

A Projeção Geodésica de Gauss e as Coordenadas UTM

Jürgen Philips, Florianópolis SC

1	Projeções Cartográficas e Geodésicas conformes	2
1.1	A Figura da Terra e as 'Coordenadas Geográficas'	2
1.2	C.F. Gauss e a Projeção Transversal de Mercator	5
1.3	Os Sistemas Gauss-Krüger e UTM no Brasil	8
1.4	As Deformações projetivas das Coordenadas UTM	8
1.5	A Precisão numérica das Fórmulas de Cálculo	9
2	Cálculo de Coordenadas da Projeção de Gauss	9
2.1	As Coordenadas y, x	11
2.2	A Convergência meridiana	11
2.3	O Fator de Escala m	12
2.4	As Coordenadas Gauss-Krüger e UTM	12
2.5	Exemplo numérico	13
3	Transformação entre Coordenadas Gauss e Coordenadas Geográficas	14
3.1	As Coordenadas de Partida Gauss-Krüger e UTM	14
3.2	As Coordenadas geográficas L, B	14
3.3	A Convergência Meridiana	15
3.4	O Fator de Escala m	15
3.5	Exemplo numérico	16
4	Transformações de Coordenadas-Gauss entre Fusos	17
4.1	Fórmulas de Cálculo: Sistema Oeste para o Sistema Leste	17
4.2	Fórmulas de Cálculo: Sistema Leste para o Sistema Oeste	18
5	A Redução de Distâncias e Áreas	19
6	Bibliografia	21

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Philips
Universidade Federal de Santa Catarina
Depto. Engenharia Civil - Ciências Geodésicas
88040-900 Florianópolis SC
E-Mail: philips@ecv.ufsc.br

1 Projeções Cartográficas e Geodésicas conformes

A figura física da nossa terra, o Geóide, é uma superfície com curvatura irregular em cada ponto, e, devido a este fato, ela é bastante inconveniente para ser projetada em cartas e mapas planos. Desde o *Mapa Mundi* de Ptolomeu (*~100 d.C., † 178), usa-se o globo esférico como modelo matematicamente bem definido para localizar posições de pontos e lugares da superfície terrestre.

Devido a esta simplificação da figura da terra, foram criadas uma grande série das mais diversas projeções cartográficas com diferentes características. Estas projeções têm em comum o fato, de que todas usam o globo esférico como modelo matemático para a nossa terra -pois o erro no produto final cartográfico, causado pela simplificação da forma esférica da terra, geralmente é menor do que a precisão gráfica da carta especialmente em escalas médias e pequenas.

Para as cartas em escalas grandes, como a carta do cadastro imobiliário, ou, ainda mais importante, para um sistema de referência de coordenadas para representações digitais, precisa-se de uma aproximação mais exata do que o modelo esférico da terra.

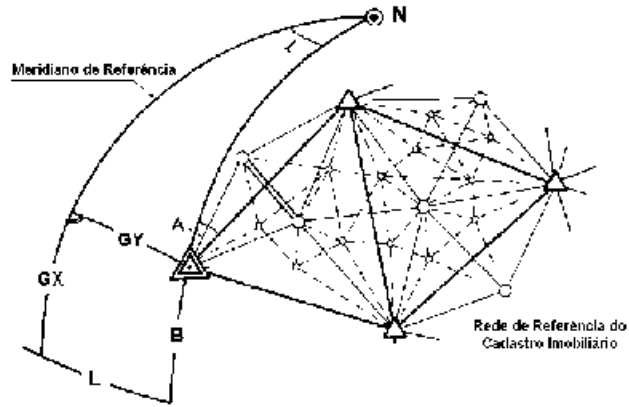


Figura: Projeção geodésica amarrando a Rede de Referência Cadastral

1.1 A Figura da Terra e as ‘Coordenadas Geográficas’

Para representar a superfície física da terra através de medições (distâncias, ângulos, altitudes etc.) precisa-se de referências geométricas bem definidas, como eixos e superfícies fixas. Na cartografia, como também nas outras disciplinas geodésicas usa-se para este fim, em primeira aproximação, uma esfera rotativa com três eixos x,y,z, ou dois ângulos, a longitude L (λ) e a latitude B (ϕ).

Durante três séculos da história da Geodésia científica, a pergunta principal era, como com provar a hipótese de Newton e de Huygens, que a forma ‘verdadeira’ da terra é o elipsóide de rotação.

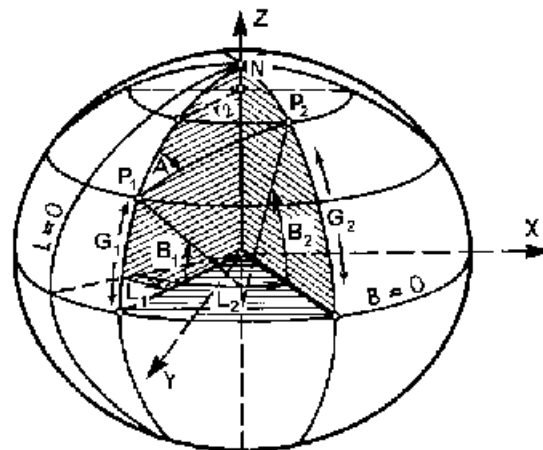


Figura.: Sistema de Coordenadas Geográficas

1) **História** O elipsóide de rotação, achatado nos polos, foi definido por Newton em 1687, à base da sua hipótese de gravitação, e por Huygens 1690, à base da teoria cartesiana do redemoinho. A forma de um elipsóide combinou também com algumas observações, antes inexplicáveis, p.e. o atraso de um relógio pendular em Cayenne, calibrado em Paris,

Através de medições geodésicas, astronômicas e gravimétricas, foram determinadas uma série de diferentes elipsóides. Alguns países adotaram um elipsóide específico com uma ótima aproximação ao geóide regional daquele país. A tendência hoje, é o uso de elipsóides globais, recomendados pela 'International Union of Geodesy and Geophysics' (IUGG; o último elipsóide recomendado é de 1980).

As constantes do elipsóide, por definição, com as fórmulas de cálculo são (veja *Chödlbauer* [47], p.1; *Großmann* [50], p.3-4; *Helmert* [7], p.37-38; *Jordan-Eggert-Kneißl* [40] p. 35-37):

a.) Eixo grande : a

b.) Eixo pequeno : b

c.) Raio da curvatura polar $r = \frac{a^2}{b}$

d.) Achatamento : $f = \frac{a - b}{a}$

e.) O quadrado da primeira excentricidade numérica² $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

f.) O quadrado da segunda excentricidade numérica² $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

g.) A Longitude Geográfica: L

h.) A Latitude Geográfica: B

i.) O comprimento G do meridiano (arco elíptico da linha do equador até um ponto P) à base da latitude geográfica B pode-se calcular com

Elipsóide	País
Bessel:	Alemanha, Áustria, Suíça, Países Baixos, Noruega, Suécia, Japão
Krassowsky:	Países do antigo 'Bloco de Varsóvia'
Hayford:	OTAN
Clarke 1:	USA, Canadá
Clarke 2:	Grã Bretanha, França
IAG67:	Austrália, Índia, Brasil

Tabela: Elipsóides oficiais em alguns países

observado por *J. Richter* em 1672, ou o fato do *pêndulo do segundo*, cujo comprimento aumenta aproximando-se na linha do equador. A 'Académie des sciences' de Paris mandou realizar medições de arco meridiano em duas diferentes latitudes do globo, uma (1735-45 e 1751) por *P. Bouguer* e *Ch.M. de La Condamine* no norte do Peru (hoje Equador), e outra 1736/37 na Finlândia, por *P.L. Maupertius*, *A.C. Clairaut* e *A. Celsius*. Estas medições tinham como único objetivo a confirmação da tese de *Newton* e *Huygens*, aplicando os últimos conhecimentos da astronomia e os métodos mais modernos de medição e retificação da época como constantes astronômicas aperfeiçoadas (precessão, aberração da luz, refração atmosférica) nutação do eixo terrestre, medição da constante de gravitação com pêndulos, e a correção do desvio do prumo, observado pela primeira vez em 1738 por *P. Bouguer* nas medições no Chimborasso (Equador). Junto com a re-edição de *Paris* por *Cassini de Thury* e *N.L. de La Caille*, a retificação das observações confirmou o achatamento do globo terrestre e com isso o elipsóide de rotação como figura matemática e primeira aproximação à geometria da terra. Em 1743 *Clairaut* publicou os resultados na sua obra clássica sobre a Geodésia. Nos anos seguintes, a base teórica da Geodésia foi aperfeiçoada, em primeiro lugar por *Alembert* ('Determinação do Achatamento da Terra através da Precessão e Nutação') e também por *Laplace*, que determinou o achatamento somente através de observações do movimento da lua, considerando a variação da densidade da terra. O desenvolvimento *Calculo de Probabilidades* (*Laplace*, 1818) e do 'Método dos Mínimos Quadrados' (*C.F. Gauss*, 1809) aperfeiçoou a retificação de observações e melhorou os resultados das triangulações. O século 19 iniciou com o descobrimento de *Laplace*, que a figura física da terra é diferente do elipsóide de rotação, comprovado pela observação de desvios do prumo, como diferenças entre latitudes astronômicas e geodésicas. Em 1873, *J.B. Listings* usou pela primeira vez o nome 'Geóide' para a figura física da terra. O resto do século 19 foi marcado pelos grandes trabalhos das 'medições de arco meridiano' dos geodestas junto com os astrônomos, para determinar os parâmetros daquele elipsóide que tivesse a melhor aproximação com a terra física, o geóide. Os elipsóides mais importantes da época eram os de *Bessel* (1841) e de *Clarke* (1886 e 1880).

²) segundo *Jordan/Eggert/Kneißl* [40, pag.75-94]

$$G = E_0 \cdot B + E_2 \cdot \text{sen}(2B) + E_4 \cdot \text{sen}(4B) + E_6 \cdot \text{sen}(6B) \quad (1)$$

Sendo:

$$E_0 = \frac{c}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-2} + \frac{45}{64} \cdot e^{-4} - \frac{175}{256} \cdot e^{-6} + \frac{11025}{16384} \cdot e^{-8} \right)$$

$$E_2 = c \cdot \left(-\frac{3}{8} \cdot e^{-2} + \frac{15}{32} \cdot e^{-4} - \frac{525}{1024} \cdot e^{-6} + \frac{2205}{4096} \cdot e^{-8} \right)$$

$$E_4 = c \cdot \left(+\frac{15}{256} \cdot e^{-4} - \frac{105}{1024} \cdot e^{-6} + \frac{2205}{16384} \cdot e^{-8} \right)$$

$$E_6 = c \cdot \left(-\frac{35}{3072} \cdot e^{-6} + \frac{315}{12288} \cdot e^{-8} \right)$$

$c = \text{raio (da curvatura polar)}$

$e^{-2} \cdot \cos^2 B = \text{Quadrado da 2ª excentricidade numérica do elipsóide de referência}$

$$\varrho = \frac{180^\circ}{\pi}$$

j.) A latitude geográfica B pode ser calculada à base do comprimento G do meridiano,

$$B = \sigma + F_2 \cdot \text{sen}(2\sigma) + F_4 \cdot \text{sen}(4\sigma) + F_6 \cdot \text{sen}(6\sigma) \quad (2)$$

sendo:

$$\sigma = \frac{G}{E_0}$$

$$E_0 = \frac{c}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-2} + \frac{45}{64} \cdot e^{-4} - \frac{175}{256} \cdot e^{-6} + \frac{11025}{16384} \cdot e^{-8} \right)$$

$$F_2 = \sigma \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot e^{-2} - \frac{3}{16} \cdot e^{-4} + \frac{213}{2048} \cdot e^{-6} - \frac{255}{4096} \cdot e^{-8} \right)$$

$$F_4 = \sigma \cdot \left(+\frac{21}{256} \cdot e^{-4} - \frac{21}{256} \cdot e^{-6} + \frac{533}{8192} \cdot e^{-8} \right)$$

$$F_6 = \sigma \cdot \left(\frac{151}{6144} \cdot e^{-6} - \frac{453}{12288} \cdot e^{-8} \right)$$

Os parâmetros de alguns elipsóides são:

	Bessel 1841	Hayford 1909	Krassowsky 1940	IAG67 1967
a	6 377 397,155 m	6 378 388 m	6 378 245 m	6 378 160 m
b	6 356 078,963 m	6 356 911,946 m	6 356 863,019 m	6 356 774,504 m
c	6 398 786,849 m	6 399 936,608 m	6 399 698,902 m	6 399 617,442 m
f	1 : 299,15281	1 : 297	1 : 299,3	1 : 298,247
e2	0,006 674 372	0,006 722 670	0,006 693 422	0,006 694 609

	Bessel 1841	Hayford 1909	Krassowsky 1940	IAG67 1967
e'2	0,006 719 219	0,006 768 170	0,006 738 525	0,006 739 729
n	0,001 674 184 8	0,001 686 340 7	0,001 678 979 2	0,001 679 278

O elipsóide recomendado em 1967, pela 'Comissão Internacional de Geodésia e Geofísica' (IUGG), como referência para medições e projeções geodésicas e cartográficas, foi adotado como elipsóide oficial para a Cartografia Brasileira (IAG67 da tabela).

1.2 C.F. Gauss³ e a Projeção Transversal de Mercator

Para a descrição numérica de pontos no plano, usa-se sistemas de referência (sistemas de coordenadas) - em primeiro lugar, o sistema cartesiano com dois eixos ortogonais, a *abscissa* e a *ordenada*. Qualquer ponto deste plano pode ser localizado através de um par x,y de números. Toda a *geometria analítica* e a *teoria de funções* está baseada neste sistema.

Para um objeto esférico ou elipsoidal, como a nossa terra, temos geralmente um sistema de coordenadas, chamado '*coordenadas geográficas*', onde dois ângulos (ϕ, λ na esfera, ϕ, λ^5 no elipsóide) definem a posição de um ponto na superfície (esférica ou elipsoidal).

³) **Gauss, Carl Friedrich**, [original alemão: Gauß] (*30.4.17 77 em Braunschweig, † 23.2.1855 em Göttingen), matemático, físico, astrônomo e geodesta alemão. Gauss é um dos matemáticos mais importantes da história, intitulado *Princeps mathematicorum*, deixou trabalhos importantes em várias disciplinas matemáticas e em outras ciências, com uma grande preocupação com a utilidade prática das teorias desenvolvidas. Gauss formou-se em 1795-98 na Universidade de Göttingen como uma bolsa de estudos do Duque de Braunschweig, em 1801 Gauss publicou sua *Disquisitiones arithmeticae*, que é considerado como o maior avanço progressivo na matemática desde a época da Grécia antiga. A publicação mais importante entre os trabalhos astronômicos foi a



Carl Friedrich Gauss na nota alemã de '10 Marcos' com a 'campana de Gauss' da Distribuição Normal na frente é a 'Triângulação de Hannover' no verso.

'*Theoria motus corporum coelestium*' de 1809, onde Gauss desenvolveu também o '*método dos mínimos quadrados*' para o ajustamento de erros de observações. A partir de 1816, Gauss trabalhou também em levantamentos topográficos e trigonométricos do reinado de Hannover inventou o heliotropo, um espelho solar para marcar pontos de triangulação, e aplicou o '*método dos mínimos quadrados*' para a compensação dos erros de medição dos cálculos das redes de triangulação, e desenvolveu métodos para o cálculo das projeções cartográficas, *Projeção Gauss-Krüger*. Para o cálculo simples de áreas, usando as coordenadas dos pontos limites, Gauss desenvolveu a *Fórmula de área de Gauss*. Além de outros trabalhos fundamentais na ótica, mecânica, física geométrica, Gauss trabalhou na Geodésia desenvolvendo as fórmulas básicas da *teoria de potencial* e da *geometria diferencial de superfícies curvas*, publicado em 1827 na sua *Disquisitiones circa superficies curvas*, que permitiu o cálculo de ângulos e distâncias na superfície do elipsóide terrestre.

Lit.: [1] Dieudonné,J.: L'œuvre mathématique de Carl Friedrich Gauss, Paris 1962 - Dunnington,G.W.: Carl Friedrich Gauss, titan of science, New York 1955

⁴) termo derivado ao matemático francês René Descartes (*1596, †1650),

⁵) Os símbolos usados não são unificados e diferem entre os distintos autores. Para ter compatibilidade com a literatura da Geodésia Matemática internacional, aqui a *latitude* elipsoidal é L e sua *Latitude* é B .

Para ter uma ligação entre as coordenadas geográficas, determinadas com métodos astronômicos, e as coordenadas planas (cartesianas), existe uma série das mais diversas transformações (projeções); em primeiro lugar, usadas para projeções cartográficas. Todas estas projeções têm como fundamento, que não é possível projetar uma superfície curva em um plano sem deformar a geometria do original. Em consequência deste fato existem diversas projeções para os diferentes usos.

Foi o flamengo Gerhard Kremer mais conhecido como 'Mercator', quem publicou o primeiro mapa de uma projeção 'conforme' da terra esférica em um cilindro com orientação transversal, onde os ângulos tinham o mesmo valor no original esférico, assim como na projeção plana da carta. A utilidade prática era, em primeiro lugar, navegação nos mares.

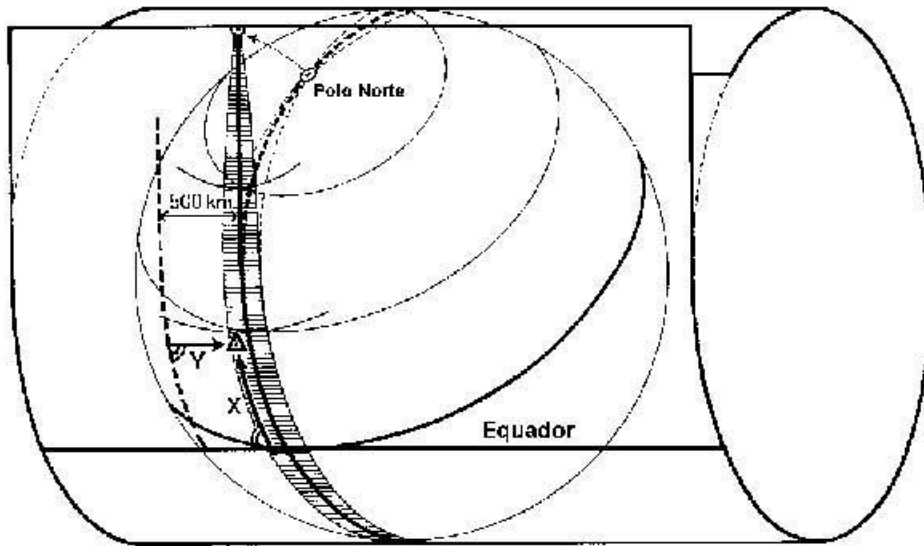


Figura: A projeção conforme de Gauss

⁶⁾ **Mercator, Gerardus** (Gerhard Kremer, *5.3.1512 em Rumpelmonde/Flândria, †2.12.1594 em Duisburg), flamengo alemão,

geógrafo e cartógrafo mais famoso da época do renascimento, formação em filosofia e matemática nas Universidades de Herzogenbusch e Löwen, aluno de *Gondala Frisius*. Obras: 1537 mapa da Palestina, 1538 primeiro mapa mundi, 1540 mapa da Flandria, 1540 globo terrestre e 1551 globo celeste para o imperador Carlos V., 1552 novo domicílio em Duisburg, intitulado como 'cosmógrafo' pelo Duque de Jülich, 1554 mapa da Europa em 15 folhas, 1569 a obra mais famosa de M., o mapa mundi em 18 folhas com a Projeção de Mercator, ele mesmo declarou essa projeção como *Novâ et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium accomodata*, 1578 (2ª Ed. 1584) mapas antigos de Ptolomeu em 27 folhas, 1585 edição das primeiras (51) folhas do *Atlas Moderno*; o filho de M., Rumold M., terminou o atlas com 107 folhas em 1595. Na época dos grandes navegadores das conquistas de novos continentes, as oficinas cartográficas de M. em Duisburg eram reconhecidas como o 'centro mundial do saber geográfico' e M. era titulado como *ingenio dexter, dexter et ipse manu*'.

Lit.: DURME, M. VON: *Correspondence Mercatorienne*; Antuérpia 1959 - *Gerhard Mercator 1512 bis 1594 zum 450. Geburtstag*, Duisburger Forsch. VI, Duisburg 1962.



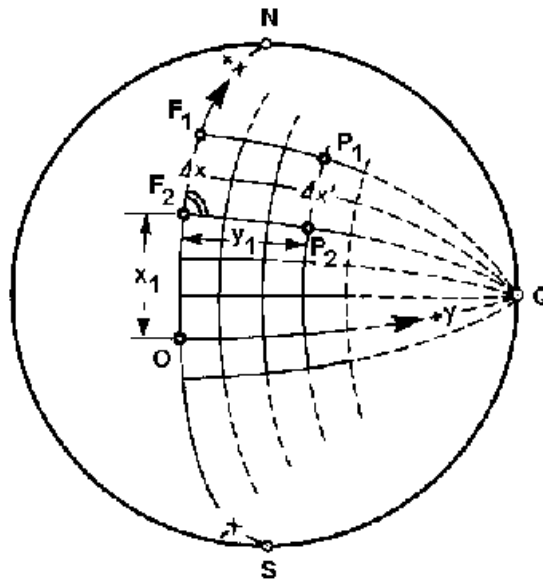
Gerardus Mercator, quadro do ano 1574

⁷⁾ Autor verdadeiro da *Projeção de Mercator*, antes de Mercator, foi *Erhard Etzlaub*, (*1460, †1532), Astrônomo e cartógrafo alemão de Nuremberg.

Desde os trabalhos de Gauss também temos as fórmulas para a projeção analítica do elipsóide, como no caso de Mercator, em um cilindro com orientação transversal. A característica mais importante da 'projeção de Gauss' é a 'conformidade', que é garantida apenas em partes diferenciais, ou, segundo Gauss, 'em pequenas partes'.

Aplicando a 'projeção conforme de Gauss', temos um segundo sistema de referência de coordenadas que nos permite também, como no caso das coordenadas geográficas, descrever numericamente a posição dos pontos na superfície elipsoidal da terra. Estas coordenadas são cartesianas, também com dois eixos ortogonais, a *ordenada y* (orientada ao leste) e *abscissa x* (orientada ao norte).

Como em todos os casos da projeção de uma superfície curva em um plano, também no caso da projeção conforme de Gauss, temos deformações de comprimentos. Para o meridiano tangente da projeção, esta deformação é zero - mas, quanto maior a distância de um ponto do meridiano tangente, aumenta-se também a deformação do comprimento. Devido a este fato, L. Krüger limitou a projeção de Gauss a um fuso de 3° (1°30' a ambos os lados do meridiano central), e desta maneira limitou também a deformação dos comprimentos a valores aceitáveis.



Deste modo, qualquer ponto da superfície elíptica da terra pode ser localizado através de um par *y, x* de números. Sem modificação alguma, todas as fórmulas matemáticas da trigonometria plana e da geometria analítica podem ser aplicadas.

As equações entre as 'Coordenadas Geográficas' (elipsóidais) e as 'Coordenadas Gauss' (planas) segundo Großmann [50] são:

Coordenadas 'Gauss' na superfície do elipsóide

$$x = G + \frac{N}{2} t \cos^2 B \left(\frac{l}{\rho}\right)^2 + \frac{N}{24} t \cos^4 B (5 - t^2 + 9\eta^2) \left(\frac{l}{\rho}\right)^4 + \dots$$

$$y = N \cos B \frac{l}{\rho} + \frac{N}{6} \cos^3 B (1 - t^2 - \eta^2) \left(\frac{l}{\rho}\right)^3 + \frac{N}{120} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4) \left(\frac{l}{\rho}\right)^5 + \dots$$

com

$$l = L - L_0 \text{ (meridiano - meridiano central)}$$

$$t = \tan B, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B, \quad e'^2 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

N = raio da curvatura transversal, *G* = comprimento do arco meridional
a, b = raio maior e menor do elipsóide

1.3 Os Sistemas Gauss-Krüger e UTM no Brasil

Devido as vantagens geométricas da projeção de Gauss, principalmente pela conformidade, o Brasil foi um dos primeiros países a adotar diversas variações desta projeção; em primeiro lugar, para a representação do território em cartas e mapas.

1903 : ‘Projeção Poliédrica’

A ‘Comissão da Carta Geral do Brasil’ adotou em 1903, uma projeção cartográfica, na qual, a figura da terra era simplificada como esférica, onde cada folha era a projeção, em escala menor, da superfície da esfera em um plano, tangente no centro da área projetada.

1932 : Projeção ‘Gauss-Krüger’ - com fusos de 3°

Cinco anos após à Alemanha ‘Serviço Geográfico do Exército’ (SGE) também adotou o sistema Gauss-Krüger com fusos de 3° e fator de escala $m=1.0$ no meridiano central.

1943 : Projeção ‘Gauss-Krüger’ - com fusos de 6°

O geodesta francês *Pierre Tardi* apresentou em 1938 à IUGG uma projeção ‘Gauss-Krüger modificada’ com dois meridianos secantes em vez de um meridiano tangente. Deste modo, o fuso podia ser ampliado em até 6°, sem aumentar a escala nos bordos do fuso.

Em 1943, o SGE adotou a proposta de Tardi como nova norma para a cartografia brasileira, com 7 fusos para o território continental do país.

1955 : O sistema UTM

A IUGG recomendou a proposta de Tardi, denominada ‘*Universal Transverse Mercator*’ (UTM), apenas modificando o valor de redução da escala e a simbologia dos eixos.

Desde 1955, a Cartografia Brasileira usa o sistema UTM para o mapeamento sistemático do país.

1.4 As Deformações projetivas das Coordenadas UTM

O sistema UTM é uma projeção geodésica, que foi recomendada pela IUGG, em primeiro lugar, para a cartografia em pequenas e médias escalas. Para esta finalidade, a Cartografia Brasileira adotou o sistema UTM no ano 1955, principalmente para o mapeamento sistemático do país. Aplicando esta projeção no mapeamento em escalas grandes, por exemplo 1:1000, caso da ‘Carta do Cadastro Imobiliário’, deve-se contar com maiores deformações projetivas que podem chegar a valores de até 1 metro por Kilômetro (ou de 2000m² para áreas de 1km²).

Estas deformações não são constantes: seu valor é zero no meridiano central de cada fuso, enquanto que no canto do fuso ($L_{\pm 3^\circ}$), a deformação é máxima. Fusos largos, então, têm deformações maiores do que sistemas com fusos estreitos.

Históricamente, a primeira aplicação da projeção UTM foram as cartas militares da OTAN com concentração na Europa central na faixa entre 50° a 60°. Nesta faixa, conta-se com um máximo entre +16,7cm/ km (canto do

⁸⁾ em 1927, a projeção Gauss-Krüger foi legalmente adotada na Alemanha como único sistema de referência, em todo território do país, tanto para a confecção das cartas do cadastro imobiliário, como também para as coordenadas dos pontos do sistema de referência de medições (Coordenadas Gauss-Krüger).

fuso) e -5,7 cm/km (centro). Nas latitudes do Brasil, devido às distâncias maiores entre os meridianos centrais dos fusos, a mesma projeção UTM tem deformações com valores entre 63,3 cm/km (latitude de Porto Alegre) e 98 cm/km (Belém) nos dois cantos de cada fuso.

Deve-se considerar também, que a projeção geodésica para o Cadastro Imobiliário também é usada como referência para a representação numérica ou digital de todos os objetos acima e abaixo da superfície terrestre - por exemplo, para os *Modelos Digitais de Terreno*, o Geoprocessamento ou para projetos digitais de engenharia (rodovias, barragens, linhas de transmissão de energia, etc.). Para estas representações numéricas precisam-se de uma projeção com um mínimo de deformação projetiva e com um máximo de aproximação do sistema de coordenadas na superfície 'real' da terra.

Projeção fuso escala	UTM ±6° 9996	G.-K. ±3° 10
Latitude	k [cm/km]	k [cm/km]
0°	98,1	20,9
10°	93,9	20,2
20°	81,8	18,4
30°	63,3	15,6
40°	40,7	12,2
50°	16,7	8,6
60°	-5,7	5,2
70°	-24	2,4

Tabela : Deformação k em centímetros/km no cantos dos fusos

1.5 A Precisão numérica das Fórmulas de Cálculo

As fórmulas, aplicadas ao território brasileiro até uma latitude de aproximadamente 50°, garantem as seguintes precisões para a projeção UTM:

Coordenadas planas através de coordenadas geográficas.....	±0.1 mm
Coordenadas geográficas através de coordenadas planas.....	±0.00 00 3"
Convergência meridiana.....	±0.00 1"
Fator de escala.....	±0.000 000 1

Estas precisões são 'precisões de cálculo numérico', causadas pela limitação aos elementos relevantes do desenvolvimento das fórmulas de projeção, e não devem ser confundidas com a precisão das medições, precisão da determinação de pontos, erros no modelo matemático, etc. Geralmente, na geodésia, a precisão do cálculo deve superar a precisão das medições, no mínimo com um fator 10, e ainda melhor com 100.

2 Cálculo de Coordenadas da Projeção de Gauss

Gauss, e também os autores modernos da projeção Gauss, usam o 'sistema geodésico' de coordenadas, onde o eixo são trocados (sistema y,x) em comparação com o sistema geralmente usado na geometria analítica (sistema x,y). Na literatura internacional, em algumas publicações, também é usado o sistema matemático.

⁹⁾ Recomenda-se verificar em cada fonte de literatura sobre projeções geodésicas, qual é o sistema de eixos (y,x) ou (x,y), e qual é a orientação do azimut t.

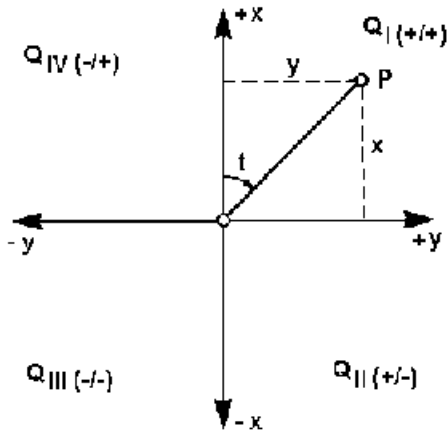


Figura : Sistema de coordenadas y,x

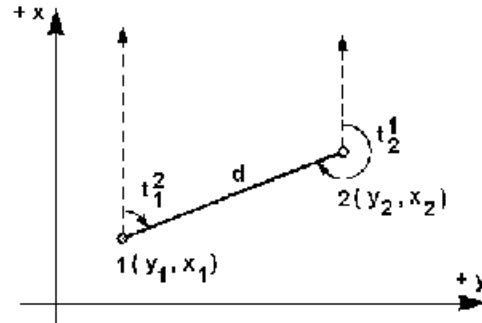


Figura : Distância no sistema y,x

Esta ‘troca de eixos’ dos sistemas geodésicos de coordenadas têm três justificativas:

1. A orientação positiva da rotação (leitura) das direções dos teodolitos é oposta à direção do ângulo definido na matemática. Enquanto o teodolito ‘mede’ os ângulos em ‘sentido horário’, na matemática a orientação é ‘anti-horária’.
2. O azimut t é definido, na matemática, como o ângulo entre o eixo x (positivo), na direção rotativa ao eixo y (positivo). Na geodésia, o azimut é a diferença entre a direção ‘Norte’ e a direção entre dois pontos, em ‘sentido horário’.
3. Todas as fórmulas da geometria analítica podem ser usadas, sem modificação alguma, para todos os cálculos geodésicos. Por exemplo, calcula-se o azimut entre dois pontos com:

$$t_1^2 = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

As fórmulas básicas são suficientemente desenvolvidas na literatura clássica de Geodésia Matemática’, especialmente nas monografias de Krüger [10, 11], Hristow [25], Hubeny [32] assim como nos livros de Großmann [50] e de Jordan/Eggert/Kneissl [40].¹⁰

O presente desenvolvimento é baseado, em primeiro lugar, nas fórmulas de Schödlbauer [47]. Enquanto os autores anteriores desenvolveram as fórmulas de Gauss de modo adequado para o cálculo logarítmico usando tabelas de coeficientes, Schödlbauer redesenvolveu as fórmulas para o cálculo numérico por computadores.

Em variação da apresentação das fórmulas de Schödlbauer, as diferentes fórmulas para as diversas variantes de projeção de Gauss, são unificadas a um único caso. Desta maneira, toma-se em conta, que as projeções Gauss Krüger e a projeção UTM são projeções derivadas de um único tipo básico: Projeção Conforme de Gauss’.

¹⁰) Gauss propriamente, nunca publicou sua teoria da projeção conforme ‘em pequenas partes’ de seu trabalho, quem descreveu em [6] os trabalhos da medição e projeção de Hannover, Krüger, quem apresentou as fórmulas de modo sistemático e Hristow e Hubeny, reformularam as equações da projeção com as ferramentas modernas da geometria diferencial.

2.1 As Coordenadas y, x

Com **Gauss-Krüger:** $L_0 = F \cdot 3^\circ$
UTM: $L_0 = (Zona - 30) \cdot 6^\circ - 3^\circ$

a diferença $\Delta L = L - L_0$ (Longitude do ponto a transformar menos Longitude do meridiano central), as coordenadas y, x de um sistema plano e conforme (segundo Gauss) podem ser calculadas com:

$$x = [t_0]_x + [t_2]_x \cdot \Delta L^2 + [t_4]_x \cdot \Delta L^4 + [t_6]_x \cdot \Delta L^6$$

$$y = [t_1]_y + [t_3]_y \cdot \Delta L^3 + [t_5]_y \cdot \Delta L^5$$

com os coeficientes

$$[t_0]_x = m_H \cdot G = G(B) = \text{comprimento do meridiano da Latitude } B$$

$$[t_2]_x = \frac{m_H}{2\rho^2} \cdot N \cdot \cos^2 B \cdot t$$

$$[t_4]_x = \frac{m_H}{24\rho^4} \cdot N \cdot \cos^4 B \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9\eta^2)$$

$$[t_6]_x = \frac{m_H}{720\rho^6} \cdot N \cdot \cos^6 B \cdot t \cdot (61 - 58t^2 + t^4)$$

$$[t_1]_y = \frac{m_H}{\rho^2} \cdot N \cdot \cos B$$

$$[t_3]_y = \frac{m_H}{6\rho^3} \cdot N \cdot \cos^3 B \cdot (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$[t_5]_y = \frac{m_H}{120\rho^5} \cdot N \cdot \cos^5 B \cdot [5 - 18t^2 + t^4 + \eta^2 \cdot (14 - 58t^2)]$$

2.2 A Convergência meridiana c

$$c = [t_1]_c \cdot \Delta L + [t_3]_c \cdot \Delta L^3 + [t_5]_c \cdot \Delta L^5$$

com os coeficientes

$$[t_1]_c = \cos B \cdot t = \text{sen } B$$

$$[t_3]_c = \frac{1}{3\rho^2} \cdot \cos^3 B \cdot t \cdot (1 + 3\eta^2)$$

$$[t_5]_c = \frac{1}{15\rho^4} \cdot \cos^5 B \cdot t \cdot (2 - t^2)$$

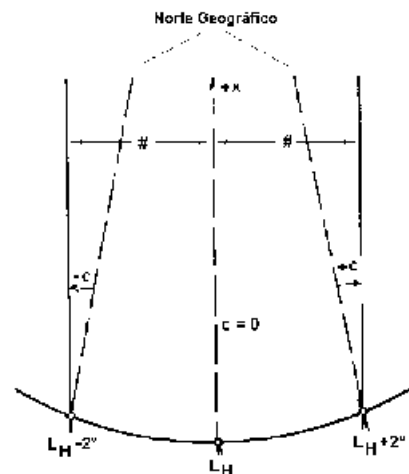


Figura : A Convergência Meridiana

2.3 O Fator de Escala m

$$m = m_H + [t_2]_m \cdot \Delta L^2 + [t_4]_m \cdot \Delta L^4$$

com os coeficientes

$$[t_2]_m = \frac{m_H}{2\rho^2} \cdot \cos^2 B \cdot (1 + \eta^2)$$

$$[t_4]_m = \frac{m_H}{24\rho^4} \cdot \cos^4 B \cdot [(5 - 4t^2) + \eta^2(14 - 28t^2)]$$

Parâmetros:

$$t = \tan B$$

$$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 B$$

$$N = \frac{\bar{c}}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \text{Raio da curvatura transversal}$$

$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Gauss-Krüger: $\bar{c} = 6\,398\,786,849\text{m} = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide Bessel)}$
 $e'^2 = 0,006\,719\,219 = \text{Quadrado da 2ª excentricidade numérica (Bessel)}$
 $m_H = 1$

UTM: $\bar{c} = 6\,399\,935,608\text{m} = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide Hayford)}$
 $e'^2 = 0,006\,768\,170 = \text{Quadrado da 2ª excentricidade numérica (Hayford)}$
 $m_H = 0,9996$

2.4 As Coordenadas Gauss-Krüger e UTM

Os resultados y , x da transformação têm notações diferentes, segundo as especificações de um dos sistemas Gauss.

Para evitar ordenadas negativas ($\text{sign}(y) = \text{negativo}$) no lado esquerdo do meridiano central de cada fuso, aumenta-se o valor da ordenada por 500 km (nos três sistemas).

Gauss-Krüger (R,H): Os primeiros dígitos da ordenada R contêm o número do fuso em milhões. Os fusos são de 3° (1° fuso $L_H=3^\circ$, 2° fuso $L_H=6^\circ$, ...).

$$R = 10^6 \cdot \frac{L_H}{3^\circ} + k + y \quad \text{com } k = 500\,000\text{m}$$

$$H = x$$

$$f = \frac{L_H}{3^\circ}$$

UTM (E,N): Os fusos-UTM (chamados 'Zona') são de 6° (1° fuso $L_H=177^\circ\text{W}$, 2° fuso $L_H=171^\circ\text{W}$, ...).

$$E = y + k \quad \text{com } k = 500\,000\text{m}$$

$$N = x$$

$$f = \frac{L_H + 3^\circ}{6^\circ} + 30 = \text{Zona (UTM)}$$

2.5 Exemplo numérico

Através das 'Coordenadas Geográficas' (elipsóide IUGG 1967) do Ponto 1 serão calculadas:

- a.) as coordenadas da Projeção de Gauss, na versão UTM,
- b.) a convergência de meridiano,
- c.) o fator de escala

Solução:

Ponto 1L: = 49° 16' 15,2448" W B = 25° 25' 50,1256" S

```

L =  49.27090133° W      B =  25.43059044° S
-----
Projeção = UTM,        Fuso =  22
N .....               6382100.5076
dL .....              1.72909867
Coordenada y :  t1y .... 173870.47154522
                 t3y .... 16.77685924
                 t5y .... 0.00078855
                 Dy ..... 500000.00000000
E .....               673887.24919301
Coordenada x :  t0x .... 2812637.35519706
                 t2x .... 1126.60735981
                 t4x .... 0.33636818
                 t6x .... 0.00008277
                 xL ..... 2813764.29900783
N .....(-)7186235.70099217
Convergência c :  t1c .... 0.74250500
                 t3c .... 0.00018688
                 t5c .... 0.00000006
c .....               0.74269193
Fator escala m :  mH .... 0.99960000
                 t2m .... 0.00037329
                 t4m .... 0.00000010
m .....               0.99997339
    
```

```

              P R O - G A U S S   V E R S .   1 . 0
              Cálculo da Projeção Geodésica de Gauss
-----
              Longitude (L) ..... :   -49.16152448    dec =  -49.27090133
              Latitude  (B) ..... :   -25.25501256    dec =  -25.43059044

Gauss-Krüger .....                R :  104372161.5416    c -0.3244956743
                                    H :   -7185912.8499    m  1.0002017713

UTM .....                          E :  22    673887.2492    c  0.4433690958
                                    N :   -7186235.7010    m  0.9999733873

              Elipsóide de Referência :  Gauss-Krüger = Bessel
                                           UTM = IUGG 1967
                                           PBG = IUGG 1967

-----
              1 FIM  2 calc  3           4           5           6           7           8           9           0
    
```

Cópia de Tela : Cálculo da Projeção Geodésica de Gauss

3 Transformação entre Coordenadas Gauss e Coordenadas Geográficas

O problema do cálculo das coordenadas geográficas, da longitude L e da latitude B, de um ponto P, é a inversão do problema do capítulo 2.

O presente desenvolvimento é baseado principalmente nas fórmulas de Schönbauer [47], assim como também no caso do capítulo 2.

3.1 As Coordenadas de Partida Gauss-Krüger e UTM

Gauss-Krüger:

$$x = H$$

$$y = R - (F \cdot 10^6 + k) \text{ com } k = 500\,000\text{m e } F = \text{primeiras cifras de } R$$

$$L_H^\circ = F \cdot 3^\circ$$

UTM:

$$x = N$$

$$y = E - k \text{ com } k = 500\,000\text{m}$$

$$L_H^\circ = (\text{Zona} - 30) \cdot 6^\circ - 3^\circ$$

Parâmetros:

$$t_F = \tan B_F$$

$$\eta_F^2 = e'^2 \cdot \cos^2 B_F$$

$$N_F = \frac{\bar{c}}{\sqrt{1 + \eta_F^2}} = \text{raio da curvatura transversal}$$

Gauss-Krüger:

$$\bar{c} = 6\,398\,786,849\text{m} = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide Bessel)}$$

$$e'^2 = 0,006\,719\,219 = \text{Quadrado da 2ª excentricidade numérica (Bessel)}$$

$$m_H = 1$$

UTM:

$$\bar{c} = 6\,399\,935,608\text{m} = \text{Raio da curvatura polar (Elipsóide Hayford)}$$

$$e'^2 = 0,006\,768\,170 = \text{Quadrado da 2ª excentricidade numérica (Hayford)}$$

$$m_H = 0,9996$$

3.2 As Coordenadas geográficas L, B

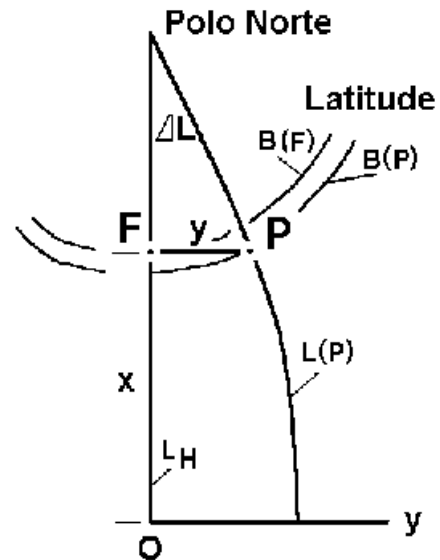
$$B_F = B(G_F) = B\left(\frac{H}{m_H}\right) = B\left(\frac{x}{m_H}\right)$$

= Latitude geográfica do ponto $G_F = x$

$$B = B_F + [t_2]_B \cdot y^2 + [t_4]_B \cdot y^4 + [t_6]_B \cdot y^6$$

$$L = L_H + [t_1]_L \cdot y + [t_3]_L \cdot y^3 + [t_5]_L \cdot y^5$$

com os coeficientes



$$[t_2]_B = - \frac{\rho}{2N_F^2 \cdot m_H^2} \cdot t_F \cdot (1 + \eta_F^2)$$

$$[t_4]_B = + \frac{\rho}{24N_F^4 \cdot m_H^4} \cdot t_F \cdot (5 + 3t_F^2 + 6\eta_F^2 \cdot [1 - t_F^2])$$

$$[t_6]_B = - \frac{\rho}{720N_F^6 \cdot m_H^6} \cdot t_F \cdot (61 + 90t_F^2 + 45t_F^4)$$

$$[t_1]_L = + \frac{\rho}{N_F \cdot \cos B_F \cdot m_H^2}$$

$$[t_3]_L = - \frac{\rho}{6N_F^3 \cdot \cos B_F \cdot m_H^3} \cdot (1 + 2t_F^2 + \eta_F^2)$$

$$[t_5]_L = + \frac{\rho}{120N_F^5 \cdot \cos B_F \cdot m_H^5} \cdot (5 + 28t_F^2 + 24t_F^4)$$

3.3 A Convergência Meridiana c

$$c = [t_1]_c \cdot y + [t_3]_c \cdot y^3 + [t_5]_c \cdot y^5$$

com os coeficientes

$$[t_1]_c = + \frac{\rho}{N_F \cdot m_H^2} \cdot t_F$$

$$[t_3]_c = - \frac{\rho}{3N_F^3 \cdot m_H^3} \cdot t_F \cdot (1 + t_F^2 - \eta_F^2)$$

$$[t_5]_c = + \frac{\rho}{15N_F^5 \cdot m_H^5} \cdot t_F \cdot (2 + 5t_F^2 + 3t_F^4)$$

3.4 O Fator de Escala m

$$m = m_H + [t_2]_m \cdot y^2 + [t_4]_c \cdot y^4$$

com os coeficientes

$$[t_2]_m = + \frac{1}{2N_F^2 \cdot m_H^2} \cdot t_F \cdot (1 + \eta_F^2)$$

$$[t_4]_m = + \frac{1}{24N_F^4 \cdot m_H^3} \cdot t_F \cdot (1 + 6\eta_F^2)$$

3.5 Exemplo numérico

Através das ‘Coordenadas Gauss’ (elipsóide IUGG 1967) do Ponto 1 serão calculas:

- a.) as ‘Coordenadas Geográficas’,
- b.) a convergência de meridiano,
- c.) o fator de escala

Solução para pontos com ‘Coordenadas UTM’:

```

Ponto 1 :      E = 673 887,2490m  N(S) = 7 186 235,7010m
-----
y = 673887.2492      x = -2813764.2990
-----
Projeção = UTM,      Fuso = 22
NF .....           6382103.4547
Y .....           173887.2492
Longitude L :      LH .....           -51.00000000
                  t1L .....           1.72941081
                  t3L .....           -0.00031224
                  t5L .....           0.00000010
                  L .....             -49.27090133
                  L° .....           49°16'15,2448" W
Latitude B :      BF .....           25.44076734
                  t2B .....           -0.01018047
                  t4B .....           0.00000358
                  t6B .....           -0.00000000
                  B .....             -25.43059045
                  B° .....           25°25'50,1256" S
Convergência c : t1c .....           0.74291644
                  t3c .....           -0.00022460
                  t5c .....           0.00000009
                  c .....             0.74269192
Fator escala m : mH .....           0.99960000
                  t2m .....           0.00037336
                  t4m .....           0.00000002
                  m .....             0.99997339
    
```

```

          P R O - G A U S S   V E R S .   1 . 0
          -----
          Coordenadas Gauss => Coordenadas geográficas
          -----
Gauss-Krüger ...  R :           0.0000  c :           (L) :
                  H :           0.0000  m :           (B) :
UTM .....        E :    22673887.2490  c :    0.44336909 (L)  -49.1615244800
M. central = -51° N :    -7186235.7010  m :    0.99997339 (B)  -25.2550125603

          elipsóide de referência :           UTM = IUGG 1967
          -----
          1 FIM  2 calc  3           4           5           6           7           8           9           0
    
```

Cópia de Tela : Cálculo das Coordenadas Geográficas

4 Transformações de Coordenadas-Gauss entre Fusos

Para projetos de medição ou cálculos geodésicos, como por exemplo, de áreas de parcelas, todos os pontos de um objeto (de um bloco, de um município, etc.) devem ser definidos em um único sistema (fuso) de coordenadas. No caso de que aquele objeto se encontre dividido entre dois fusos da projeção geodésica de Gauss, deve-se transformar uma parte dos pontos de um fuso para o fuso vizinho.

Os dois casos, a transformação do 'fuso-oeste' para o 'fuso-leste' e a transformação do 'fuso-oeste' para o 'fuso-leste', geram também diferentes fórmulas de cálculo. Nas seguintes fórmulas, o símbolo F_L usado para 'fuso-leste', os elementos de F_L são marcados com um asterisco (*), por exemplo F_L^* para o meridiano principal do fuso-leste.

Geralmente é costume estender os fusos acima do valor da definição, criando uma zona de sobreposição. Nest zona, todos os pontos eram registrados nos dois fusos, com coordenadas duplas, de acordo com o meridiano de referência de cada fuso.

O problema de cálculo da transformação pode ser resolvido de maneira simples, calculando-se em um primeiro passo as coordenadas geográficas a partir das coordenadas Gauss (G.-K. ou UTM) dos pontos de um fuso (segundo o capítulo 3), e logo, em um segundo passo, calculando-se a base destas coordenadas geográficas as coordenadas Gauss do fuso vizinho.

Entre diversas outras soluções exatas literatura da Geodésia Matemática, a presente solução foi escolhida, em primeiro lugar, pelo fato de que a programação das fórmulas pode-se basear em grandes partes em rotinas já programadas para a solução dos problemas dos capítulos 2 e 3.

4.1 Fórmulas de Cálculo: Sistema Oeste para o Sistema Leste

a.) Coordenadas Gauss no sistema oeste

Gauss-Krüger:

$$\begin{aligned} x &= H \\ y &= R - (F \cdot 10^6 + k) \quad \text{com } k = 500\,000m \text{ e } F = \text{primeira cifra de } R \\ L_H &= F \cdot 3^\circ \end{aligned}$$

UTM:

$$\begin{aligned} x &= N \\ y &= E - k \quad \text{com } k = 500\,000m \\ L_H &= (Zona - 30) \cdot 6^\circ - 3^\circ \end{aligned}$$

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L

$$\begin{aligned} B &= B(y, x) \\ \Delta L &= \Delta L(y, x) \\ L &= L_H + \Delta L \end{aligned}$$

... segundo as fórmulas do capítulo 3.1

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L

¹¹⁾ vide capítulo 3 para os valores dos parâmetros

$$L_H^* = L_H + \Delta L_H$$

$$\Delta L^* = L - L_H^*$$

$$\text{com } \Delta L_{H(G.-K.)} = 3^\circ; \quad \Delta L_{H(UTM)} = 6^\circ; \quad \Delta L_{H(PGB)} = 2^\circ$$

d.) Coordenadas Gauss no sistema leste (L_H^*)

$$x^* = x(B, \Delta L^*)$$

$$y^* = y(B, \Delta L^*)$$

... segundo as fórmulas do capítulo 2.1

Gauss-Krüger: $H^* = x^*$

$$R^* = 10^6 \cdot (F + 1) + k + y^* \quad \text{com } k = 500\,000\text{m}$$

UTM:

$$N^* = x^*$$

$$E^* = y^* + k \quad \text{com } k = 500\,000\text{m}$$

$$Zona^* = Zona + 1$$

4.2 Fórmulas de Cálculo: Sistema Leste para o Sistema Oeste

a.) Coordenadas Gauss no sistema oeste (L_H^*)

Gauss-Krüger:

$$x^* = H^*$$

$$y^* = R^* - (F^* \cdot 10^6 + k) \quad \text{com } k = 500\,000\text{m} \quad \text{e } F^* = \text{primeira cifra de } R^*$$

$$L_H^* = F^* \cdot 3^\circ$$

UTM:

$$x^* = N^*$$

$$y^* = E^* - k \quad \text{com } k = 500\,000\text{m}$$

$$L_H^* = (Zona^* - 30) \cdot 6^\circ - 3^\circ$$

b.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L

$$B = B(y^*, x^*)$$

$$\Delta L^* = \Delta L(y^*, x^*)$$

$$L = L_H^* + \Delta L^*$$

... segundo as fórmulas do capítulo 3.1

c.) Coordenadas Geográficas do Ponto P no sistema L

¹²⁾ vide capítulo 2 para os valores dos parâmetros

$$L_H = L_H^* + \Delta L_H$$

$$\Delta L = L - L_H$$

com $\Delta L_{H(G.-K.)} = 3^\circ$; $\Delta L_{H(UTM)} = 6^\circ$; $\Delta L_{H(PGB)} = 2^\circ$

d.) Coordenadas Gauss no sistema oeste

$$x = x(B, \Delta L)$$

$$y = y(B, \Delta L)$$

... segundo as fórmulas do capítulo 2.1

Gauss-Krüger:

$$H = x$$

$$R = 10^6 \cdot (F^* - 1) + k + y \text{ com } k = 500000m \text{ e } F^* = \text{primeira cifra de } R^*$$

UTM:

$$N = x$$

$$E = y + k \text{ com } k = 500000m$$

$$\text{Zona} = \text{Zona}^* - 1$$

5 A Redução de Distâncias e Áreas

Segundo *Großmann* [50, p.53-55], a redução numérica de distâncias por deformações projetivas é

$$D - d = - \frac{d}{6r^2} \cdot (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

onde os y são as distâncias diretas dos pontos do meridiano central (em km).

Com uma ordenada média de

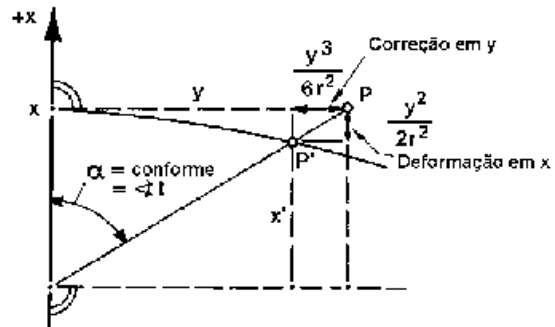
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

e um fator de escala para o meridiano central, temos:

$$d = m_H \cdot D \cdot \left(1 + \frac{y_m^2}{2r^2} \right)$$

Para a redução de áreas (integral entre os limites y_1 e y_2) temos uma fórmula semelhante:

$$F - f = - \frac{f}{3r^2} \cdot m_H \cdot (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$



ou com a ordenada média y

$$f = F \cdot m_H \cdot \left(1 + \frac{y_m^2}{r^2} \right)$$

Segundo estas fórmulas, o valor da deformação projetiva é uma função de uma única variável, da distância d do meridiano central (e não da latitude!). Mas a ‘abertura’ do fuso, e com isto a distância máxima dos pontos do meridiano central, depende da latitude geográfica.

6 Bibliografia

- [1] Soldner, J.: *Theorie der Landesvermessung (1810)*. Herausgegeben von J. Frischauf, Leipzig 1911.
- [2] Gauss, C.F.: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.* (1822). Herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig 1894.
- [3] Gauss, C.F.: *Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas)*. (1827). Tradução alemã de A. Wangerin, Leipzig 1921.
- [4] Gauss, C.F.: *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* (1843/46). Herausgegeben von J.Frischauf, Leipzig 1910.
- [5] Baeyer, J. J.: *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche*. Berlin 1862.
- [6] Schreiber, O.: *Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung*. Hannover 1866.
- [7] Helmert, F.R.: *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. Parte 1ª, Leipzig 1880.
- [8] Gauss, F.G.: *Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst*. 4ª edição. Stuttgart 1922.
- [9] Hegemann, E.: *Lehrbuch der Landesvermessung*. 1ª parte, 2ª edição, Berlin 1921, 2ª parte, 1ª edição. Berlin 1913.
- [10] Krüger, L.: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*. Potsdam 1912.
- [11] Krüger, L.: *Formeln zur konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*. Berlin 1919.
- [12] Krüger, L.: *Zur stereographischen Projektion*. Veröffentlichungen des Preußischen Geodätischen Instituts, N. F. Nr. 89, Berlin 1922.
- [13] Frischauf, J.: *Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids*. Stuttgart 1913.
- [14] Frischauf, J.: *Beiträge zur Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids*. Leipzig-Berlin 1919.
- [15] Pizetti, *Höhere Geodäsie* em 'Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften'. Vol. VI, 1, Leipzig 1906-1925.
- [16] Thilo, G.: *Anweisungen und Tafeln zur Berechnung Gauß-Krügerscher Koordinaten*. Berlin 1924.
- [17] Koll-Eggert: *Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine*. 2ª edição, Stuttgart 1927.
- [18] Kommerell, V. e K.: *Theorie der Raumkurven und krummen Flächen*. 1ª e 2ª parte, 4ª edição. Berlin und Leipzig 1921.
- [19] Lips, K.: *Formeln und Tafeln zur Berechnung der ellipsoidischen, der konformen und der geographischen Koordinaten mit der Rechenmaschine*. Stuttgart 1932.
- [20] Driencourt et Laborde, Fasc. IV *Theorie de la représentation conforme, emploi des projections rigoureusement conformes en géodésie*. Par J.Laborde. Paris 1932.
- [21] Jordan-Eggert: *Handbuch der Vermessungskunde*. Vol. III, 8ª edição, Stuttgart 1939 e 1941.
- [22] Krovak, J.: *Tafeln zur Berechnung der Gauß-Krügerschen Abbildungsangaben mit der Rechenmaschine*, Prag 1941.
- [23] Boltz, H.: *Formeln und Tafeln zur Berechnung geographischer Koordinaten*. Potsdam 1942.
- [24] Boltz, H.: *Formeln und Tafeln zur Berechnung Gauß-Krügerscher Koordinaten*. Potsdam 1943.
- [25] Hristow, W., *Die Gauss-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid*. Leipzig 1943.
- [26] Ludwig, K., *Die der Merkator Karte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Jhrg. 1943, S. 113.
- [27] Hunger, F.: *Beitrag zur konformen Abbildung von Großräumen in der Geodäsie*. Caderno N° 26 da 'Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst'. Berlin 1943.

- [28] Kneißl, M., *Anschauliche Einführung in den geometrischen Teil der höheren Geodäsie*. Cader-no N° 27 zu den Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst. Berlin 1944.
- [29] König, R.; Weise, K. *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951.
- [30] Hopfner, Fr., *Grundlagen der höheren Geodäsie*. Wien 1949.
- [31] Baeschlin, C.F.: *Lehrbuch der Geodäsie*. Zürich 1948.
- [32] Hubeny, K.: *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids*. Sonderheft der österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1953.
- [33] Draheim, H.: *Allgemeine Formeln zur Berechnung der Richtungsreduktion und der Längenreduktion konformer Abbildungen*. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. C 7. München 1953.
- [34] Bodemüller, H.: *Die geodätischen Linien des Rotationsellipsoids und die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für große Strecken unter besonderer Berücksichtigung der Bessel-Helmert'schen Lösungsmethode*. Veröffl. der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. B 13. München 1954.
- [35] Tardi, P.; Laclavère, G.: *Traité de Géodesie*. Paris 1954.
- [36] Hristow, W.: *Die Gauss'schen und geographischen Koordinaten auf dem Ellipsoid von Kras-sowsky*. Berlin 1955.
- [37] Sakatow, P.: *Lehrbuch der höheren Geodäsie*. 2. Ed., Tradução alemã, Berlin 1957.
- [38] Urmajew, N.: *Sphäroidische Geodäsie*. (Moskou 1955). Tradução alemã, Berlin 1958.
- [39] Merkel, H.: *Grundzüge der Kartenprojektionslehre*, Veröffl. der Deutschen Geodätischen Kom-mission Nr. A 17. München 1956 und 1958.
- [40] Jordan-Eggert-Kneißl *Handbuch der Vermessungskunde*. Vol. IV Mathematische Geodäsie (Landesver-messung). 10ª edição, Stuttgart 1958/59.
- [41] Schrader, B.: *Beiträge zur wirtschaftlichen Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für große Entfernungen*. Veröffentlichung. der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. C 35. München 1959.
- [42] Eggert-Klietsch: *Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine*. 3. Ed., Stuttgart 1957.
- [43] Tarczy-Hornoch und Hristow *Tafeln für das Krassowsky-Ellipsoid*. Sopron und Sofia 1959.
- [44] Schödlbauer, A.: *Iterative Lösung der beiden geodätischen Hauptaufgaben über lange Linien mit elektronischen Rechenautomaten*. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. A 45. München 1963.
- [45] Schödlbauer, A.: *Über eine neue numerische Lösung der 1. geodätischen Hauptaufgabe auf einem Referenz-Rotationsellipsoid der Erde für Seitenlängen bis 120 km*. Veröffent-lichung. der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. C 58. München 1963.
- [46] Schödlbauer, A.: *Formeln und Tafeln zur Übertragung geographischer Koordinaten über Dreiecks-seiten I. Ordnung auf dem Bessel-Ellipsoid*. (Tafelwerk zu lfd. Nr. 45). Veröffentli-chung der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. D 4, München 1963.
- [47] Schödlbauer, A.: *Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung*. Wichmann Skripten. Herbert Wichmann Verlag, Parte 1,2,3, Karlsruhe 1982.
- [48] Dorrer, E.: *Eine allgemeine numerische Lösung der ersten geodätischen Hauptaufgabe. (Pro-grammierung auf der Grundlage des Runge-Kutta-Verfahrens zur Auflösung von Differentialgleichungen erster Ordnung)*. ZfV 1964.
- [49] Hoschek, J.: *Mathematische Grundlagen der Kartographie*, Bibliographisches Institut, Hoch-schultaschenbücher 443/443a, Mannheim 1969
- [50] Großmann, W.: *Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung*, Verlag Kon-rad Wittwer, 2ªEd., Stuttgart 1964
- [51] Straßer, G.: *Ellipsoidische Parameter der Erdfigur (1800-1950)*. Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission Nr. A 19, München 1957.