Logo

(3) $$A'_i = f(a_i)\Delta X$$

é uma boa aproximação para A_i. Portanto,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

fica muito próximo de

$$\sum_{i=1}^{n} A'_i = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta X$$

Quanto maior o n melhor será esta aproximação. Conseqüentemente

(4) $$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta X$$

Usando (2), podemos reescrever esta identidade como

(5) $$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta X)\Delta X$$

Uma soma deste tipo é conhecida como **soma de Riemann**.

2. Justificando melhor as identidades (4) e (5)

Como $f(X)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a_{i-1}, a_i]$, $f(X)$ assume um valor mínimo e um valor máximo neste intervalo. Isto é, existem m_i e M_i pertencentes a $[a_{i-1}, a_i]$ tais que

$$f(m_i) \leq f(X) \leq f(M_i) \quad \text{para todo } X \text{ satisfazendo} \quad a_{i-1} \leq X \leq a_i \tag{6}$$

Sejam E_i e D_i retângulos tendo o intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ do eixo das abscissas como lado inferior e cujos lados laterais medem respectivamente $f(m_i)$ e $f(M_i)$. Note que

$$E_i \subseteq R_i \subseteq D_i \quad \text{e} \quad E_i \subseteq R'_i \subseteq D_i$$

Portanto,

$$f(m_i)\Delta X \leq A_i \leq f(M_i)\Delta X \quad \text{e} \quad f(m_i)\Delta X \leq A'_i \leq f(M_i)\Delta X$$

Fazendo a somatória para todos os valores de i, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X \leq \sum_{i=1}^{n} A'_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X$$

Ou seja, $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ e $\sum_{i=1}^{n} A'_i$ pertencem ao intervalo

$$I_n = \left[\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X, \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X\right]$$

Mostraremos que o comprimento deste interalo tende a 0 quando n tende a $+\infty$. Note que (4) segue deste fato.

O comprimento do intervalo I_n é igual a

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X - \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X = \sum_{i=1}^{n}[f(M_i) - f(m_i)]\Delta X$$

Existe um natural k tal que

$$f(M_k) - f(m_k) = \min_i\{f(M_i) - f(m_i)\}$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X - \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X \leq \sum_{i=1}^{n}[f(M_k) - f(m_k)]\Delta X = n[f(M_k) - f(m_k)]\Delta X$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X - \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X \leq [f(M_k) - f(m_k)][b - a]$$

Como $f(X)$ é contínua e M_k e m_k pertencem ao intervalo $[a_{k-1}, a_k]$ de comprimento ΔX, temos que $f(M_k) - f(m_k)$ tende a 0 quando ΔX tende a 0. Conseqüentemente

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X - \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X = 0$$

Isto é, o comprimento de I_n tende a 0 quando n tende a $+\infty$, como desejávamos mostrar.

Se R_i'' é um retângulo tendo o intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ do eixo das abscissas como lado inferior e cujos lados laterais medem respectivamente $f(x_i)$, para um x_i escolhido no intervalo $[a_{i-1}, a_i]$, então $E_i \subseteq R_i'' \subseteq D_i$. A área de R_i'', que é igual a $f(x_i)\Delta X$, fica limitada pelas áreas de E_i inferiormente e D_i superiormente, isto é,

$$f(m_i)\Delta X \leq f(x_i)\Delta X \leq f(M_i)\Delta X$$

Fazendo a somatória para todos os valores de i, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta X \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta X \leq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta X$$

e daí

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta X \tag{7}$$

Ao fazermos $x_i = a_i$ em (7) obtemos (4). Também temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta X)\Delta X = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta X$$

3. A integral definida

Dada função contínua $f(X)$ para todo X no intervalo $[a, b]$, com a e b números reais, definimos a **integral de $f(X)$ com relação a variável X entre a e b** e denotamos por

$$\int_a^b f(X)dX$$

como sendo

$$\int_a^b f(X)dX = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta X)\Delta X$$

onde $\Delta X = \frac{b-a}{n}$. Note que

$$\int_a^a f(X)dX = 0 \tag{8}$$

$$\int_a^b f(X)dX = -\int_b^a f(X)dX \tag{9}$$

$$\int_a^b f(X)dX = \int_a^c f(X)dX + \int_c^b f(X)dX \tag{10}$$

$$\int_a^b cf(X)dX = c\int_a^b f(X)dX \tag{11}$$

onde c é um número real. (Em (10), está implícito que $f(X)$ é contínua nos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$.)

Vamos interpretar geometricamente a integral definida

$$\int_a^b f(X)dX$$

Tendo em vista as identidades (8) e (9), faremos a análise apenas no caso em que $a < b$. Para simplificar a argumentação, vamos assumir que $f(X)$ possui um número finito de raízes no intervalo $[a, b]$. Digamos que $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ sejam as raízes de $f(X)$ neste intervalo, com $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_{n-1}$. Tome $r_0 = a$ e $r_n = b$. Aplicando a relação (10) repetidamente, chegamos a

$$\int_a^b f(X)dX = \sum_{i=1}^{n} \int_{r_{i-1}}^{r_i} f(X)dX \tag{12}$$

Por (5), quando $f(X)$ é não-negativa no intervalo $[r_{i-1}, r_i]$, temos que

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} f(X)dX$$

é igual a área da região limitada pelo eixo das abscissas, as retas verticais de equações $X = r_{i-1}$ e $X = r_i$ e o gráfico de $f(X)$. Quando $f(X)$ é não-positiva no intervalo $[r_{i-1}, r_i]$, por (11) para $c = -1$, temos que

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} f(X)dX = -\int_{r_{i-1}}^{r_i} -f(X)dX$$

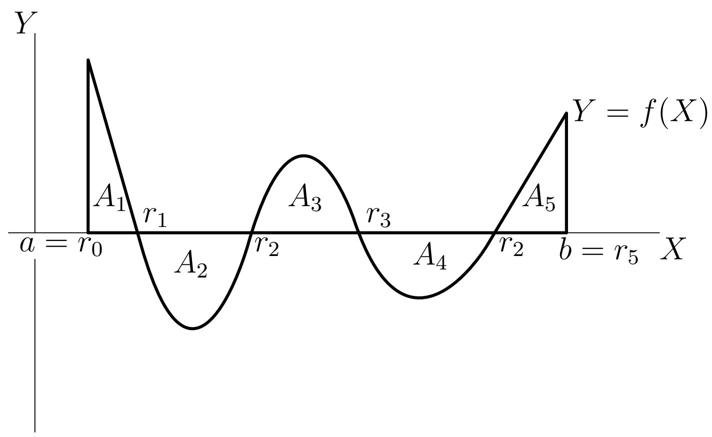
e, por (5),

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} -f(X)dX$$

é igual a área da região limitada pelo eixo das abscissas, as retas verticais de equações $X = r_{i-1}$ e $X = r_i$ e o gráfico de $f(X)$. (Note que $-f(X)$ é o simétrico de $f(X)$ com respeito ao eixo das abscissas.) Logo

$$\int_a^b f(X)dX$$

é igual a soma das áreas das regiões que estão limitadas pelo eixo das abscissas, as retas verticais $X = a$ e $X = b$ e o gráfico de $f(X)$ que ficam acima do eixo das abscissas menos a soma das áreas das que ficam abaixo. Veja a figura a seguir.



Se A_i denota o valor da área da região limitada pelas retas verticais de equações $X = r_{i-1}$ e $X = r_i$, pelo eixo das abscissas e pelo gráfico de $f(X)$, então

$$\int_a^b f(X)dX = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

Na aula anterior, estabelecemos que

$$\int_0^1 X^2 dX = \frac{1}{3}$$

O cálculo desta integral, que é igual ao valor da área limitada pela parábola de equação $Y = X^2$ e pelas retas de equações $X = 1$ e $Y = 0$, foi muito complexo. Na próixima seção apresentaremos um resultado que permite realizar este cálculo sem muito esforço.

4. O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Iniciamos esta parte da aula enunciando o TFC:

Teorema 1. *Se $f(X)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, para números reais a e b, então*

$$\int_a^b f(X)dX = F(b) - F(a)$$

para qualquer função $F(X)$ tal que $F'(X) = f(X)$ para todo X no intervalo $[a, b]$. Mais ainda, tal função $F(X)$ existe.

Considere a seguinte função $F(X)$ definida para todo X no intervalo $[a, b]$:

$$F(X) = \int_a^X f(t)dt$$

Para evitar confusão, usa-se uma variável diferente para a função que está sendo integrada, no caso f, da que é usada para delimitar o intervalo de integração, que é $[a, X]$. Vamos estabelecer que

$$F'(X) = f(X) \tag{13}$$

para todo X em $[a, b]$. Por definição,

$$F'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h} \tag{14}$$

Tome h de forma que $X + h$ esteja contido em $[a, b]$. Neste caso nos extremos deste intervalo, isto é, para $X = a$ e $X = b$, (13) será verificada apenas para a derivada lateral respectivamente pela esquerda e pela direita. Por (10),

$$F(X+h) - F(X) = \int_X^{X+h} f(t)dt \tag{15}$$

Vamos assumir que $h > 0$. No caso em que $h < 0$, o argumento é similar. Destacaremos as adaptações que necessitam ser feitas. Como $f(t)$ é contínua no intervalo $[X, X + h]$, existem m e M neste intervalo tais que

$$f(m) \leq f(t) \leq f(M) \quad \text{para todo } t \text{ satisfazendo} \quad X \leq t \leq X + h$$

Portanto,

$$f(m)h \leq \int_X^{X+h} f(t)dt \leq f(M)h$$

No caso em que $f(t)$ é sempre positiva no intervalo $[X, X + h]$, esta desigualdade é uma desigualdade entre áreas. (Quando $h < 0$, estas desigualdades são invertidas.) Por (15)

$$f(m)h \leq F(X+h) - F(X) \leq f(M)h$$

Ao dividirmos por h, obtemos que

$$f(m) \leq \frac{F(X+h) - F(X)}{h} \leq f(M)$$

(Quando $h < 0$, as disigualdade invertem quando dividimos por h e chegamos a exatamentente esta expressão.) Ao aproximarmos h de 0, temos que $f(m)$ e $f(M)$ se aproximam de $f(X)$. Conseqüentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = f(X)$$

e (13) segue. Portanto, contruímos uma função F cuja derivada conincide com f.

Seja $G(X)$ uma outra função tal que $G'(X) = f(X)$ para todo X no intervalo $[a, b]$. Se

$$a(X) = G(X) - F(X)$$

então

$$a'(X) = G'(X) - F'(X) = f(X) - f(X) = 0$$

para todo X no intervalo $[a, b]$. Portanto $a(X)$ é constante neste intervalo, digamos igual a C. Logo

$$G(X) = F(X) + C$$

para todo X em $[a, b]$. Note que

$$G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b f(t)dt$$

não depende da função cuja derivada coincide com f no intervalo $[a, b]$ e seu valor é a integral que desejamos calcular, isto é, a $\int_a^b f(X)dX$. O TFC segue.

Vamos utilizar o TFC para calcular a seguinte integral, que foi calculada na aula passada. Temos que

$$\int_0^1 X^2 dX = \left.\frac{X^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

A barra vertical com os valores 0, na parte inferior direita, e 1, na parte superior direita, indica que devemos substituir na função que está a esquerda primeiro o valor da parte superior direita, que é 1, e depois subtrair do valor obtido ao substituírmos na função o valor que encontra-se no parte inferior direita, que é o 0. É muito mais simples calcular a área desta forma.

Quando da definição do logaritmo neperiano, afirmamos que existia uma única função $f(X)$, definida para todo número real positivo X, tal que

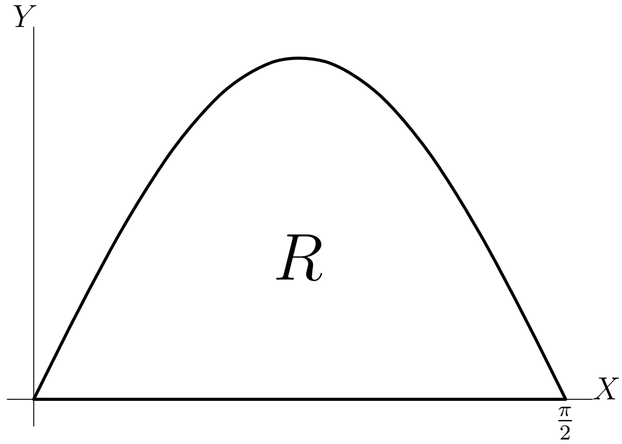
$$f'(X) = \frac{1}{X}$$

e $f(1) = 0$. Pelo TFC, esta função existe e é dada por

$$f(X) = \int_1^X \frac{1}{t} dt$$

Exemplo 2. *Calcule a área da região R limitada superiormente pelo gráfico da função $f(X) = \operatorname{sen}(2X)$, quando X percorre o intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e inferiormente pelo eixo das abscissas.*

A região R é ilustrada na figura a seguir.



A área de R é igual a seguinte integral definida:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2X)dx = -\frac{\cos(2X)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos(\pi)}{2} - \left[-\frac{\cos(0)}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Exemplo 3. *Calcule a seguinte integral:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX$$

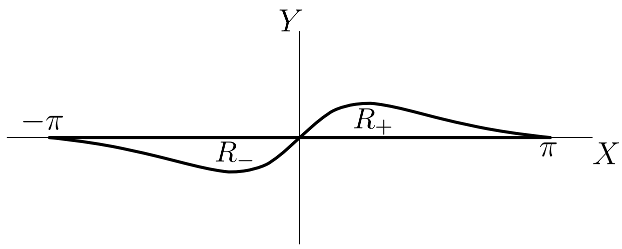
Note que a função dada pela seguinte expressão é ímpar:

$$f(X) = \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1}$$

Considere as seguintes regiões do plano, ilustradas na figura seguinte:

R_+ é limitada superiormente pelo gráfico de $f(X)$, quando X percorre o intervalo $[0,\pi]$, e inferiormente pelo eixo das abscissas; e

R_- é limitada inferiormente pelo gráfico de $f(X)$, quando X percorre o intervalo $[-\pi,0]$, e superiormente pelo eixo das abscissas.



Como $f(X)$ é ímpar, R_+ é a simétrica de R_- com relação a origem. Portanto, R_+ e R_- possuem a mesma área A que é dada respectivamente por

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX \quad \text{e} \quad -\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX$$

Conseqüentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX = \int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX + \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} X}{X^2+1} dX = -A + A = 0$$

Exercício 4. *Calcule cada uma das seguintes integrais definidas:*

(i)
$$\int_{-1}^{2} X^2 + X + 1dX$$
(ii)
$$\int_{1}^{e} \frac{1}{X}dX$$
(iii)
$$\int_{0}^{1} X^n dX$$
(iv)
$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} X}{X^4 + \cos^3 X}dX$$
(v)
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+X^2}dX$$
(vi)
$$\int_{0}^{1} \sqrt{1+3X}dX$$

Exercício 5. *Encontre a área limitada pelas parábolas de equações* $Y = 3 - X^2$ *e* $Y = X^2 + 1$.

5. Respostas dos exercícios

4. (i) $\frac{15}{2}$ (ii) 1 (iii) $\frac{1}{n+1}$ (iv) 0 (v) $\frac{\pi}{4}$ (vi) $\frac{14}{9}$ **5.** $\frac{8}{3}$

Conteúdo da décima sexta aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos