

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

EMILLY XAVIER BOTELHO

TEORIA DA RUÍNA: UMA ABORDAGEM SOBRE O MODELO DE
CRAMÉR-LUNDBERG.

Recife

2015

Emilly Xavier Botelho

TEORIA DA RUÍNA: UMA ABORDAGEM SOBRE O MODELO DE
CRAMÉR-LUNDBERG.

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado à Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para obtenção
do grau de Bacharel em Ciências Atuariais.

Orientador: Wilton Bernardino da Silva

Recife

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS

27 de Fevereiro de 2015

Nós recomendamos que o Trabalho de Conclusão de Curso da autoria de

Emilly Xavier Botelho

Intitulada

“Teoria da Ruína: Uma abordagem sobre o modelo de Cramér-Lundberg.”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de bacharel em Ciências Atuariais.

Coordenador do Curso de Ciências Atuariais

Banca examinadora:

Orientador: Wilton Bernardino da Silva

Waldemar Araújo de Santa Cruz Oliveira Júnior

Alessandra Prazeres Cezario

*A minha Mãe,
dedico com amor e carinho.*

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante esta longa caminhada. Por ter me dado forças nos momentos mais difíceis, por me dar a capacidade necessária para que eu conquiste mais uma meta na minha vida e por estar sempre ao meu lado, iluminando o meu caminho.

A minha mãe, Silvana, e meu padrasto, Montenegro, pelo apoio, carinho, dedicação, confiança, amor e esforço que dedicaram a mim.

A minha irmã, Evillyn, pela paciência e compreensão pelos longos períodos de ausência.

Aos meus avós, Martinha e Cloves, que sempre me incentivaram e apoiaram em todas as minhas decisões, sempre com muito amor e carinho.

A Victor Albino pelo companheirismo, atenção, incentivo, apoio, carinho, confiança e momentos de descontração.

Ao Professor Wilton Bernadino da Silva pela oportunidade concedida, orientação segura, confiança, apoio, incentivo, competência, paciência e por toda atenção dispensada no desenvolvimento desta monografia. Muito obrigada.

Ao Professor Sylvio José Pereira, pelas maravilhosas aulas de estatística. Que com sua dedicação e sabedoria que me influenciaram a querer descobrir mais e mais sobre o mundo dos números através da estatística. Muito obrigada professor.

Ao Professor Filipe Costa por sua dedicação nas aulas, sua paciência e puxões de orelha quando necessário. Obrigada professor.

Ao Professor Maurício Assuero pela competência, carinho, apoio e paciência com seus alunos, e por sua amizade. Obrigada.

Aos meus colegas de turma e amigos Bruna Carlyne, Carlos Hermano, Diogo Coquita, Gilson Cavalcante, Joabe Freitas, Jose Murilo, Victor Albino, Victor Caldas, Willykelle Moura e Yale Nogueira pelo companheirismo, amizade, convivência e momentos de descontração.

Aos professores do Curso de Ciências Atuariais da Universidade Federal de Pernambuco, pela amizade, apoio e confiança.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Tudo que é seu encontrará uma
maneira de chegar até você.”

Chico Xavier

Resumo

A análise de risco tem sido um tema amplamente discutido ao longo do tempo sob diferentes suposições, onde seu campo mais relevante está nos métodos que modelam as reservas de uma companhia de seguro. O ramo de seguros é construído e estudado através de modelos matemáticos que visam proporcionar um melhor conhecimento sobre este tema. Entretanto, é importante distinguir tais modelos da realidade, posto que o sistema de seguros opera num ambiente mais complexo do que o representado em modelos matemáticos. Pois existem diversas variáveis que influenciam a solvência das seguradoras, algumas delas são o número e espalhamento dos sinistros no tempo, o valor da indenização, o capital inicial e o fluxo de prêmios a serem arrecadados. Tais variáveis ajudam a determinar como o caixa da entidade vai se comportar durante o tempo em estudo.

Este trabalho tem como foco apresentar o embasamento teórico de uma das mais importantes partes da matemática atuarial, a qual é conhecida como Teoria da Ruína, dando ênfase no cálculo da probabilidade de ruína de uma seguradora. A ocorrência do estado de ruína se dá quando a reserva matemática da seguradora se torna insuficiente para pagar as indenizações resultantes dos sinistros gerados. Iremos apresentar, mais especificamente, o modelo clássico de Cramér-Lundberg, em tempo contínuo, o qual utiliza um processo de Poisson homogêneo para descrever, de maneira simples, a evolução do capital de uma companhia de seguros. Adicionalmente realizamos simulações com o objetivo de avaliar o modelo proposto em ROSS (1997) assumindo que a variável de perda em indenizações tem distribuição gama.

Palavras-Chaves: *Probabilidade da Ruína, Cramér-Lundberg, Poisson, Risco.*

Abstract

Risk analysis has been a topic widely discussed over time under different assumptions, where his most important field is the methods that model the reserves of an insurance company. The insurance industry is built and studied using mathematical models that aim to provide a better understanding of this topic. However, it is important to distinguish these models of reality, since the insurance system operates in a more complex environment than represented in mathematical models. For there are many variables that influence the solvency of insurers, some of them are the number and spread of claims in time, the amount of compensation, the initial capital and the flow of premiums to be collected. These variables help determine how the entity capital will behave during the time under study.

This work focuses on presenting the theoretical foundation of one of the most important parts of actuarial mathematics, which is known as Theory of Ruin, emphasizing the calculation of the probability of default of an insurance company. The occurrence of the state of disrepair is when the mathematical reserve of the insurer becomes insufficient to pay for the damages resulting from claims generated. We will present, more specifically, the classical model of Cramér-Lundberg, in continuous time, which uses a homogeneous Poisson process to describe, simply, the evolution of the capital of an insurance company. Additionally we performed simulations in order to evaluate the proposed model ROSS (1997) assuming that the loss of variable compensation has gamma distribution.

Key Words: *Probability of Ruin, Cramér-Lundberg, Poisson, Risk.*

Sumário

Resumo.....	vii
Abstract	viii
Lista de Figura.....	xi
Lista de Tabelas.....	xii
1. Introdução.....	13
2. Seguro: Perspectivas Históricas.....	17
2.1 No Mundo	17
2.2 No Brasil.....	20
2.3 Mercado Atual de Seguros no Brasil.....	22
3. Modelo Clássico de Cramér-Lundberg.....	28
3.1 Conceitos Básicos.....	29
3.1.1 Processo de Contagem	30
3.1.2 Processo de Renovação	30
3.1.3 Processo de Poisson	31
3.1.4 Processo de Poisson Composto.....	33
3.2 Modelo de Cramér-Lundberg.....	34
4. Teoria da Ruína.....	38
4.1 Probabilidade de Ruína	38
4.2 Coeficiente de ajustamento e desigualdade de Lundbeg.....	40
4.3 Aproximação de Cramér-Lundberg.....	42
4.4 Probabilidade de Ruína para Indenizações que seguem Distribuição Exponencial	42
5. Modelo de Risco.....	45
5.1 Propriedades da Distribuição Exponencial	45
5.2 Descrição do Modelo de Risco	46
5.3 Resultados Numéricos.....	48
5.3.1 Influência do Capital Inicial e do numero de segurados.....	48
5.3.2 Influência do valor do prêmio e do tempo médio de sinistralidade	50
5.3.3 Influência dos parâmetros associados à distribuição dos montantes pagos em indenizações	51
6. Considerações Finais.....	54

APÊNDICE 1	55
APÊNDICE 2	58
APÊNDICE 3	62
Referências Bibliográficas	64

Lista de Figura

Figura 1: Coeficiente de Entrada no Mercado de Seguros e Previdência Privada Aberta no Brasil (Arrecadação/PIB)	23
Figura 2: Receita de Prêmios de Seguros por Ramo em 2013 (% do total).....	24
Figura 3: Trajetória típica de um Processo de Contagem	31
Figura 4: Possível trajetória de um processo de Poisson Composto	34

Lista de Tabelas

Tabela 1: Valores referentes aos Prêmios Diretos de Seguros, Contribuições de Previdência, Receita com Títulos de Capitalização e Contraprestação de Saúde Suplementar.	25
Tabela 2: Valores referentes aos Prêmios Ganhos de Seguros, Receitas com Títulos de Capitalização e Contraprestações Ganhas de Saúde Suplementar.	26
Tabela 3: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = 124$, $c = 0.2$ e diversos valores de u	49
Tabela 4: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = 124$, $u = 1$, $c = 0.2$ e diversos valores de n	50
Tabela 5: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = 124$, $u = 1$ e diversos valores de c	51
Tabela 6: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $n = 100$, $u = 1$, $c = 0,2$ e diversos valores de λ	51
Tabela 7: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = 124$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0,2$ e diversos valores de α e β	52
Tabela 8: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = 124$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0,2$ e diversos valores de α e β	53
Tabela 9: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = 124$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0,2$ e diversos valores de α e β	53

1. Introdução

A sociedade moderna está sempre em busca de controlar a variabilidade de eventos incertos, ter capacidade de medi-los e avaliar suas consequências, para poder converter o futuro impreciso em oportunidades de ganho que impulsiona a economia. Assim, o seguro surgiu como forma de prevenção do risco futuro, incerto e possível, diante das eventualidades da vida. O ato de precaver-se adquire no seguro a natureza de previdência ou prevenção contra a eventualidade de riscos, de ocorrência aleatória, que pudessem destruir o patrimônio e os bens de seus proprietários. O risco, portanto, é a base do seguro.

Segundo Bernstein (2006) a palavra risco deriva do italiano antigo “*risicare*” que significa ousar, e neste sentido seria uma opção e não um destino, sendo moldado a partir das ações que ousamos tomar.

No ramo de seguros o conceito de risco, segundo a Fenaseg (1998), “é o evento incerto, ou de data incerta, que independe da vontade das partes, e contra o qual é feito o seguro. O risco é a expectativa de sinistro. Sem risco não pode haver o seguro”. Ao risco realizado dá-se o nome de sinistro, podemos, então, concluir que o risco é o sinistro no estado da eventualidade e o sinistro é o risco no estado de realização.

As primeiras experiências de gerenciamento de risco apoiavam-se no mutualismo, que se refere à associação de um grupo de indivíduos com interesses seguráveis afins que constituem uma reserva financeira, cuja finalidade é suprir, em determinado momento, necessidades eventuais de alguns de seus membros que venham a ser afetados por um acontecimento imprevisto. O mutualismo poderia ser chamado de socialização do prejuízo, pois as cotas pagas por cada um garantem a reposição do bem perdido.

O risco está diretamente relacionado ao desconhecimento do futuro, e os efeitos adversos que ele pode proporcionar. No entanto, ao longo do tempo o homem vem aprendendo, continuamente, a conviver com o risco. Para tal desenvolve inúmeros métodos para o seu gerenciamento (BERNSTEIN, 2006). Os modelos de medição do risco convergem para a tentativa de transformar as incertezas em segurança, aumentando assim a capacidade de domínio do risco. Perim (2002) mostra que o entendimento e a convivência com o risco fazem surgir à indústria de seguros.

O potencial de crescimento da indústria de seguros no Brasil é bastante animador, o mercado de Seguros, Previdência Complementar, Saúde Suplementar e Capitalização vêm experimentando grande avanço, de modo que se observa um substancial e consistente aumento de receitas, refletido em uma crescente participação no Produto Interno Bruto (PIB) do país. Como porcentagem do PIB a arrecadação dos produtos regulados pela SUSEP (Superintendência de Seguros Privados) foi de 3,7% em jan./nov. de 2014. A conquista da estabilidade econômica, após longo período de hiperinflação e incertezas, aliada a estrutura normativa e a política de incentivo governamental, constituiu a base para o notável desempenho do mercado segurador nos últimos 10 anos.

A relevância do papel que o mercado segurador desempenha no País é, além de gerar empregos, dar segurança e garantir renda, bens e propriedades, traduzidas pela reversão de recursos que as seguradoras acumulam para garantir o pagamento de indenizações aos segurados, à população. Assim, o dinheiro volta para a economia, gerando um efeito multiplicador que dinamiza a produção do país. No ano de 2013, os recursos gastos com pagamento de resgates, de indenizações, de benefícios, de sorteios de títulos de capitalização e pela prestação de serviços relacionados à saúde totalizaram R\$ 140,2 bilhões, 13,6%, acima do apresentado em 2012. Foram R\$ 91,6 bilhões em procedimentos médicos e odontológicos, R\$ 6 bilhões em sinistros pagos no segmento de seguro de pessoas, R\$ 15,7 bilhões na área de automóvel, R\$ 14,1 bilhões em resgates e sorteios em títulos de capitalização. Tais informações mostram a importância e o giro de capital que o mercado segurador exerce na economia brasileira.

A ferramenta essencial para o monitoramento da condição financeira das companhias de seguros é a margem de solvência, que serve com proteção dos interesses dos tomadores de seguros. Uma seguradora é considerada solvente quando o seu fluxo de receitas futuras, adicionado à margem de solvência, ultrapassa o fluxo de desembolsos futuros. Assim, solvência é a capacidade da companhia de seguro em cumprir com as responsabilidades assumida com seus contratantes. Dimensionar a solvência de uma seguradora equivale a determinar qual o montante do Patrimônio Líquido Ajustado (PLA) que ela deve dispor em adição aos valores representativos das provisões técnicas para ser considerada solvente, isto é, o capital mínimo para honrar os seus compromissos futuros acrescidos de elevada probabilidade. Caso contrário, não consiga solver os seus compromissos futuros, denominamos que a seguradora tem “*probabilidade de ruína*”. Por tanto, a insolvência se

concretizará quando os sinistros retidos pela seguradora ultrapassarem os prêmios puros retidos e todo o seu ativo líquido ajustado.

A *probabilidade de ruína* é um dos assuntos que vem se destacando no campo da Teoria de Análise do risco. A redução da taxa de sinistralidade é um desafio que se faz presente no setor segurador do país, tendo em vista que ela influencia diretamente os compromissos das seguradoras. No total do mercado de seguros, a sinistralidade subiu 4,2% passando de 44,7% em jan./mai. de 2013 para 48,9% em jan./mai. de 2014. Evidentemente que as seguradoras fazem o possível para honrar os incidentes, caso haja, com os seus contratantes, mantendo uma reserva suficiente para cobrir o que foi estabelecido no contrato. Portanto, é importante que a seguradora tenha ferramentas de controle que lhe indique a probabilidade de ocorrer insuficiências num determinado período de tempo. Por exemplo, saber qual a probabilidade de ficar com reserva negativa daqui a 8 anos, para, então, tomar medidas preventivas que evitem tal inconveniência. Pensando nisto, a utilização da “*probabilidade de ruína*” pode ajudar a contornar esse impasse, a partir dessa ferramenta a seguradora analisa os riscos de ficar com reservas insuficientes para cumprir seus compromissos, e ainda poder traçar estratégias para minorar que tais acontecimentos ocorram.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo aduzimos uma introdução ao tema de interesse e abordamos alguns conceitos que vamos explorar ao logo dessa monografia. No segundo capítulo realizamos uma revisão da literatura para explanar sobre a situação geral do mercado segurador no Brasil e no mundo, apresentando alguns dados relevantes sobre o mercado. No terceiro capítulo apresentamos alguns conceitos sobre o Processo de Contagem, a Teoria da Renovação e Processo de Poisson, finalizando com a apresentação do modelo clássico de Cramér-Lundberg para a reserva de uma companhia seguradora em tempo contínuo. No quarto capítulo definimos a probabilidade da ruína em tempo finito, a partir do modelo proposto por Cramér-Lundberg e os princípios matemáticos para seu cálculo, mostramos também a aproximação assintótica para a probabilidade da ruína de Cramér-Lundberg. No quinto capítulo descrevemos um modelo de reserva apresentado por Sheldon M. Ross em seu livro *Simulation*, de 1997, e a partir deste modelo, calculamos a probabilidade da ruína eventual. Também são apresentadas neste capítulo as estimativas da probabilidade da ruína observadas nas simulações. Por fim, no sexto capítulo apresentamos as principais conclusões deste trabalho.

As simulações feitas no desenvolvimento deste trabalho foram desenvolvidas a partir da linguagem de programação R, utilizado o software RStudio em sua versão 3.0.1 para o

sistema operacional Windows. Esta linguagem de programação, foi criada originalmente por Ross Ihaka e por Robert Gentleman no departamento de Estatística da Universidade de Auckland, Nova Zelândia. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Torgo (2009).

A motivação pra a realização do presente trabalho deve-se à ampliação do mercado segurador no Brasil nos últimos anos. Além disso, são encontrados na literatura poucos textos, em português, acerca da teoria do risco aplicada à atividade seguradora, mais especificamente sobre a *probabilidade da ruína*. Nosso trabalho, então, visa trazer mais esclarecimentos a respeito do assunto, pretendendo preencher parcialmente esta lacuna. Nosso objetivo, no entanto, é apresentar um embasamento teórico sobre a estimativa da probabilidade da ruína de uma seguradora, isto é, a probabilidade de uma seguradora ficar com uma reserva diminuta para pagar as indenizações decorrentes de um sinistro. E adicionalmente apresentar um modelo de simulação proposto por Ross (1997), para estimar essa probabilidade da ruína.

2. Seguro: Perspectivas Históricas

2.1 No Mundo

Muito mais antigo do que os primeiros registros a respeito do termo seguro é o instinto de conservação do ser humano. Desde a Pré-História são encontrados sinais da sua preocupação em se autoprotger, seja das intempéries, dos animais ou de outros semelhantes a ele. No início o homem era nômade e os riscos para sua sobrevivência eram constantes, a insegurança, a incerteza e o medo se faziam sempre presente, logo, tais sentimentos o levaram a criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e seu patrimônio.

Surge, então, a necessidade de se integrar em grupos e de se fixar em regiões que lhes proporcionassem segurança, não só a divisão de trabalho se inicia nesse contexto, como também o mutualismo, que pode ser definido como a formação de um grupo de pessoas com interesses em comum constituindo uma reserva econômica para dividir o risco de um acontecimento não previsto.

Há relatos de que as tentativas de se proteger contra os riscos ligados à atividade comercial vem da China antiga, desde 5000 a.C. A civilização chinesa, nessa fase, utilizava-se do rio Amarelo como via de transporte para mercadorias e pessoas. A principal prática, a fim de atenuar os prejuízos advindos de qualquer acidente que poderiam ser causados nas embarcações, era a distribuição das mercadorias dos vários comerciantes em diferentes barcos. Fragmentando-se as cargas, mesmo que ocorresse um naufrágio, nenhum comerciante perderia toda sua mercadoria, mas apenas frações. Assim, estavam imbuídos do conceito de diversidade como forma de diminuir o risco. Essa técnica, apesar de existir outras formas de minimizar prejuízos, ainda é muito utilizada atualmente.

Alguns autores fazem referência ao surgimento do seguro na Antiguidade, apontado como sua origem, geralmente, o clássico caso dos comerciantes da Babilônia no século XIII a.C., que preocupados com o risco de perda dos camelos durante a travessia do deserto em direção aos mercados das regiões vizinhas, formavam acordos nos quais quem perdesse um animal receberia outro pago pelos demais criadores. Tais compromissos serviriam para cobrir eventuais perdas ocorridas nas viagens. Assim, buscando minimizar suas perdas o homem

insere o seu primeiro seguro por volta de 1700 a.C., mesmo que de uma forma incipiente no código criado por Hamurabi (1728-1686 a.C.), famoso imperador da Babilônia, que abrangeu leis civis, políticas, militares e comerciais, representando um dos maiores monumentos jurídicos da antiguidade. Esse código promoveu a criação de uma associação que se encarregava de dar um novo barco aos comerciantes que perdiam o seu em consequência das tempestades, e um novo burro ao comerciante que tivesse perdido o seu (FREITAS et al., 1977), buscando, também proteger as caravanas que cruzavam o deserto.

Avançando mais no tempo, aproximadamente nos meados do século IX a.C. (200 anos antes da fundação de Roma) na Grécia Antiga, foram criadas as Leis de Rodes, estabelecendo os princípios e regulamentos que regem a atual Avaria Grossa, pois “se repartiam os prejuízos entre os donos das embarcações e os da carga, se um acontecimento, durante a viagem, obrigasse o capitão a provocar, por exemplo, uma variação para salvar o navio e a carga, ou se, para salvar a embarcação de tempestades ou outras fortunas do mar, o capitão tivesse de fazer o alijamento de cargas” (RIBEIRO, 1994).

No século XII teve-se notícia do denominado Contrato de Dinheiro a Risco Marítimo, em que o financiador lucrava emprestando a um navegante uma quantia em dinheiro, a fim de financiar sua viagem, tendo como garantia a embarcação e a carga transportada. Assim, se tudo ocorresse bem na viagem, o navegador devolvia a quantidade ofertada acrescido de “juros náuticos”. Por outro lado, caso a viagem não obtivesse sucesso, o financiador recuperava apenas parte do empréstimo realizado, pois se cessava a obrigatoriedade do pagamento do empréstimo.

Na Idade Média, porém, a Igreja proibiu a prática do mutualismo, pois era visto como sacrilégio, segundo o clero somente a vontade divina seria capaz de minorar as desgraças e infortúnios do homem. Em 1234, o Papa Gregório IX, baseando-se na usura, expediu decreto classificando o seguro marítimo como prática abusiva e que deveria ser proibido, fazendo com que o supracitado Contrato de Dinheiro a Risco Marítimo se encontrasse no rol de proibições. Com o intuito de burlar a proibição de contratação, do jeito que vinha sendo praticado, surgiu uma nova forma de operação denominada *Gratis at Amore*. Onde o financiador assume a postura de comprador, os navegadores obtinham com os banqueiros um contrato de compra da embarcação e da sua carga, acrescidos de uma cláusula rescisória, a qual seria utilizada se tanto a embarcação quanto as mercadorias chegassem ao local de destino sem sofrer nenhuma avaria. Neste caso, o navegante investia-se novamente na posse de seus bens, devendo restituir o dinheiro obtido com a venda dos mesmos e pagando uma

pesada multa em virtude da rescisão contratual efetiva. Na realidade repetia-se a mesma operação, porém encontrava-se mascarada com nova roupagem. Desta forma, a proibição do Papa Gregório IX às atividades de empréstimo propiciou o aparecimento do primeiro sistema propriamente de Seguro: *A Convenção de Seguro*.

Deste modo, o seguro marítimo pode ser classificado como um dos mais antigos e base para vários outros. Os italianos, seguidos pelos espanhóis, foram os precursores. Passaram-se aproximadamente cem anos, desde o surgimento da *Convenção de Seguro*, para que se chegasse ao primeiro contrato de seguro que foi redigido em italiano em 1347, em Gênova, na Itália. O seguro tinha ligação com a navegação mercantil e ainda não contava com a figura da seguradora como gerente de risco.

O seguro como é conhecido atualmente, começou a se estabelecer na Inglaterra, durante a Revolução Industrial, quando foram criadas as primeiras sociedades de seguros. A mais significativa delas foi a Lloyd's. Foi Edward Lloyd, comerciante londrino, que em 1687, transformou uma taberna e um jornal, e fez surgir a mais tradicional companhia de seguros do mundo. De acordo com Bernstein (1997), “quando um negócio era fechado, quem assumia o risco confirmava sua concordância em cobrir o prejuízo em troca de um prêmio específico assinando seu nome sob (*under*) os termos do contrato; logo esses operadores de seguro individuais passaram a ser chamados *underwriter*”.

Os avanços de Pascal na Estatística, nesta época, foram fundamentais para a atividade seguradora decolar. Em 1654, com seu trabalho *Geometria do acaso* tornou possível a elaboração das “tábuas de mortalidade”. Baseado neste trabalho o holandês John de Witt, em 1671, calculou a probabilidade de uma pessoa, em cada ano de sua vida, morrer num determinado período de tempo.

O astrônomo inglês Edmond Halley, descobridor do cometa que leva seu nome, publicou em 1693 as tabelas de expectativas de vida, que consistiam na observação de sobrevivência de um determinado grupo de pessoas de um ano pro outro. Somente em 1815, com Milne, a primeira tábua de vida que utiliza conceitos atuariais é encontrada na literatura.

É criada na Inglaterra, em 1728, a primeira seguradora (Sun Fire Office) atuante no ramo de incêndio, 62 anos após o grande incêndio de Londres, que destruiu 18.000 casas, deixando desabrigadas 20 mil famílias; na França, a primeira seguradora específica do ramo surgiu em 1786 (PÓVOAS, 2000).

Em 1755, o matemático inglês James Dodson publicou seus cálculos sobre o preço de um *Seguro Vida Inteira*, e introduziu o conceito de provisão matemática. A ele é atribuída à

paternidade da matemática atuarial (AZEVEDO, 2008). Registra-se, em 1782 na Inglaterra, a emissão de mais de três mil apólices pela sociedade mútua Equitable Assurance Society.

O primeiro *Código Uniforme de Seguro* foi publicado em 1789, proporcionando a universalização dos seguros.

Na Inglaterra, em 1785, o Conselho do Rei autorizou a criação da Companhia de Seguro Incêndio, no ano seguinte o ativo da companhia já havia apresentado um crescimento de 10% do ativo.

No século XVIII, surgem as primeiras companhias seguradoras no ramo vida e esta atividade ganha grande impulso durante o século XIX, sobretudo na Grã-Bretanha (HURTADO, 2000).

Visando coibir abusos e estimular o senso de responsabilidade, Napoleão Bonaparte promulgou em 1804 o Código Civil que dispôs em seu artigo 1383 o seguinte: “cada um é responsável pelos danos que causar, não apenas por sua ação, mas também por sua imprudência ou negligência” (RIBEIRO, 1994).

Ao longo da evolução ocorrida durante o século XIX, houve grande proliferação de sociedades seguradoras constituídas em bases racionais conhecedoras da técnica securitária. Tais seguradoras se expandiram em diversos novos ramos de seguro. Data também desse século o surgimento do resseguro, assim como a constituição de entes estatais para supervisionar o mercado de seguros. Não menos importante que todos esses acontecimentos foi o surgimento, na segunda metade do século XIX, dos chamados seguros sociais (BÜCHNER, 1976).

2.2 No Brasil

A atividade seguradora no Brasil passa a ter expressão a partir de 1808, com vinda da Corte Imperial portuguesa e a abertura dos portos ao comércio internacional. A primeira sociedade seguradora a funcionar no país é datada de 24 de fevereiro do mesmo ano, com sede na Bahia, e denominada Companhia de Seguros Boa-Fé, tinha por objetivo operar no seguro marítimo. A companhia foi criada, dirigida e regulada pela Casa de Seguro de Lisboa, prevalecendo no seu funcionamento às regras de seguro com base nas leis de Portugal, as quais haviam sido baixadas em 1791 e reformuladas em 1820. No Rio de Janeiro, em 1810, criou-se a companhia de seguros Idenidade que tinha características idênticas a anterior.

Até 1822, ano da independência, todas as seguradoras que foram surgindo, assim como as regras do seguro, continuaram baseadas na legislação Portuguesa, que se sujeitava às normas comerciais da Europa. A legislação interna sobre o seguro continuou precária até que em 25 de junho de 1850 foi promulgado o código comercial que, embora tratasse apenas do seguro marítimo, estabeleceu com clareza os direitos e deveres entre as partes contratantes e se constituiu em medida legislativa de significativo alcance para o desenvolvimento do setor. Já que os demais tipos de seguros eram, na época, muito incipiente, havendo praticamente uma seguradora que operava com seguros terrestres, a Argos Fluminense, fundada em 1845 e sendo atualmente a Chubb do Brasil.

O código comercial brasileiro, de 1850, continha proibições acerca do seguro sobre a vida de pessoas livres, no entanto, o seguro sobre a vida de escravos era permitido, já que, em tal ocasião, eles eram considerados como objeto de propriedade. No mesmo período existia a Cia. De Seguros Mútuos sobre a vida de escravos, cuja fundação data de 1858. A companhia de Seguros Tranquilidade só foi autorizada a explorar o seguro de vida em 1855, sob o fundamento de que o código só proibia o seguro de vida quando feito juntamente com o seguro marítimo, tornando-se a primeira a comercializar seguros de pessoas.

A primeira seguradora estrangeira autorizada a operar no Brasil, após a Independência, teria sido a empresa Garantia, portuguesa, mais especificamente da região do Porto, e as operações feitas pela mesma teria ocorrido a partir de 1862. Em 1864, surge a segunda empresa de seguros autorizada a funcionar no Brasil, a Royal Insurance (GUERREIRO, 2004).

O esboço da regulamentação de seguro só surgiu no Brasil a partir de 1860. No entanto, somente em 10 de dezembro de 1901, com o advento do Decreto nº 4.270, houve um aprofundamento da regulamentação, havendo, assim, a ocorrência de regras precisas sobre as operações de seguros e a criação da Superintendência Geral dos Seguros, cuja principal atribuição era fiscalizar as operações de seguros. No final de 1902, pela Lei 953, o Governo introduziu várias alterações no Decreto nº 4.270, uma vez que continha uma gama de medidas restritivas, principalmente no que se refere à constituição das reservas técnicas e matemáticas. Os seguros terrestres só passaram a ter regulamentação específica com promulgação do Código Civil, em 1º de janeiro de 1916, que dedicou 44 itens à regulamentação dos princípios do contrato do seguro.

O primeiro sindicato dos corretores de seguros e o primeiro sindicato das seguradoras foram criados, respectivamente, em 1932 e em 1933, ambos no Rio de Janeiro. A profissão de corretor de seguros só foi regulamentada em 1964, pela Lei nº 4.594 (AZEVEDO, 2008).

Pelo Decreto-Lei nº 1.186, foi criado, em 1939, o Instituto de Resseguro do Brasil (IRB). Em 1951, foi fundada no Rio de Janeiro, a Federação Nacional das Empresas de Seguros Privados e de Capitalização (Fenaseg).

Em 1966, surge o Decreto-Lei nº 73, que reformula toda a política de seguros brasileira, nele se dispôs sobre o Sistema Nacional de Seguros Privados (SNSP), que tem como objetivo coordenar a política de seguro e preservar a liquidez das seguradoras. O decreto ainda gerou um órgão normativo, o Conselho Nacional de Seguros Privados (CNPS), e dois executivos, o Instituto de Resseguros do Brasil, das Seguradoras e dos Corretores de Seguros (IRB) e a Superintendência de Seguros Privados (Susep), que absorveu as funções do Departamento Nacional de Seguros Privados e Capitalização.

Em 1971, é criada a Fundação Escola Nacional de Seguros (Funenseg), instituição que originalmente se dedicava ao aperfeiçoamento do mercado de seguro por meio do desenvolvimento e da disseminação de conhecimento e da capacitação de profissionais e, a partir de 1991, foi-lhe atribuída, também, a incumbência de divulgar, institucionalmente, o Seguro. A Federação Nacional dos Corretores de Seguros (Fenacor) foi criada, em 1975, no Rio de Janeiro.

2.3 Mercado Atual de Seguros no Brasil

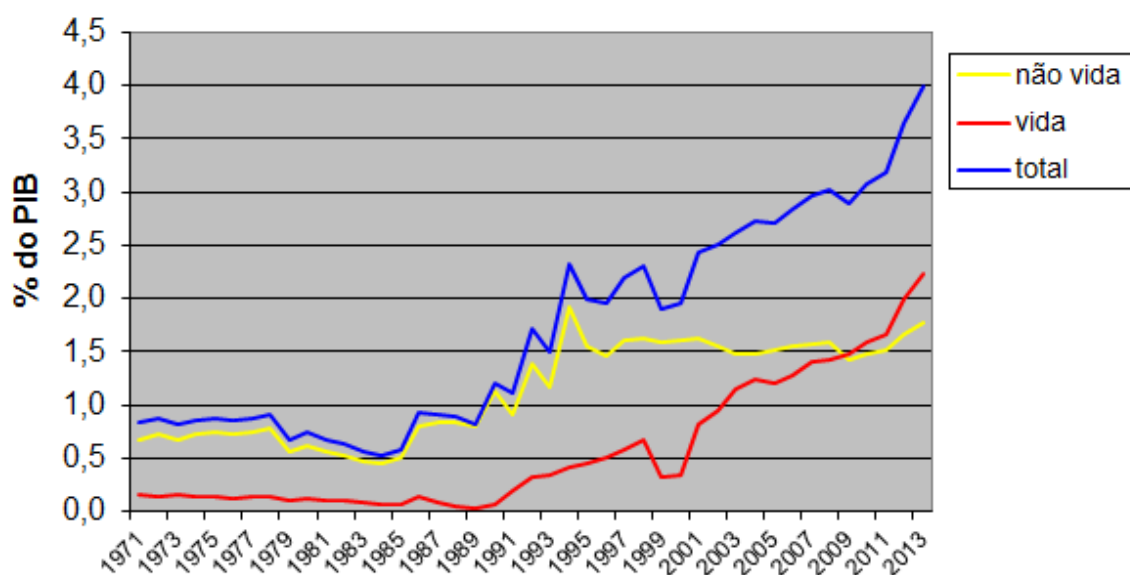
Entre a década de 70 e o final da década de 80 o mercado de seguros, previdência privada e capitalização se encontravam praticamente estagnados. Fatores como a falta de legislação e regulamentação para o setor, falta de concorrência, baixo poder de compra e inflação prejudicaram bastante o ramo de seguros. Em épocas de alta inflação, a moeda se desvaloriza de tal modo que nem mesmo a correção monetária das apólices é suficiente para repor os bens sinistrados.

As reformas que aconteceram nos primeiros anos da década de 90, deram início a um período de crescimento para o setor, que foi ainda mais expressivo depois da estabilização monetária, de 1994, que controlou a hiperinflação. Assim, o Plano Real foi muito importante para explicar a explosão de seguros no Brasil. Consumidores que antes eram esquecidos e

com baixo poder de compra, principalmente no que se refere a bens intangíveis como o seguro, foram trazidos pela estabilidade econômica para o mercado de seguros.

A participação da indústria de seguros no PIB brasileiro é um indicador que confirma o desenvolvimento do mercado segurador, não só para o setor como para a própria economia do país. Tendo em vista que, além de gerar empregos, garantir renda e dar segurança, os recursos que as seguradoras acumulam para garantir o pagamento das indenizações para os segurados são reinvestidos na economia. A receita anual com contribuições de planos de previdência e prêmios de seguros passou de US\$ 32 por habitante, em 1990, para US\$ 443 em 2013, fazendo o quociente dessa receita contra o PIB subir de 1,2% para 4,0%, no mesmo período. Em 2013, com uma produção global de R\$294,2 bilhões, a participação do setor segurador brasileiro no PIB passou a representar 6,1% dos R\$ 4,844 trilhões dos bens e serviços produzidos no país. Em 2008, a participação do setor era equivalente a 4,87%, ou seja, houve um crescimento acumulado de 24,60% da participação do setor segurador no PIB ao longo dos últimos cinco anos. No entanto, a participação do mercado de seguros no PIB brasileiro ainda é muito baixa, principalmente se compararmos com países industrializados, como é o caso dos Estados Unidos, maior mercado segurador do mundo, e o Japão, que juntos representam 90% do total mundial de seguros. A Figura 1 mostra a evolução do crescimento do mercado de seguros no Brasil, de 1994 até 2013, com relação ao PIB.

Figura 1: Coeficiente de Entrada no Mercado de Seguros e Previdência Privada Aberta no Brasil (Arrecadação/PIB)

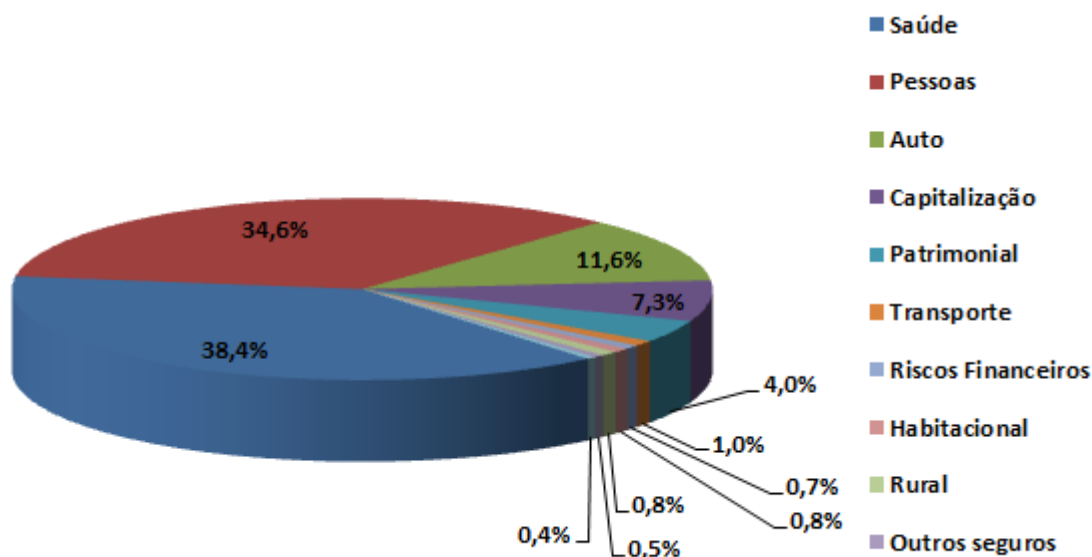


Fonte: SwissRe, Susep e IPEA

No Brasil as seguradoras caracterizam-se por operarem em vários ramos, seguros gerais, de pessoas, previdência complementar, capitalização e saúde suplementar, alcançando não só as seguradoras especializadas em saúde, mas todas as modalidades de operadoras. A falta de especialização das seguradoras brasileiras pode ser vista como um problema, isso porque não é fácil administrar carteiras com riscos, tamanhos, segurados e rentabilidades distintas.

Em 2013, o mercado segurador brasileiro encerrou o ano com 1.662 empresas em atividades. Desse total, de 121 são companhias de seguros, das quais 12 especializadas em saúde e 30 em vida e Previdência. O setor ainda possui 16 empresas de Capitalização, 26 entidades abertas de Previdência Complementar (EAPCs). A Figura 2 traz a participação das principais modalidades de seguro praticadas no país. Assim, podemos perceber que o mercado de seguros brasileiro é fortemente concentrado em três sub-ramos: seguros de pessoas, seguro saúde e seguro de automóveis, onde juntos estes detiveram 84,4% da receita em 2013.

Figura 2: Receita de Prêmios de Seguros por Ramo em 2013 (% do total)



Fonte: Susep

O mercado de seguros arrecadou, em 2013, um total de R\$ 294,2 bilhões em prêmios, títulos de capitalização e contribuições, tendo um crescimento de 14,3% em relação aos R\$ 257,4 bilhões em 2012. O crescimento mais expressivo foi observado no segmento de Capitalização, que arrecadou R\$ 21 bilhões, o que representou um aumento de 26,4% em

relação aos R\$ 16,6 bilhões de 2012. O setor de saúde suplementar teve um crescimento de 16,3%, atingindo R\$ 112,8 bilhões em contraprestações, o setor de seguros gerais alcançou crescimento de 18%, arrecadando R\$ 60,6 bilhões de prêmios. Já o segmento de pessoas, que abrange as operações de previdência, seguro de vida e acidentes pessoais, auferiu receita global de R\$ 99,8 bilhões, tendo um crescimento de 7,9% em relação a 2012. Esses valores podem ser facilmente identificados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores referentes aos Prêmios Diretos de Seguros, Contribuições de Previdência, Receita com Títulos de Capitalização e Contraprestação de Saúde Suplementar.

Valores em mil

Segmentos	2008	2012	2013	Variação % 2013/2008	Variação % 2013/2012
Seguros Gerais	32.292.090	51.346.084	60.566.030	87,56%	17,96%
Pessoas	43.900.721	92.464.699	99.805.505	127,34%	7,94%
Saúde Suplementar	62.566.551	97.018.000	112.842.000	80,36%	16,31%
Capitalização	9.012.808	16.591.729	20.973.846	132,71%	26,41%
Total do Mercado	147.772.170	257.420.512	294.187.381	99,08%	14,28%

Fonte: FenaCap, FenaPrevi, FenaSaúde e FenSeg

No ano de 2013, recursos gastos com Sinistros, Resgates e Capitalização totalizaram R\$ 140,2 bilhões, 13,6%, acima do apresentado em 2012. Foram R\$ 6 bilhões em sinistros pagos no segmento de seguro de pessoas, R\$ 15,7 bilhões na área de automóvel, R\$ 91,6 bilhões em procedimentos médicos e odontológicos, R\$ 14,1 bilhões em resgates e sorteios em títulos de capitalização e 120.637 benefícios pagos no segmento de planos de caráter previdenciário. A sinistralidade do mercado em 2013 (67,40%) situou-se um pouco abaixo do índice registrado no ano anterior (69,68%). Já em valores absolutos, com um montante de R\$ 140,22 bilhões pagos em sinistros, benefícios e resgates, contabilizou-se um crescimento de 13,57% sobre o montante pago em 2012 (R\$ 123,47 bilhões).

Tabela 2: Valores referentes aos Prêmios Ganhos de Seguros, Receitas com Títulos de Capitalização e Contraprestações Ganhas de Saúde Suplementar.

Valores em mil

Segmentos	2012			2013			Variação % 2013/2012	
	Arrecadação	Sinistros Benefícios Resgates	Sinistralidade	Arrecadação	Sinistros Benefícios Resgates	Sinistralidade	Arrecadação	Sinistros Benefícios Resgates
Gerais	45.070.191	26.164.780	58,05%	52.650.303	28.517.973	54,16%	16,82%	8,99%
Pessoas	18.627.266	5.989.568	32,12%	21.552.646	5.987.559	27,78%	15,70%	0,08%
Planos de Risco	18.627.266	5.989.568	32,12%	21.552.646	5.987.559	27,78%	15,70%	0,08%
Saúde Suplementar	97.018.000	79.870.000	82,32%	112.842.000	91.613.000	81,19%	16,31%	14,70%
Capitalização	16.478.232	11.451.299	69,49%	20.988.795	14.103.981	67,20%	27,37%	23,16%
Total do mercado	177.193.689	123.468.648	69,68%	208.033.744	140.222.513	67,40%	17,40%	13,57%

Fonte: FenaCap, FenaPrevi, FenaSaúde e FenSeg

A ascensão econômica e social de cerca de 50 milhões de brasileiros amplia o público consumidor de seguros, isso porque quanto mais uma nação produzir, maiores serão os riscos existentes. A lógica é simples: com maior acesso a bens de consumo e capital, as pessoas passam a ter maior interesse em proteger seu patrimônio, e passam a ter patrimônio para proteger. Assim o crescimento da economia é um importante determinante do desenvolvimento do seguro. Estima-se que apenas cerca de 17,5% da população tenha algum tipo de seguro, o que mostra o grande potencial do mercado. Além disso, o Brasil ainda tem uma grande carência de infraestrutura, o que deve forçar investimentos ainda no curto prazo. Até 2020, estima-se que cerca de R\$ 1,5 trilhão sejam investidos em infraestrutura e logística, esses projetos devem passar pelo mercado segurador.

3. Modelo Clássico de Cramér-Lundberg

O modelo clássico de risco de seguro, segundo Embrechts, Furrer e Kaufmann (2003), teve sua origem no trabalho de Filip Oskar Lundberg, que em sua famosa tese, *Approximations of the Probability Function Reinsurance of Collective Risks*, de 1903, determinou a fundamentação da teoria atuarial de risco. Lundberg concluiu que processos de Poisson atingiam o ponto central dos modelos de riscos não-vida, ramo de seguro que engloba todos os riscos que têm como objeto bens patrimoniais e também os seguros pessoais (exceto o seguro de vida), como por exemplo responsabilidade civil de veículos, acidentes de trabalho, seguro de doença, seguro de viagem etc. Assim, através de uma transformação sutil do tempo Lundberg foi capaz de restringir sua análise para o processo homogêneo de Poisson.

Utilizando o processo de Poisson homogêneo Lundberg modelou o número de indenizações que chegavam a uma companhia de seguro até um tempo t , ficando o trabalho conhecido na literatura como modelo clássico de risco. No entanto, em seu trabalho, Lundberg adotou uma terminologia muito difícil, o que impossibilitou vários outros atuários da época de entenderem a sua obra. Além disso, seu trabalho foi escrito no tempo em que ainda não tinham sido desenvolvidas as bases teóricas de processos estocásticos.

Posteriormente, em 1930, Harald Cramér incorporou ao trabalho de Lundberg a teoria emergente de processos estocásticos, inserindo suas ideias em um contexto de fácil entendimento. Ao realizar isto, Cramér contribuiu consideravelmente para a estruturação tanto da matemática para seguros não-vida quanto para a teoria da probabilidade. É nesta fase que o modelo ficou conhecido como o modelo clássico de Cramér-Lundberg ou modelo clássico de risco coletivo (SHIRYAEV, 1999).

Foi, então, através do modelo clássico de risco coletivo que se iniciou os primeiros estudos sobre a probabilidade de uma seguradora ficar com reserva insuficiente para pagar aos segurados pelos prejuízos decorrentes de um sinistro que tenha cobertura contratual. O comportamento desta probabilidade, tanto no tempo infinito como no tempo finito, é amplamente discutido na Teoria da Ruína.

3.1 Conceitos Básicos

Nesta sessão introduziremos alguns conceitos elementares que serão utilizados na descrição do modelo de ruína.

A lei de probabilidade que rege um determinado evento aleatório pode mudar ao longo do tempo, fazendo com que possamos considerar para cada instante de tempo uma variável aleatória $N(t)$ que representará tal acontecimento, onde instantes distintos resultarão em probabilidades (possivelmente) distintas. A sucessão dessas variáveis aleatórias é definida por processo estocástico.

Um fenômeno estocástico é um processo cujo comportamento envolve o acaso, ou seja, é um processo não determinístico, onde cada estado desse processo não determina completamente qual será o seu estado seguinte. Isto significa que mesmo que a condição inicial seja conhecida, existem vários eventos possíveis, porém alguns caminhos são mais prováveis que outros. Assim, os processos estocásticos representam sistemas nos quais o estado muda ao longo do tempo. Estas mudanças não são totalmente previsíveis, mas elas estão associadas a distribuições de probabilidade.

Formalmente, chamaremos de processo estocástico a qualquer família de variáveis aleatórias $N(t)$, com $t \in T$, onde T é o conjunto de índices do processo e t é o parâmetro do processo. Quanto à natureza das medições temporais, os processos estocásticos podem ser classificados como processo estocástico em tempo discreto, quando T for um conjunto enumerável ($T = \{0, 1, 2, \dots\}$), ou como processo estocástico em tempo contínuo, quando T for um conjunto não enumerável ($T = [0, +\infty)$).

Sendo $\{N(t); t \in T\}$ um processo estocástico podemos definir o incremento correspondente ao intervalo $(s, t]$ como sendo a variável aleatória $N(t) - N(s)$, $t > s$, $s, t \in T$. Dizemos que o processo tem incrementos independentes se, para $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, as variáveis aleatórias $N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_{n+1}) - N(t_n)$ são independentes. Em outras palavras, um processo terá incrementos independentes quando os incrementos correspondentes a intervalos de tempo com interseção vazia forem independentes. Além disso, dizemos que o processo tem incrementos estacionários se, para quaisquer $t_i < t_k$ a variável aleatória $N(t_k) - N(t_i)$ tiver a mesma distribuição da variável aleatória $N(t_{k+h}) - N(t_{i+h})$, para todo $h \in \mathbb{R}_+$. Estas duas definições são importantes se quisermos descrever um processo de Poisson, como veremos mais à frente nas subseções seguintes.

3.1.1 Processo de Contagem

Um processo estocástico é um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ se $N(t)$ representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo $(0, t]$. $N(t)$ é definido sobre um espaço amostral Ω , com espaço de estados $E = \mathbb{N}$ e para todo $t, s \geq 0$ que satisfaça as seguintes propriedades:

- i. $N(0) = 0$ e $N(t) \geq 0$;
- ii. $N(t) \leq N(t + s)$;
- iii. $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo $(s, t]$, para $s < t$.

Um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ é dito ter incrementos independentes se para quaisquer grupos de n instantes de tempo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, tem-se que as variáveis aleatórias:

$$N(0), N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

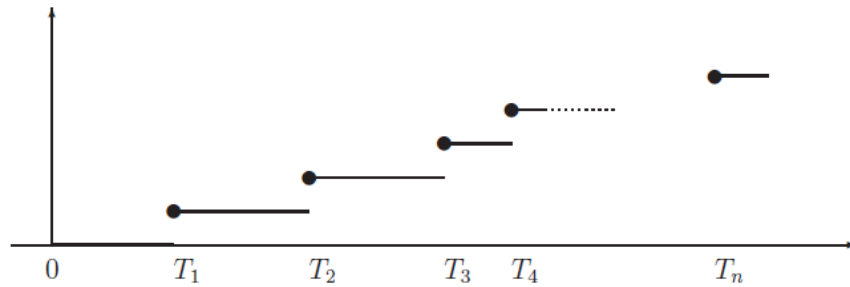
são independentes. Assim, se o número de eventos ocorridos em intervalos de tempo disjuntos é independente, dizemos que o processo de contagem tem incrementos independentes.

Quando $\{N(t); t \geq 0\}$ tiver incrementos independentes e $N(t) - N(s)$ a mesma distribuição que $N(t + h) - N(s + h)$ para todo $s, t, h \geq 0$ e $s < t$, então o processo é dito ter incrementos independentes e estacionários. O processo de Poisson, que será apresentado mais adiante, é um exemplo de processo com incremento independente e estacionário.

3.1.2 Processo de Renovação

Considere um processo de contagem, onde T é uma variável que representa o tempo com $T \geq 0$. As variáveis $T_n; n \geq 1$ modelam os instantes sucessivos de ocorrência de um determinado fenômeno que se repete, após cada ocorrência, o primeiro em T_1 , o segundo em T_2 e assim por diante, assim a variável aleatória T_i denota o tempo em que o i -ésimo evento ocorre. Os valores t_i assumidos pelas realizações de T_i são chamados de tempo de chegada ou de ocorrência. Estas variáveis definem um processo a tempo discreto. Uma trajetória típica deste processo é apresentada na Figura 3 a seguir:

Figura 3: Trajetória típica de um Processo de Contagem



Um processo de renovação é uma sequência ordenada de variável aleatória $\{Z_n, n \geq 1\}$, onde $Z_i = T_i - T_{i-1}$, $T_0 = 0$ e Z_n denota o tempo entre os $(n - 1)$ primeiros eventos e o n -ésimo evento. Essa sequência é estritamente crescente $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_k \leq \dots$, com variáveis aleatórias, assumindo valores em \mathbb{R} e satisfazendo as seguintes condições:

- i. As variáveis $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_{n+1} - T_n, n \geq 1$ são independentes entre si.
- ii. As variáveis $T_{n+1} - T_n, n \geq 1$ são identicamente distribuídas.

Assim, um processo de renovação é como um processo de contagem onde o intervalo entre eventos sucessivos são variáveis aleatórias positivas independentes e identicamente distribuídas com uma distribuição arbitrária.

Para maiores detalhes sobre o Processo de Renovação consultar, por exemplo, Feller (1971), Grimmett & Stirzaker (2001) e Tijms (2003).

3.1.3 Processo de Poisson

Um processo de Poisson é um processo estocástico, que deve o seu nome ao matemático e físico francês Siméon Denis Poisson (1781 - 1840). Veremos que ele pode ser definido em termos das ocorrências de eventos continuamente e independentemente um do outro.

O processo de Poisson é uma coleção $\{N(t); t \geq 0\}$ de variáveis aleatórias, onde $N(t)$ é o número inteiro que representa o número de chegadas ou eventos até o tempo t (começando do tempo 0). O processo de Poisson é, portanto, um processo estocástico a tempo contínuo, isto é $T = [0, \infty)$, e com espaço de estados $E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. O número de eventos entre o tempo a e o tempo b é dado por $N(b) - N(a)$ e segue uma distribuição de Poisson.

Um processo de contagem $N(t)$ é dito ser um processo de Poisson homogêneo de intensidade $\lambda > 0$ para todo $t > 0$, se as seguintes hipóteses forem satisfeitas:

- i. $N(0) = 0$;
- ii. $N(t)$ tem incrementos estacionários e independentes;
- iii. se $\forall t, P(N(t, t+h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$ quando $h \rightarrow 0$, com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$;
- iv. se $\forall t, P(N(t, t+h) \geq 2) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0$, com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Num processo de Poisson homogêneo, tem-se que $E[N(t)] = \lambda t$ e $Var[N(t)] = \lambda t$. Portanto, segundo Hélio Lopes (2008), o valor esperado do número de eventos no intervalo unitário $(0, 1)$, ou qualquer outro tamanho unitário, é igual a λ . A função densidade de um processo de Poisson é dada por:

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2 \dots \quad (3.1)$$

em que λ é o parâmetro que indica a taxa média ou intensidade do processo e representa o número médio de eventos ocorridos por unidade de tempo.

O tamanho dos intervalos de tempos $\{Z_n, n \geq 1\}$ de um processo de Poisson homogêneo $N(t)$ com intensidade λ , são variáveis aleatórias exponenciais com taxa λ independentes entre si. O parâmetro λ representa a frequência de sinistralidade esperada para uma unidade de tempo, isto é, o número médio de sinistros declarados por unidade de tempo. E o número de eventos que ocorrem em um intervalo de tamanho t num processo de Poisson é uma variável aleatória discreta de Poisson com taxa λt .

A função geradora de momento de um processo de Poisson homogêneo $N(t)$ é dada por:

$$M_{N(t)}(r) = E(e^{rN(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{rk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t(e^r - 1)} \quad (3.2)$$

Calculando as três sucessivas derivadas da função geradora de momentos em relação à r , no ponto $r = 0$, podemos encontrar os momentos ordinários em relação à origem de $N(t)$.

Desta forma, obtemos:

- $M'_{N(t)}(r) = \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)}$;
- $M''_{N(t)}(r) = \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)} + (\lambda t e^r)^2 e^{\lambda t(e^r - 1)}$;
- $M'''_{N(t)}(r) = \lambda t e^r e^{\lambda t(e^r - 1)} + 3(\lambda t e^r)^2 e^{\lambda t(e^r - 1)} + (\lambda t e^r)^3 e^{\lambda t(e^r - 1)}$.

Substituindo $r = 0$, podemos obter o primeiro, o segundo e o terceiro momento em relação à origem de $N(t)$ que são:

- $E[N(t)] = \lambda t$;
- $E[N^2(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2$;
- $E[N^3(t)] = \lambda t + 3(\lambda t)^2 + (\lambda t)^3$;

Dizemos que um processo de contagem $N(t)$ é um processo de Poisson não homogêneo de intensidade $\lambda > 0$ para todo $t > 0$, se as seguintes hipóteses forem satisfeitas:

- $N(0) = 0$;
- $N(t)$ tem incrementos independentes;
- se $\forall t, P(N(t, t+h) \geq 1) = \lambda(t)h + o(h)$ quando $h \rightarrow 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = \lambda(t)$;
- se $\forall t, P(N(t, t+h) \geq 2) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

No processo de Poisson não homogêneo, $N(t+s) - N(s)$ é a variável aleatória com distribuição Poisson e média $m(t+s) - m(s)$, onde

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

3.1.4 Processo de Poisson Composto

O modelo que desejamos descrever está relacionado com o montante e o número de indenizações a que um conjunto de apólices dá origem. Por isso, introduziremos outro conceito que é o processo estocástico composto.

Seja um processo de contagem $\{N(t), t > 0\}$, uma família de variáveis aleatórias X_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, independentes entre si e identicamente distribuídas que são independentes de $N(t)$, e definidas como:

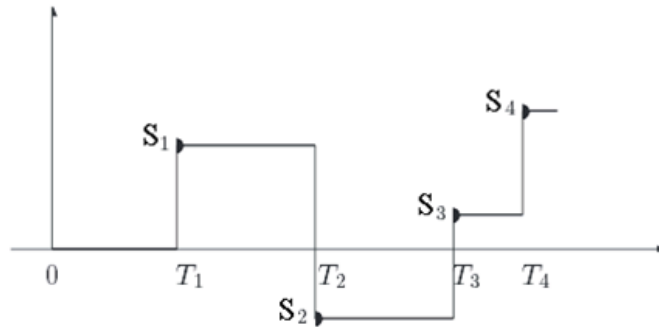
$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

onde $X_0 = 0$, então $S(t)$ é um processo estocástico composto. No caso de $\{N(t), t > 0\}$ ser um processo de Poisson, então $S(t)$ descreverá um processo de Poisson Composto. Assim, um processo de Poisson composto tem as seguintes características:

- As trajetórias têm um número finito de saltos sobre intervalos finitos;
- $\forall t, h \geq 0, N_{t+h} - N_t$ é independente do passado $\{Z(u), u \leq t\}$;
- $\forall t, h \geq 0$, a distribuição de $N_{t+h} - N_t$ independente de t .

A Figura 4 ilustra uma trajetória associada a um processo de Poisson composto.

Figura 4: Possível trajetória de um processo de Poisson Composto



A função geradora de momentos de um processo de Poisson Composto é dada por:

$$\begin{aligned}
 M_{S(t)}(r) &= E[E(e^{rS(t)}|N(t))] \\
 &= \sum_n E(e^{rS(t)}|N(t) = n) P(N(t) = n) = \sum_n E(e^{r \sum_{k=1}^n X_k}) P(N(t) = n) \\
 &= \sum_n E(e^{rX})^n P(N(t) = n) = \sum_n M_X(r)^n P(N(t) = n) \\
 &= E(M_X(r)^{N(t)}) = E(e^{N(t) \ln M_X(r)}) \\
 &= M_{N(t)}(\ln M_X(r))
 \end{aligned}$$

Substituindo a função geradora de momentos de $N(t)$ temos que:

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t (M_X(r) - 1)} \quad (3.5)$$

Vamos encontrar os três primeiros momentos calculando as três sucessivas derivadas da função geradora de momentos em relação à r , em seguida avaliá-los no ponto $r = 0$. Desta forma, obtemos:

- $E[S(t)] = m'_{S(t)}(0) = \lambda t E(X)$;
- $E[S(t)^2] = m''_{S(t)}(0) = \lambda t E(X^2) + (\lambda t)^2 E^2(X)$;
- $E[S(t)^3] = m'''_{S(t)}(0) = \lambda t E(X^3) + 3(\lambda t)^2 E(X^2)E(X) + (\lambda t)^3 E^3(X)$;

3.2 Modelo de Cramér-Lundberg

O teorema clássico de Cramér-Lundberg, base da modelagem atuarial (principalmente no ramo não vida), fornece uma estimativa para a probabilidade de ruína de uma seguradora. A fim de definir um modelo de risco clássico, vários aspectos são levados em consideração na sua construção, tais como o capital inicial da empresa, a quantidade de prêmios (prestações

pagas pelos segurados para a contratação do seguro) recebidos por unidade de tempo e a quantidade de sinistro que chegam à empresa em um determinado momento. Porém, o modelo descarta fatores tais como força de juros na formação da provisão e encargos de gestão, entre outros.

No modelo clássico de risco coletivo o número de indenizações ocorridas no intervalo $(0, t]$ segue um processo de Poisson homogêneo $\{N(t), t > 0\}$ de intensidade $\lambda > 0$, $N(0) = 0$ e $E(N(t)) = \lambda t$, onde as chegadas das indenizações ocorrem em momentos aleatórios $T_1, T_2 \dots$. Isso significa que os tempos entre chegadas de eventos são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas. No contexto de seguro, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ representa uma sequência de variáveis aleatórias em que cada uma das variáveis X_i diz respeito ao valor da i -ésima indenização individual associada a um sinistro ocorrido no intervalo $(0, t]$. As variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ são independentes identicamente distribuídas não negativas, com função de distribuição igual a $F(x) = P(X_i \leq x)$, $F(0) = 0$, com média igual a μ e variância σ^2 . Sua função geradora de momentos, caso exista, é dada por $m_{X_i}(r) = E[e^{rX_i}]$. Como temos que $N(t)$ e $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ são independentes, então a expectativa de risco do processo $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ tem que $E(S(t)) = \lambda t \mu < \infty$.

Então, o modelo clássico de risco coletivo é um processo estocástico definido conforme a equação abaixo:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

onde $U(t)$ é a reserva de risco de uma seguradora até o instante t , é suposto que a reserva inicial da seguradora seja $U(0) = u$. Os prêmios são recebidos continuamente a uma taxa constante $c > 0$, ou seja, os pagamentos recebidos no intervalo de tempo $(0, t]$ são constantes e iguais a $\pi(t) = ct$.

Vale resaltar mais uma vez que o modelo proposto por Cramér-Lundberg não leva em consideração alguns fatores associados com as despesas administrativas, as despesas com contratos de seguro, as taxas de juros, a inflação nem os rendimentos provenientes de investimentos. Ele utiliza os prêmios arrecadados como única forma de geração da reserva da companhia de seguro e as indenizações como único fator de redução dessa reserva, ou seja, o modelo leva em conta apenas as indenizações e os prêmios para gerar a reserva da companhia de seguro.

Como o número de indenizações $N(t)$ é um processo de Poisson homogêneo, então com base nos conceitos apresentados nas sessões anteriores podemos concluir que o processo

das indenizações agregadas $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ é um processo de Poisson composto homogêneo que possui a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, x \geq 0, \quad (3.7)$$

onde $F^{*n}(x) = P(\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$ é a n-ésima convolução de $F_X(x)$. A esperança e variância de $S(t)$ são dadas respectivamente por:

$$E[S(t)] = \lambda t E[X] = \lambda t \mu \quad (3.8)$$

$$V[S(t)] = \lambda t E[X^2] = \lambda t [\sigma^2 + \lambda^2] \quad (3.9)$$

A função geradora de momentos para um processo de Poisson composto homogêneo, $S(t)$ é dada por:

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t (m_X(r) - 1)} \quad (3.10)$$

Diante disso é possível perceber que a função geradora de momentos de $S(t)$ existe se a função geradora de momentos da variável aleatória X existe. Para mais detalhe sobre as equações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) ver o Apêndice 1 dessa monografia.

Conhecendo a esperança e a variância de $S(t)$ podemos perceber que a variável aleatória $U(t)$, que representa o nível de reserva de uma companhia de seguro no tempo t , tem valor esperado

$$\begin{aligned} E[U(t)] &= E[u + ct - S(t)] = u + ct - E[S(t)] = u + ct - \lambda t E[X] \\ E[U(t)] &= u + t(c - \lambda \mu) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e variância

$$\begin{aligned} Var[U(t)] &= Var[u + ct - S(t)] = Var[S(t)] = \lambda t E[X^2] \\ Var[U(t)] &= \lambda t [\sigma^2 + \lambda^2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vale ressaltar que por hipótese $c > \lambda \mu$, onde isso significa que a companhia se assegura que o valor pago pelo prêmio é superior ao valor esperado das indenizações por unidade de tempo. Podemos perceber tal hipótese utilizando o teorema elementar da renovação (MIKOSCH, 2004):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(U(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u}{t} + c - \lambda \mu = c - \lambda \mu \quad (3.13)$$

Assim, uma condição necessária para que o nível de reserva de uma seguradora seja em média positiva é que $c - \lambda \mu > 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

No modelo de Cramér-Lundberg existe uma condição que fixa o coeficiente de carga de segurança θ , ou também denominado coeficiente de segurança em:

$$\theta = \frac{\pi(t)}{E[S(t)]} - 1 = \frac{ct}{\lambda t \mu} - 1$$
$$\theta = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda \mu} \tag{3.14}$$

Assim, temos que $c = \lambda \mu(1 + \theta)$.

A aplicação do coeficiente de segurança deve-se, principalmente, à necessidade de compensar os desvios anormais de sinistralidade em relação ao seu valor esperado.

4. Teoria da Ruína

A teoria do risco tem-se concentrado no estudo das flutuações das reservas de uma companhia de seguros e para estimar as chances de ruína da seguradora. Um indicador natural do risco de uma seguradora entrar em uma situação de ruína aparece quando a quantidade de capital que a instituição tem como reserva é insuficiente para pagar aos segurados pelos prejuízos sofridos. Neste caso, a seguradora entra em ruína, mas não necessariamente em falência. Uma das estratégias que uma seguradora tem é tentar reduzir o risco de reserva negativa fazendo um contrato de resseguro.

O resseguro é um contrato que visa equilibrar e dar solvência aos seguradores e evitar, através da diluição dos riscos, a ruína do segurador em caso de excesso de sinistralidade. Assim, o uso do resseguro tem por objetivo diminuir os riscos assumidos pelos seguradores diretos, mas não transfere suas responsabilidades perante o segurado, apenas concede aos resseguradores que assumam uma parte de seus riscos, mediante o pagamento de um prêmio de resseguro. Assim, a redução do risco diminui a probabilidade da ruína de uma seguradora.

Neste trabalho quando nos referimos à probabilidade da ruína queremos nos referir a probabilidade da reserva de uma seguradora ficar negativa em algum instante de tempo, dado o capital inicial $U(0) = u$, isto é, dizemos que a ruína de uma seguradora ocorre quando o processo $U(t) = u + ct - S(t)$, com $t \geq 0$, que modela o risco coletivo, atinge valores abaixo de zero.

4.1 Probabilidade de Ruína

A Probabilidade de Ruína Eventual é definida como sendo

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= P\{T < \infty | U(0) = u\} \\ &= P\{U(t) < 0 \text{ para um determinado valor fixo } t > 0 | U(0) = u\} \\ &= P(u + ct - S(t) < 0 | U(0) = u) = P(S(t) > u + ct | U(0) = u) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > u + ct \mid U(0) = u\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\Psi(u) = \int_{u+ct}^{\infty} p_X(x) dx \quad (4.1)$$

onde $p_X(x)$ é a função de densidade das indenizações agregadas. O tempo da ruína é definido como

$$T = \inf\{t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\}.$$

Ou seja, é o primeiro instante em que a companhia tem uma reserva negativa. Por convenção,

$$T = \infty \text{ se } U(t) \geq 0, \forall t > 0.$$

Sendo u o capital inicial investido pela seguradora, a probabilidade de ruína eventual é alta quando os valores de u são baixos, embora $\Psi(u)$ dependa também de outros fatores de risco relacionados aos contratos emitidos pela seguradora.

Como $c > \lambda t \mu$, então $0 \leq \Psi(u) < 1$, caso contrário $\Psi(u) = 1$, em outras palavras se o valor pago à seguradora for inferior ao valor esperado das indenizações agregadas por unidade de tempo, então probabilidade de ruína da seguradora é (quase) certa. Porém se $U(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ quase certamente a reserva da seguradora poderá, no entanto, passar (ou não) por valores negativos, isto é, entrar em ruína. Facilmente compreenderemos que $\Psi(u)$ é uma função não crescente de u e que $\Psi(u) \rightarrow 0$ se $u \rightarrow \infty$.

A probabilidade de solvência, ou probabilidade de não ruína, é definida por

$$\delta(u) = 1 - \Psi(u). \quad (4.2)$$

Note que a probabilidade de não ruína eventual, $\delta(u)$, é uma função monotônica crescente em u em que o $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$, o que implica que o $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$ (SEAH, 1990).

A probabilidade de ruína eventual em função da reserva inicial u em tempo contínuo com horizonte de tempo finito é denotada por $\Psi(u, t)$, que em outras palavras é a probabilidade de ruína eventual anterior a um determinado $t > 0$. Então, definimos $\Psi(u, t)$ como

$$\Psi(u, t) = P(T < t) = P\{U(\tau) < 0 \text{ para algum } \tau, 0 < \tau \leq t | U(0) = u\}$$

e a probabilidade de sobrevivência em tempo finito é dada por $\delta(u, t) = 1 - \Psi(u, t)$.

Adicionalmente, temos que $\Psi(u, t)$ é a função de densidade da variável aleatória T e é uma função densidade imprópria (por defeito) porque $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(u, t) = \Psi(u), t > 0$. Temos ainda que para $0 \leq u_1 \leq u_2, 0 < t_1 \leq t_2 < \infty, \Psi(u_2, t) \leq \Psi(u_1, t) \Rightarrow \Psi(u_2) \leq \Psi(u_1)$ e $(u, t_1) \leq \Psi(u, t_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(u, t)$.

4.2 Coeficiente de ajustamento e desigualdade de Lundbeg

Na maioria dos casos, não é possível conseguir uma expressão fechada para a probabilidade da ruína, por causa da complexidade dos cálculos. Para amenizar essa complexidade, supondo que a distribuição das indenizações seja exponencial, surgiu a aproximação denominada Desigualdade de Lundberg. Utilizando modelo clássico, $U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0$, assumindo a existência de um coeficiente de ajuste, Lundberg fornece um limitante superior para a probabilidade de ruína, $\Psi(u)$, que é definido como *coeficiente de ajustamento*. Uma constante que representaremos por R , como habitualmente é utilizado na literatura.

Para a definição do coeficiente de ajustamento e da desigualdade de Lundberg se faz necessária à utilização de três teoremas que serão apresentados a seguir. Suas Demonstrações podem ser encontradas em Shiryaev (1999) e Ramsay (1997), ou se preferir, as demonstrações estarão disponíveis no Apêndice 2 dessa monografia.

Teorema 1. *Seja $S(t) \sim$ Poisson composta $(\lambda t, P(x))$. Então existe $m_X(r) = E(e^{rX})$ para $-\infty < r < \gamma$, tal que $\lim_{r \rightarrow \gamma} m_X(r) = \infty$, onde γ pode tender para ∞ . O coeficiente de ajustamento R é a menor raiz positiva da equação*

$$\lambda + cR - \lambda m_X(R) = 0. \quad (4.3)$$

O parâmetro λ representa a intensidade de chegada de indenizações segundo um processo de Poisson, a constante c representa o prêmio recebido por unidade de tempo no modelo e $m_X(R)$ representa a função geradora de momentos da variável X avaliada em R . A primeira solução positiva de equação (4.3) que satisfaz a igualdade, independentemente da distribuição de sinistro, chamaremos de coeficiente de ajustamento ou expoente de Lundberg.

Exemplo 1: Determinar o Coeficiente de Ajustamento R para o caso em que as indenizações individuais seguem uma distribuição exponencial, $X \sim \text{Exp}(\beta)$, com f.d.p. $f(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0$. Tem-se que sua função geradora de momentos é dada por

$$m_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}, \quad r < \beta.$$

Substituindo a função geradora de momentos da função densidade exponencial acima na equação (4.3), após algumas manipulações algébricas obtemos

$$R = \beta - \frac{\lambda}{c}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 2: Determinar o Coeficiente de Ajustamento, R , para o caso em que as indenizações individuais seguem uma distribuição normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com f.d.p.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x \geq 0$. Considerando que $X \sim N(2; 1)$, então sua função geradora de momentos é dada por

$$m_X(r) = e^{2r + \frac{r^2}{2}}, \quad r < \beta.$$

Substituindo a função geradora de momentos, para $N(2; 1)$, na equação (4.3), obtemos

$$\lambda + cR - \lambda e^{2R + \frac{R^2}{2}} = 0.$$

Se considerarmos $c = 2,2$ e $\lambda = 1$, temos que $1 + 2,2R - e^{2R + \frac{R^2}{2}} = 0$, donde obtemos que $R = 7,4507 \times 10^{-2}$. ■

Uma das conexões entre o coeficiente de ajustamento e a probabilidade de ruína é apresentado através do seguinte teorema.

Teorema 2. *Seja $S(t) \sim$ Poisson composta $(\lambda t, P(x))$, com $P(0) = 0$ e suponha que o coeficiente de ajustamento R existe. Então a Desigualdade de Lundberg é dada por*

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (4.5)$$

onde u é a reserva inicial da seguradora.

Vale ressaltar que o parâmetro R depende do processo de sinistros agregados, cujos parâmetros correspondem ao processo de Poisson composto na soma dos sinistros. Pela equação (4.5) podemos perceber que quanto maior o parâmetro R , menor torna-se a probabilidade de ruína, esse comportamento pode ser considerado previsível já que a relação entre essas grandezas segue uma função exponencial decrescente.

Teorema 3. *Com as hipóteses do Teorema 1 e adicionalmente $P(0) = 0$, então o coeficiente de ajustamento R é a única raiz positiva da equação*

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx = 1. \quad (4.6)$$

Para mais informações sobre o coeficiente de ajustamento e a desigualdade de Lundberg consultar Kaas et al. (2008).

4.3 Aproximação de Cramér-Lundberg

A aproximação de Cramér-Lundberg foi desenvolvida no início do século XX por Harald Cramér e Filip Oskar Lundberg. Esta representa a aproximação assintótica para a probabilidade de ruína eventual para grandes valores de reserva inicial u .

Teorema 4. *Supondo que o expoente de Lundberg existe e que $\int_0^\infty xe^{Rx}[1 - F(x)]dx < \infty$, onde F é a função distribuição das indenizações, então*

$$\Psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda m'_x(R) - c} e^{-Ru} = \frac{\delta(0)}{\lambda m'_x(R) - c} e^{-Ru} = Ce^{-Ru} \quad (4.7)$$

onde R designa o coeficiente de ajustamento anteriormente definido.

A demonstração deste teorema pode ser vista em Centeno (2003) ou em Rolski (1998).

Na hipótese das indenizações seguirem uma distribuição exponencial, tem-se que $e^{Ru} = (c\beta)^{-1}\lambda$, onde β é o parâmetro da distribuição das indenizações. Com isso, a aproximação de Cramér-Lundberg torna-se exata, isto é, existe uma constante $\alpha \geq 0$ tal que $\Psi(u) = \alpha e^{-Ru} \forall u \geq 0$, então $\alpha = \lambda\mu(c)^{-1}$ e $R = \mu^{-1} - \lambda c^{-1}$.

A aproximação de Cramér-Lundberg, geralmente, apresenta resultados precisos para a probabilidade da ruína eventual, para todo $u \geq 0$ e não apenas para valores grandes da reserva inicial da seguradora (ASMUSSEN, 2010). No entanto, segundo Bulhmann (1970), há uma grande dificuldade na aplicação dessa aproximação na prática, devido à necessidade de conhecer a função geradora de momentos das indenizações e, conseqüentemente, a sua função densidade. O que não permite que a aproximação seja utilizada para todo tipo de distribuição das indenizações.

4.4 Probabilidade de Ruína para Indenizações que seguem Distribuição Exponencial

Há poucas maneiras de encontrar uma fórmula fechada para a probabilidade de ruína eventual, uma forma para determinar é quando as indenizações seguem uma distribuição exponencial.

Seja um processo de Poisson composto homogêneo que representa as indenizações agregadas do risco da reserva, em que as indenizações particulares são variáveis aleatórias com função de densidade exponencial de parâmetro β , onde $\beta > 0$. Então a probabilidade da ruína é dada por

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}. \quad (4.8)$$

Demonstração. Sabendo-se que

$$\Psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \Psi_n(u+ct-x) dx dt$$

e considerando o tempo e a quantidade da primeira indenização, temos que

$$\delta(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \delta(u+ct-x) dx dt.$$

Utilizando $s = u + ct$, temos

$$\delta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda s/c} \int_u^s p(x) \delta(s-x) dx ds.$$

Aplicando a primeira derivada da função acima, e considerando que $P(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x \geq 0 \Rightarrow p(x) = \beta e^{-\beta x}$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta'(u) &= \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x) \delta(u-x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \beta e^{-\beta x} \delta(u-x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\beta \lambda}{c} e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} \delta(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda derivada temos

$$\delta''(u) = \frac{\lambda}{c} \delta'(u) + \frac{\beta^2 \lambda}{c} e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} \delta(x) dx - \frac{\beta \lambda}{c} \delta(u).$$

Ao multiplicarmos $\delta'(u)$ por β e adicionando a equação acima encontramos a equação diferencial de segunda ordem linear

$$\begin{aligned} \delta''(u) + \beta \delta'(u) &= \frac{\lambda}{c} \delta'(u) \\ \delta''(u) + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right) \delta'(u) &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral é dada por

$$\delta(u) = a + b e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u},$$

onde a e b são constantes. Utilizando a desigualdade de Lundberg temos que o $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ logo $a = 1$. Assim, $\delta(0) = 1 + b \Rightarrow b = -\Psi(0)$ e consequentemente

$\delta(u) = 1 - \Psi(0)e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}$. Agora a questão é determinar $\Psi(0)$. Assim, a partir de

$$\Psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x)\Psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}(1 - P(x))$$

e integrando sobre $(0, \infty)$, tem-se que

$$-\Psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \Psi(u)du - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u p(x)\Psi(u-x)dx du - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - P(x))dx.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^u p(x)\Psi(u-x)dx du &= \int_0^\infty \int_u^\infty \Psi(u-x)du p(x)dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(y)dy p(x)dx = \int_0^\infty \Psi(y)dy \end{aligned}$$

e substituindo na equação anterior, ficamos com

$$\Psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - P(x))dx.$$

Uma vez que $P(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x \geq 0$, então

$$\Psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\beta x} dx = -\frac{\lambda}{\beta c} \int_0^\infty -\beta e^{-\beta x} dx = \frac{\lambda}{\beta c}.$$

Daí concluímos que

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}$$

e consequentemente

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u}.$$

Assim, podemos calcular a probabilidade de ruína eventual quando as indenizações seguem uma distribuição exponencial a partir da fórmula fechada (4.8).

5. Modelo de Risco

O presente capítulo é dedicado à utilização de um modelo atuarial de seguros com foco na simulação do risco de ruína de uma seguradora em tempo finito. A modelagem utilizada é uma versão simplificada do modelo de Cramér-Lundberg e pode ser encontrado no livro *Simulation* de Sheldon M. Ross. Todas as simulações apresentadas foram desenvolvidas a partir da linguagem de programação R, utilizando o software RStudio em sua versão 3.0.1.

Antes de apresentar uma proposta do modelo atuarial de ruína, visto a necessidade de compreensão de alguns conceitos da teoria das probabilidades, vamos destacar algumas propriedades das distribuições exponenciais.

5.1 Propriedades da Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória X possui distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função densidade de probabilidade é descrita por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Consequentemente, a função de distribuição cumulada é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Uma propriedade importante da distribuição exponencial é a falta de memória, tem-se que

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \text{ para todo } s, t \geq 0.$$

A fim de exemplificar a propriedade de falta de memória, vamos considerar que X representa o tempo de vida de algum componente eletrônico, seguindo distribuição exponencial. Se o componente durou até um instante t , então a probabilidade condicional dele durar mais s unidades de tempo além do instante t , é a mesma que um componente novo venha a durar s unidades de tempo. Ou seja,

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Sendo X uma variável exponencialmente distribuída, podemos escrever

$$\begin{aligned}
P\{X > s + t | X > t\} &= \frac{P(X > t + s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s),
\end{aligned}$$

o que mostra a falta de memória para distribuições exponenciais.

Sendo X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias exponenciais independentes com respectivos parâmetros de escala, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, outro resultado importante refere-se à distribuição de $M = \min(X_1, \dots, X_n)$, que também é exponencial, mas com parâmetro de escala igual a $\sum_i \lambda_i$ (ROSS, 1997).

Dessa forma, sendo $t > 0$, tem-se que

$$P\{M > t\} = P\{X_i > t, i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i > t\} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}.$$

A probabilidade de algum X_j ser igual a M é obtida pela expressão (ROSS, 1997)

$$\begin{aligned}
P\{X_j = M\} &= \int P\{X_j = M | X_j = t\} \lambda_j e^{-\lambda_j t} dt = \int P\{X_i > t, i \neq j | X_j = t\} \lambda_j e^{-\lambda_j t} dt \\
&= \int P\{X_i > t, i \neq j\} \lambda_j e^{-\lambda_j t} dt = \int \left(\prod_{i \neq j} e^{-\lambda_i t} \right) \lambda_j e^{-\lambda_j t} dt \\
&= \lambda_j \int e^{-\sum_i \lambda_i t} dt = \frac{\lambda_j}{\sum_i \lambda_i} \tag{5.1}
\end{aligned}$$

5.2 Descrição do Modelo de Risco

O modelo proposto leva em consideração alguns dos aspectos essenciais para o negócio de seguro, como a quantidade de segurados da empresa, os valores dos sinistros, a chegada de novos clientes, o tempo de permanência que cada segurado fica na companhia, entre outros. A aplicação do modelo será feita com a utilização de dados simulados.

Na construção de um modelo matemático que represente o risco de ruína de uma seguradora, vamos considerar que sua única fonte de receita decorre de pagamentos de prêmios da parte dos segurados, e que, por outro lado, a seguradora teria apenas despesas com o pagamento dos sinistros. Assim, o capital da companhia deverá ser constituído exclusivamente da quantia em espécie que será resultante do capital inicial (u) acrescido do resultado do encontro de contas entre receitas e despesas em um período pré-definido.

Para que se possa construir um modelo de risco adequado, adotaremos algumas hipóteses. Primeiramente iremos considerar que os segurados geram sinistros de acordo com uma distribuição de Poisson (λ), e que os valores dos sinistros sigam uma distribuição Gama com parâmetros de forma e escalas dados por α e β . Vamos supor que novos clientes surgem de acordo com um processo de Poisson (ν), e que cada segurado existente permanece na companhia de seguros por um tempo exponencialmente distribuído com valor esperado $1/\mu$. Finalmente, vamos supor que cada segurado paga um valor fixo “ c ” a empresa de seguro em cada unidade de tempo. Sabendo que o número inicial de clientes é n_0 e o capital inicial da companhia é $u_0 > 0$, estamos interessados em estimar a probabilidade de que o capital da empresa seja não negativo durante uma janela de tempo T .

Para simular o modelo descrito acima, serão definidas as seguintes variáveis e eventos correspondentes:

- Variável de Tempo (t) – representa os incrementos temporais sucessivos nos quais ocorrem os eventos de interesse para a simulação (entrada de clientes, ocorrência de sinistro ou saída de cliente).
- Variáveis de Estado do Sistema (n, u) – representam a resposta futura do sistema com base em situações antecedentes, sendo n o número de segurados e u o capital da empresa.
- Eventos – existem três tipos de eventos que podem alterar o capital da empresa em um momento t : a entrada de um novo segurado, a saída de um segurado ou ocorrer um sinistro.

Sendo (n, u) o estado do sistema no tempo t , como foi visto na secção (5.1), o tempo necessário para que ocorra um evento seguinte será igual a $t + X$, onde X é uma variável aleatória exponencial com parâmetro igual à soma dos parâmetros das distribuições correspondentes a cada um dos eventos possíveis (novo cliente, sinistro ou saída de cliente), ou seja, $\nu + n\mu + n\lambda$. Além disso, dado o resultado da equação (5.1), a probabilidade da ocorrência de cada um dos eventos é a seguinte:

- I. Um novo segurado, com probabilidade $\frac{\nu}{\nu + n\mu + n\lambda}$;
- II. A saída de um segurado, com probabilidade $\frac{n\mu}{\nu + n\mu + n\lambda}$;
- III. Um sinistro, com probabilidade $\frac{n\lambda}{\nu + n\mu + n\lambda}$.

Esse processo de geração de tempos exponenciais, identificação dos eventos e atualização das variáveis de estado é repetido até que o período máximo de análise ($T = 500$) se esgote. Ao final desse procedimento obtemos uma avaliação sobre o capital da seguradora (ruína ou não ruína). Um laço com 10.000 réplicas de Monte Carlo é então utilizado a fim de estimarmos a probabilidade de ruína da seguradora, onde computamos a proporção de vezes (dentre as 10.000 executadas) em que o capital foi insuficiente para arcar com o pagamento das indenizações.

5.3 Resultados Numéricos

Na presente subseção, buscamos avaliar uma versão simplificada do modelo de Cramér-Lundberg sugerida por Sheldon M. Ross em seu livro *Simulation*, 1997, para o caso em que as indenizações particulares têm função densidade de probabilidade gama. Nesse sentido, vários cenários de simulação foram avaliados, variando-se a taxa de ocorrência das indenizações (λ), o valor da reserva inicial da seguradora (u), o número de segurados (n), a constante relacionada com o valor do prêmio (c) e os parâmetros de distribuição da variável de perda (indenizações).

Para estimar a probabilidade de ruína em cada cenário, utilizamos 10.000 réplicas de Monte Carlo e consideramos um período de tempo $T = 500$, o qual representa o intervalo (em períodos) de observação da trajetória do capital da seguradora. O principal objetivo da variação dos parâmetros e das constantes que estão presentes no modelo de Cramér-Lundberg é para avaliar as estimativas da probabilidade da ruína eventual.

5.3.1 Influência do Capital Inicial e do número de segurados

O tempo de ocorrência entre os sinistros é uma das variáveis mais influentes no processo de ruína, pois é a partir dele que as seguradoras estimam o tempo necessário para arrecadar um montante suficiente para cobrir as indenizações. Vamos pensar no seguinte cenário: seja uma seguradora cujo capital inicial (u) é relativamente alto e que os tempos entre os sinistros ocorram em períodos muito curtos. Desta forma, mesmo com capital elevado, a seguradora poderá não possuir tempo suficiente para arrecadar todo o montante necessário para arcar com suas obrigações, podendo, assim, entrar em estado de ruína.

Podemos imaginar também um cenário em que a seguradora possui um valor baixo para o capital inicial, mas o tempo de ocorrência entre os sinistros tenha um grande

espaçamento. Dessa forma, a seguradora ter tempo suficiente para conseguir arrecadar as contribuições e pagar as indenizações sem entrar em estado de ruína. No entanto, quando já conhecemos a distribuição das indenizações, o valor destinado ao capital inicial poderá influenciar na redução da probabilidade de ruína da seguradora.

Na Tabela 3 podemos observar a influência do capital inicial, quando as indenizações individuais seguem uma distribuição Gama(2;1.6), $\lambda = \frac{1}{24}$, valor do prêmio $c = 0.2$ e número inicial de segurados $n = 100$. Se considerarmos uma escala monetária descrita em unidades de mil reais, nesse cenário a cota “ c ” equivale a uma quantia de R\$ 200,00. Além disso, multiplicando os parâmetros da distribuição Gama, obtemos a média dos montantes pagos em indenização em R\$ 3.200,00. A escolha $\lambda = \frac{1}{24}$ indica que em média, um cliente gera sinistros a cada 24 períodos de tempo.

Tabela 3: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $c = 0.2$ e diversos valores de u .

u	$\Psi(u)$ (%)
0.1	0.1368266
0.2	0.1323808
0.3	0.1320271
0.5	0.1288439
1.0	0.1182878
1.5	0.1128671
2.0	0.1016457

Podemos notar que quanto maior for a reserva inicial, menor é a probabilidade de ruína. Além disso, sob as escolhas paramétricas desse cenário de simulação, observam-se estimativas de ruína relativamente baixas mesmo em níveis baixos de u .

Na Tabela 4 podemos observar a influência número de clientes segurados inicialmente quando as indenizações individuais seguem uma distribuição Gama(2;1.6), $\lambda = \frac{1}{24}$, valor do prêmio $c = 0.2$ e o capital inicial $u = 1$.

Tabela 4: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $u = 1$, $c = 0.2$ e diversos valores de n .

n	$\Psi(u)$ (%)
10	0.1334785
20	0.1328809
30	0.1308288
50	0.1310968
70	0.1267004
90	0.1227069
100	0.1203892

Verificamos que a probabilidade da ruína diminui com aumento do número de segurados.

5.3.2 Influência do valor do prêmio e do tempo médio de sinistralidade

Nas Tabelas 5 e 6 estão apresentados os resultados numéricos considerando-se as indenizações seguindo uma distribuição Gama(2;1.6), quando $u = 1$. Na Tabela 5 fixamos $\lambda = \frac{1}{24}$ e variamos o valor do prêmio e , na Tabela 6, fixamos $c = 0.2$ e variamos o valor de λ . Verificamos que, como esperado, a probabilidade da ruína diminui com aumento do valor do prêmio; por outro lado, quando aumentamos o valor da taxa de ocorrência de indenizações a probabilidade da ruína aumenta.

Tabela 5: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $u = 1$ e diversos valores de c .

c	$\Psi(u)$ (%)
0.15	0.384897500
0.20	0.121385900
0.25	0.067306990
0.50	0.020462430
0.70	0.013727170
0.90	0.009447278
1.00	0.008478012

Tabela 6: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama(2;1.6), para $n = 100$, $u = 1$, $c = 0,2$ e diversos valores de λ .

λ	$\Psi(u)$ (%)
1/16	0.57288480
1/20	0.19326090
1/24	0.12317880
1/26	0.10622410
1/30	0.08734872
1/34	0.07607864
1/36	0.07135010

5.3.3 Influência dos parâmetros associados à distribuição dos montantes pagos em indenizações

Nas Tabelas 7, 8 e 9 estão apresentados os resultados numéricos considerando-se que as indenizações seguem uma distribuição Gama(α ; β). Fixamos os valores de $\lambda = \frac{1}{24}$, o número inicial de clientes $n = 100$, o capital inicial $u = 1$, o valor do prêmio $c = 0,2$ e variamos os valores de α e β , de modo que a média da distribuição gama ($\alpha \times \beta$) se mantivesse constante.

Podemos observar que α determina a forma da distribuição, enquanto β é o parâmetro de escala da distribuição. Vale resaltar que a cauda da distribuição gama fica mais densa quando escolhemos valores inferiores a 1 para o parâmetro de forma (α), mantendo-se a média da distribuição constante. Dessa forma, na tabela 7 avaliamos a evolução do risco de ruína à medida que a cauda da distribuição gama apresenta cauda mais pesada, quando mantemos a média (produto dos parâmetros) em 1.6 (R\$ 1.600,00). Note que a probabilidade de ruína está diminuindo a medida que aumentamos os valores para α e β proporcionalmente.

Tabela 7: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0, 2$ e diversos valores de α e β .

α	β	$\Psi(u)$ (%)
2.0	1.6/2.0	0.03571660
1.8	1.6/1.8	0.03704992
1.6	1.6/1.6	0.03824802
1.4	1.6/1.4	0.03828529
1.2	1.6/1.2	0.03903365
1.0	1.6/1.0	0.04015061
0.8	1.6/0.8	0.04031446
0.6	1.6/0.6	0.04323589

Na tabela 8 aumentamos a média das perdas de R\$ 1.600,00 para R\$ 2.600,00, e, novamente, observamos o comportamento das probabilidades de ruína. Ao compararmos as tabelas 7 e 8, podemos perceber que a probabilidade de ruína teve um aumento quando aumentamos a média das perdas. Quando variamos β de 0.8 para 1.3, e mantemos α constante em 2.0, $\Psi(u)$ passa de 0.03571660 para 0.1176097.

]

Tabela 8: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0, 2$ e diversos valores de α e β .

α	β	$\Psi(u)$ (%)
2.0	2.6/2.0	0.1176097
1.8	2.6/1.8	0.1217147
1.6	2.6/1.6	0.1288414
1.4	2.6/1.4	0.1314063
1.2	2.6/1.2	0.1317651
1.0	2.6/1.0	0.1339422
0.8	2.6/0.8	0.1418066
0.6	2.6/0.6	0.1532396

Na tabela 9 o exercício é análogo, mas escolhemos uma perda média superior ($\alpha \times \beta = 3.6$). Se compararmos as tabelas 8 e 9, vamos perceber que a probabilidade de ruína teve um aumento quando aumentamos a média das perdas de 2.6 para 3.6. Se mantivermos α constante em 1.0 e variarmos β de 2.6 para 3.6, $\Psi(u)$ passa de 0.1339422 para 0.5876450.

Tabela 9: Estimativa da probabilidade de ruína para indenizações com distribuição Gama($\alpha; \beta$), para $\lambda = \frac{1}{24}$, $n = 100$, $u = 1$, $c = 0, 2$ e diversos valores de α e β .

α	β	$\Psi(u)$ (%)
2.0	3.6/2.0	0.4878076
1.8	3.6/1.8	0.5032479
1.6	3.6/1.6	0.5039431
1.4	3.6/1.4	0.5347039
1.2	3.6/1.2	0.5480848
1.0	3.6/1.0	0.5876450
0.8	3.6/0.8	0.6496768
0.6	3.6/0.6	0.7075054

6. Considerações Finais

No presente trabalho, apresentamos algumas características básicas do modelo de risco proposto por Crámer-Lundberg, e mais detalhes podem ser vistos em Asmussen (2010), Bowers et al. (1986), Bühlmann (1970), Embrechts et al. (2003), e Grandell & Segerdahl (1971).

Em um exercício particular, recorreremos a modelagem apresentada por Sheldon M. Ross em seu livro *Simulation*, de 1997, a fim de avaliar a probabilidade de ruína em um modelo com algumas características da teoria proposta por Cramér-Lundberg. Com o modelo proposto por Ross (1997) simulamos a probabilidade da ruína para o caso em que as indenizações têm função de densidade gama, considerando diversos cenários de simulação.

As simulações feitas no desenvolvimento deste trabalho foram realizadas a partir da linguagem de programação R, utilizando o software RStudio em sua versão 3.0.1 para o sistema operacional Windows.

Os resultados numéricos revelam que, quando já conhecemos a função de distribuição das indenizações, quanto maior for a reserva inicial, menor é a probabilidade de ruína, com tendência a convergir para zero. Verificamos também que, como esperado, a probabilidade da ruína diminui com aumento do valor do prêmio; por outro lado, quando aumentamos o valor da taxa de ocorrência de indenizações a probabilidade da ruína aumenta.

Como uma proposta para trabalho futuro, é possível avaliar as mesmas características observadas no presente trabalho considerando distribuições de caudas mais densas para a variável de perda agregada (indenizações), tais como as distribuições tipo pareto e lognormal.

Demonstrações de Algumas Funções do Capítulo 3

1.1 Demonstração da Função de Distribuição de um processo de Poisson composto homogêneo

$$F(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, x \geq 0,$$

onde $F^{*n}(x) = P(\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$ é a n-ésima convolução de $F_X(x)$.

Demonstração

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S(t) \leq x) = P\left(\sum_{i=0}^n X_i \leq x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = n] P(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N(t)} \leq x | N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = n] P(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x) \end{aligned}$$

1.2 Demonstração da esperança e variância de $S(t)$

A esperança e variância de $S(t)$ são dadas respectivamente por:

$$E[S(t)] = \lambda t E[X] = \lambda t \mu \text{ e } V[S(t)] = \lambda t E[X^2] = \lambda t [\sigma^2 + \lambda^2]$$

Demonstração

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E[E[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N(t)}] | N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n | N(t) = n] P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n] P[N(t) = n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] P[N(t) = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nE[X]P[N(t) = n] = E[X] \sum_{n=0}^{\infty} nP[N(t) = n] \\
&= E[X]E[N(t)] = \lambda tE[X] = \lambda t\mu
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S(t)] &= E[X(t)^2] - E[X(t)]^2 \\
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \right)^2 \right] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= E \left[E \left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \right)^2 \mid N(t) = n \right] \right] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[E \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] \right] P[N(t) = n] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] + \left(E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] \right)^2 \right] P[N(t) = n] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n \text{Var}[X] + n^2(E[X])^2] P[N(t) = n] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \text{Var}[X] P[N(t) = n] + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (E[X])^2 P[N(t) = n] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= \text{Var}[X]E[N(t)] + (E[X])^2 E[N(t)^2] - (E[X])^2 (E[N(t)])^2 \\
&= \text{Var}[X]E[N(t)] + (E[X])^2 \text{Var}[N(t)] \\
&= \lambda t \text{Var}[X] + (E[X])^2 \lambda t = \lambda t [\text{Var}[X] + (E[X])^2] = \lambda t E[X^2] = \lambda t [\sigma^2 + \lambda^2]
\end{aligned}$$

1.3 Demonstração da Função Geradora de Momentos para um processo de Poisson Composto Homogêneo

A função geradora de momentos para um Processo de Poisson Composto homogêneo, $S(t)$ é dada por:

$$m_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(m_X(r) - 1)}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 m_{S(t)}(r) &= E[e^{rS(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{r \sum_{i=1}^{N(t)} X_i} \mid N(t) = n] P[N(t) = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{r \sum_{i=1}^n X_i}] P[N(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{rX_1 + rX_2 + \dots + rX_n}] P[N(t) = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [E[e^{rX_1}] E[e^{rX_2}] \dots E[e^{rX_n}]] P[N(t) = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] P[N(t) = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\prod_{i=1}^n m_{X_i}(r) \right] P[N(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} (m_{X_i}(r))^n P[N(t) = n] \\
 &= E \left[(m_X(r))^{N(t)} \right] = E[e^{N(t) \log m_X(r)}] = m_{N(t)}(\log m_X(r)),
 \end{aligned}$$

Utilizando a função geradora de uma variável aleatória que segue um processo de Poisson, temos que:

$$m_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(e^{\log m_X(r)} - 1)} = e^{\lambda t(m_X(r) - 1)}$$

Demonstrações dos Teoremas do Capítulo 4

1.2 Demonstração do Coeficiente de Ajustamento

Teorema. *Seja $S(t) \sim$ Poisson composta $(\lambda t, P(x))$. Então existe $m_X(r) = E(e^{rX})$ para $-\infty < r < \gamma$, tal que $\lim_{r \rightarrow \gamma} m_X(r) = \infty$, onde γ pode tender para ∞ . O coeficiente de ajustamento R é a menor raiz positiva da equação*

$$\lambda + cR - \lambda m_X(R) = 0.$$

Demonstração. Seja $h(r) = \lambda + cR - \lambda m_X(R)$, $\Rightarrow h(0) = 0$, pois $m_X(0) = E(e^{0X}) = 1$ implicando que $h(0) = \lambda + c * 0 - \lambda m_X(0) \Rightarrow h(0) = \lambda - \lambda = 0$. Seja $m'_X(r) = E(Xe^{rX}) \Rightarrow m'_X(0) = E(Xe^{0X}) = t\mu$, assim $h'(r) = c - \lambda m'_X(r) \Rightarrow h'(0) = c - \lambda t\mu > 0$ por hipótese. $h''(r) = -\lambda m''_X(r) = -\lambda E(X^2 e^{rX}) < 0$. Sabemos que $h(r)$ é côncava, por outro lado tem-se $\lim_{r \rightarrow \gamma} h(r) = -\infty$.

Portanto a equação $h(r) = 0$ tem duas raízes, uma é a raiz trivial, $r = 0$, e outra raiz positiva em R , já que $h(r)$ que tem derivada positiva em zero, implicando que a função seja crescente na vizinhança de zero, e, além disso, $h(r)$ é côncava.

1.3 Demonstração da Desigualdade de Lundberg

Teorema 2. *Seja $S(t) \sim$ Poisson composta $(\lambda t, P(x))$, com $P(0) = 0$ e suponha que o coeficiente de ajustamento R existe. Então a Desigualdade de Lundberg é dada por*

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

onde u é a reserva inicial da seguradora.

Demonstração. Seja $\Psi_n(u)$ a probabilidade de ruína antes ou na n -ésima indenização. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(u) = \Psi(u)$ basta provar por indução que $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$.

Primeiro seja $n = 1$, a ruína só pode acontecer na primeira indenização, por definição temos que o tempo que decorre até à primeira indenização tem distribuição exponencial de média $1/\lambda$. Então

$$\begin{aligned}\Psi_1(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [U(t) < 0]) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [u + ct - S(t) < 0]) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt.\end{aligned}$$

Sabemos que R é positivo a partir do Teorema 1 e $x > u + ct \Rightarrow u + ct - x < 0$, implicando que $e^{-R(u+ct-x)}$ seja um valor maior que um. Portanto,

$$\begin{aligned}\Psi_1(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) dx dt \\ &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt \\ &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+Rc)t} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) dx dt \\ &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda m_X(R) e^{-(\lambda+Rc)t} dt \\ &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-(\lambda+Rc)t} dt \\ &\leq e^{-Ru}\end{aligned}$$

já que $m_X(R) = \lambda + c$ e sendo a última integral igual a 1, pois corresponde à densidade exponencial $(\lambda + cR)$.

Seguindo o mesmo raciocínio temos que quando $n = 2$, a ruína só pode acontecer na primeira ou na segunda indenização, assim

$$\begin{aligned}\Psi_2(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) \\ &\quad + P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct] \cap [X_2 \text{ ocorre ruína}]).\end{aligned}$$

Caso a ruína ocorra na primeira indenização, a segunda indenização ocorrerá com o sistema já em ruína e com probabilidade igual a um. Se na primeira indenização o sistema não entrar em estado de ruína, o mesmo acontecerá na segunda indenização com probabilidade

$\Psi(u + ct - x)$; tal que $u + ct - x$ é o valor de $U(t)$ após a primeira indenização, e x representa o valor da primeira indenização. Por hipótese $\Psi_n(u + ct - x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$. Então,

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) * 1 \, dx \, dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \Psi_1(u + ct - x) \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt \right] \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt \\
&\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+Rc)t} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) \, dx \, dt \\
&\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda m_X(R) e^{-(\lambda+Rc)t} \, dt \\
&\leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-(\lambda+Rc)t} \, dt \\
&\leq e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Já para $n + 1$, supondo um n válido, temos de forma análoga e considerando que a ruína acontece na primeira ou nas n indenizações seguintes, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty p(x) \, dx \, dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} p(x) \Psi_n(u + ct - x) \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt
\end{aligned}$$

já que $\int_{u+ct}^\infty p(x) \, dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx$, temos então

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} p(x) \, dx \, dt \\
&\leq e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+Rc)t} \int_0^\infty e^{Rx} p(x) \, dx \, dt \\
&\leq e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Assim, $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ e conseqüentemente $\delta_n(u) \geq 1 - e^{-Ru}$. Da desigualdade concluímos que $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru} = 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$ e $\Psi(0) \leq e^{-R*0} = 1$.

Teorema. Com as hipóteses do Teorema 1 e adicionalmente $P(0) = 0$, então o coeficiente de ajustamento R é a única raiz positiva de

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx = 1$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx &= \int_0^{\infty} e^{Rx} \int_x^{\infty} p(y) dy dx = \int_{y=0}^{\infty} p(y) \int_{x=0}^{\infty} e^{Rx} dx dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty} p(y) \left(\frac{1}{R} e^{Ry} \Big|_0^y \right) dy = \int_{y=0}^{\infty} p(y) \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) dy \\ &= \frac{1}{R} \left[\int_{y=0}^{\infty} p(y) e^{Ry} dy - \int_{y=0}^{\infty} p(y) dy \right] = \frac{1}{R} (m_X(R) - 1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)] dx = \frac{\lambda}{cR} (m_X(R) - 1) = \frac{\lambda}{cR} \left(1 + \frac{cR}{\lambda} - 1 \right) = 1.$$

Código no R

```

print('Entre com valor médio da parcela de seguro (c): ')
c<-as.numeric(readLines(n=1))

print('Entre com taxa de ocorrência de sinistro (lambda): ')
lambda<-as.numeric(readLines(n=1))

print('Entre com valor do capital inicial (a): ')
a<-as.numeric(readLines(n=1))

print('Entre com número inicial de segurados (n): ')
n<-as.numeric(readLines(n=1))

print('Entre com parâmetro de forma da gama (alfa): ')
shap<-as.numeric(readLines(n=1))

print('Entre com parâmetro de escala da gama (beta): ')
scal<-as.numeric(readLines(n=1))

nrep = 10
p_nruina = c()
p_ruina = c()
for (j in 1:nrep){

  T = 500
  v = 1/0.5      # em média, um cliente novo surge a cada meio de um período
  m = 1/60      # em média, cada cliente permanece com seguro por 60 períodos
  cont1 = 0     # contagem de capital negativo
  cont2 = 0     # contagem de capital positivo
  y = 0         # variável aleatória referente ao montante pago em um sinistro (em 1000
reais)
  te = 0        # variável de tempo
  t = 0

  while(te<=T)
  {
    p1 = v/(v+n*m+n*lambda)      # probabilidade de entrada de novo segurado
    p2 = n*m/(v+n*m+n*lambda)    # probabilidade de saída de um segurado
    p3 = n*lambda/(v+n*m+n*lambda) # probabilidade de ocorrência de sinistro

    X = rexp(1, rate = (v+n*m+n*lambda))
    t = te                      # período anterior à ocorrência de evento 1, 2 ou 3
    te = te + X                # período de ocorrência de evento 1, 2 ou 3
  }
}

```

```

a = a + n*c*(te-t)          # atualizando o capital
u = runif(1)
if(u < p1){n = n + 1}
else if (p1 <= u && u < p1+p2){n = n - 1}
else if (p1+p2 <= u && u < 1)
{
  y = rgamma(1,shape = shap, scale=scal)
  a = a - y
  if(y > c){cont1 = cont1 +1} else {cont2 = cont2+1}
}

}
p_ruina[j] = 100*(cont1/(cont1+cont2))
}
mean(p_ruina)

```

Referências Bibliográficas

ASMUSSEN, S., *Ruin Probabilities*. Singapore: World Scientific, 2000.

AZEVEDO, Gustavo H. W. de, *Seguros, matemática atuarial e financeira*. São Paulo: Saraiva, 2008.

BERNSTEIN, Peter L. *Desafio dos deuses: a fascinante história do seguro*. Rio de Janeiro: Campus, Funenseg, 2006.

BOWERS, N.L. JR., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, D.A., & NESBIT, C.J., *Actuarial Mathematics*. 1nd ed. Itasca, Illinois, USA: Society of Actuaries, 1986.

BÜCHNER, Franz, *Grundriss der Versicherungsgeschichte*, cit, p. 324. 1976

BÜHLMANN, H., *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York, N.Y.: Springer-Verlag, 1970.

CENTENO, M. L., *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*, Celta Editora, Oeiras, 2003.

EMBRECHTS, P., FURRER, H., KAUFMANN, R. *Quantifying regulatory capital for operational risk*. Derivatives Use, Trading & Regulation. London, 2003.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II, 3rd ed. New York: Wiley, 1971.

FENASEG – Federação Nacional das Empresas de Seguros Privados e de Capitalização. Arquivos da Conferência Brasileira de Seguros, Resseguros, Previdência Privada e Capitalização. Disponível em: < www.fenaseg.org.br >. Acesso em: Dezembro de 2014.

FREITAS, Evaldo de Souza; JOPPERT, João Batista da Silva; GONZALEZ, Júlio Esteves. *Recursos Humanos: a verdadeira luz do seguro*. Rio de Janeiro: IRB, 1977.

GRANDELL, J., & SEGERDAHL, C., *A Comparison of Some Approximations of Ruin Probabilities*. Scandinavian Actuarial Journal, 1971.

GRIMMETT, G., STIRZAKER, D. *Probability and Random Processes*. New York: Oxford University Press, Broch. 2001.

GUERREIRO, Marcelo da Fonseca. *Seguros Privados*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2004.

HURTADO, José M. et. Al. *Seguros de vida, accidentes, salud y planes de pensiones*. MAPFRE. Espanha: 2000.

KAAS, Rob, et al., *Modern actuarial risk theory: using R*. Vol. 128. Springer Science & Business Media, 2008.

LOPES, Hélio. *Introdução à simulação estocástica*. Disponível em: < www-di.inf.puc-rio.br/~lopes//inf2035/processosestocasticos.pdf >. Acesso em: Dezembro de 2014.

MIKOSCH, Thomas. *Non-life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer-Verlang, 2004.

PERIM, D.M. *Seguros: uma visão histórica e conceitual*. Monografia (Graduação em Administração de Empresas). Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, 2002.

PÓVOAS, Manuel Soares. *Na rota das instituições do bem-estar: seguro e previdência*. São Paulo: Green Forest do Brasil, 2000.

RIBEIRO, Paulo GOMES. *História do seguro: um resumo*. Rio de Janeiro: Funenseg, 1994.

RAMSAY, C. M., USABEL, M. A. *Calculating Ruin Probabilities via Product Integration*, Astin Bulletin, Volume 27, 2, 263-271, 1997

ROLSKI, T., SCHMIDT, H., SCHMIDT, V. and TEUGELS, J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 1998.

ROSS, Sheldon M. *Simulation. Statistical Modeling and Decision Science*. ELSEVIER, 1997.

SEAH, E. S. *Computing the Probability of Eventual Ruin*. Transactions of the Society of Actuaries, 1990.

SHIRYAEV, A., N. *Essentials of stochastic finance*, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability 3rd ed. Singapore: World Scientific, 1999.

TORGO, Luís., *A Linguagem R-Programação para Análise de Dados*. Escolar Editora. Lisboa, 2009.

TIJMS, H., C. *A First Course in Stochastic Models*. 1nd ed. New York : Wiley, 2003.